opción

Revista de Antropología, Ciencias de la Comunicación y de la Información, Filosofía, Lingüística y Semiótica, Problemas del Desarrollo, la Ciencia y la Tecnología

Año 35, diciembre 2019 N° 90

Revista de Ciencias Humanas y Sociales

ISSN 1012-1587/ ISSNe: 2477-9385

Depósito Legal pp 198402ZU45

Universidad del Zulia

Facultad Experimental de Ciencias

Departamento de Ciencias Humanas

Maracaibo - Venezuela

Opción, Año 35, Regular No.90 (2019): 713-768
ISSN 1012-1587/ISSNe: 2477-9385

Solución de las ecuaciones de Navier–Stokes

Julio Cesar Romero Pabón
Universidad del Atlántico juliromero@mail.uniatlantico.edu.co

Cielo Esther Romero Pabón
Universidad del Atlántico
Cie.romero@mail.udes.edu.co

Gabriel Mauricio Vergara Ríos
Universidad del Atlántico
gabrielvergara@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

Las ecuaciones de Navier-Stokes reciben su nombre de Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes. Las cuales forman un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido y de cualquier fenómeno en el que se incluyan fluidos con un análisis newtoniano. Estas ecuaciones se obtienen aplicando los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen fluido. Para obtener su forma diferencial es necesario aplicar ciertas consideraciones físico matemáticas, como son el análisis y relación de los esfuerzos tangenciales y el gradiente de velocidad (ley de viscosidad de Newton), lo que permite llevar las ecuaciones a una formulación diferencial que es más útil para la solución del problema. En este trabajo se presenta una solución analítica para llegar una solución general de este conjunto de ecuaciones.

Solution of the equations of Navier–Stokes

Abstract

The Navier-Stokes equations are named after Claude-Louis Navier and George Gabriel Stokes. Which form a system of equations in partial nonlinear derivatives that describe the movement of a fluid and any phenomenon in which fluids are included with a Newtonian analysis. These equations are obtained by applying the conservation

Recibido: 30-08-2019 •Aceptado: 10-10-2019

principles of mechanics and thermodynamics to a fluid volume. To obtain its differential form it is necessary to apply certain physical and mathematical considerations, such as the analysis and relationship of tangential stresses and the velocity gradient (Newton's viscosity law), which allows to bring the equations to a differential formulation that is more useful for the solution of the problem. In this paper an analytical solution is presented to arrive at a general solution of this set of equations.

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo se soluciona analíticamente las ecuaciones de Navier-Stokes, la metodología empleada para llegar a la solución fue la de trabajar primero el problema en tres dimensiones y después generalizarlo para n-dimensiones. El problema que se analizó es el que está planteado en los problemas del milenio del Clay Mathematics Institute (CMI).

Estas ecuaciones han sido estudiadas y manejadas por científicos, ingenieros y físicos, pero hasta el momento no se ha encontrado una solución general que las rija. Hallar una solución general de las de Navier-Stokes es conseguir un gran logro en las Ciencias Básicas, ya que estas permiten describir los fluidos newtonianos incompresibles, los cuales son de mucha importancia en el estudio de la Física y la Matemática. En la actualidad existen muchos estudios e inquietudes sobre estas ecuaciones, como, por ejemplo, Constantin (2001), en su trabajo sobre “Algunos problemas abiertos y direcciones de investigación en el estudio matemático de la dinámica de fluidos” describe las cuestiones dinámicas relativas tanto a la estabilidad como a los asuntos estadísticos planteados por la inestabilidad.

2. EL PROBLEMA

Las ecuaciones de Euler y Navier - Stokes describen el movimiento de un fluido en R^n (n = 2 o 3). Estas ecuaciones se deben resolver para un vector de velocidad desconocida $u(x,t) = \left(u_i(x,t)\right)_{1\leq i\leq n} \in R^n$ y presión $p(x,t) \in R$, definida para la posición $x \in R^n$ y el tiempo $t \geq 0$. Aquí restringimos la atención a los fluidos incompresibles que llenan todo el $\mathbb{R}^n$. Las ecuaciones de Navier - Stokes son dadas por

$$1)\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = v\, \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t) \qquad (x \in R^n, t \geq 0),$$

$$2)\quad div\, u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (x \in R^n, t \geq 0)$$

Con las condiciones iniciales:

$$(3) \qquad u(x,0) = u^0(x) \quad (x \in R^n).$$

Aquí, $u^0(x)$ es un campo vectorial libre de divergencia C^∞ en R^n, $f_i(x,t)$ son los componentes de una fuerza dada, aplicada externamente (por ejemplo, la gravedad), v es un coeficiente positivo (la viscosidad), Las ecuaciones de Euler son las ecuaciones (1), (2), (3) con un conjunto v igual a cero.

La ecuación (1) es solo la ley de Newton $f = m\,a$ para un elemento fluido sujeto a lo externo fuerza $f = (f_i(x,t))_{1\leq i\leq n}$ y a las fuerzas que surgen de la presión y la fricción.

La ecuación (2) simplemente dice que el fluido es incompresible. Para soluciones físicamente razonable, queremos asegurarnos de que $u(x,t)$ no crezca tan grande como $|x| \longrightarrow \infty$. Por lo tanto, restringiremos la atención a las fuerzas f y las condiciones iniciales u^0 que satisfacen:

(4) $|\partial_x^{\propto} u^0(x)| \leq C_{\propto K}(1+|x|)^{-K}$ $en\ R^n\ para\ cualquier\ \propto y\ K$

(5) $|\partial_x^{\propto}\,\partial_t^m f(x,t)|$
$\leq C_{\propto mK}(1+|x|)^{-K}\ en\ R^n$
$\times [0,\infty)\ para\ cualquier\ \propto, m, K$

La solución de (1), (2), (3) es físicamente razonable solo si satisface

(6) $p, u \in C^{\infty}\ (R^n \times [0,\infty))$

(7) $\int_{R^n} |u(x,t)|^2 dx < C\quad para\ todo\ t$
$\geq 0\quad (Energía\ acotada)$

3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

La metodología para solucionar el problema es resolverlo primero para tres dimensiones o $(x \in R^3, t \geq 0)$ y después generalizar la solución para *n* dimensiones o $(x \in R^n, t \geq 0)$.

3.1. Solución del problema para tres dimensiones

Dadas las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$1) \ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = v \, \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t) \qquad (x \in R^n, t \geq 0),$$

$$2) \quad div\, u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (x \in R^n, t \geq 0)$$

Se solucionará primero para $x \in R^3, t \geq 0$, es decir:

$$u(x,t) = u_i(x,t) = \big(u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)\big)$$

Para i=1, en la dirección j[1]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = v \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x_1} + f_1 \qquad \text{ec. (1.1)}$$

Para i=2, en la dirección j^2

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\left(u_1\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2}+u_3\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)=v\ \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial x_2}+f_2 \qquad \text{ec. (1.2)}$$

Para i=3, en la dirección j^3

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+\left(u_1\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1}+u_2\ \frac{\partial u_3}{\partial x_2}+u_3\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)=v\ \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial x_3}+f_3 \qquad \text{ec. (1.3)}$$

Sumando las ecuaciones: 1.1), 1.2) y 1.3)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t}j^1+\frac{\partial u_2}{\partial t}j^2+\frac{\partial u_3}{\partial t}j^3 & \\
&+\left(u_1\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}j^1+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}j^2+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}j^3\right)\right.\\
&+u_2\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}j^1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}j^2+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}j^3\right)\\
&\left.+u_3\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}j^1+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}j^2+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}j^3\right)\right)\\
&=v\ \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}j^1+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}j^2+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}j^3\right)\right.\\
&+\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}j^1+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}j^2+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}j^3\right)\\
&\left.+\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}j^1+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}j^2+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}j^3\right)\right)\\
&-\ \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}j^1+\frac{\partial p}{\partial x_2}j^2+\frac{\partial p}{\partial x_3}j^3\right)+(f_1,f_2,f_3)
\end{aligned}$$

Identificando los vectores y operaciones:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} j^1 + \frac{\partial u_2}{\partial t} j^2 + \frac{\partial u_3}{\partial t} j^3$$
$$+ \left(u_1 \ \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 j^1 + u_2 j^2 + u_3 j^3) \right.$$
$$+ u_2 \ \frac{\partial}{\partial x_2} (u_1 j^1 + u_2 j^2 + u_3 j^3)$$
$$\left. + u_3 \ \frac{\partial}{\partial x_3} (u_1 j^1 + u_2 j^2 + u_3 j^3) \right)$$
$$= v \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (u_1 j^1 + u_2 j^2 + u_3 j^3) \right.$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (u_1 j^1 + u_2 j^2 + u_3 j^3)$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (u_1 j^1 + u_2 j^2 + u_3 j^3) \right)$$
$$- \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} j^1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} j^2 + \frac{\partial p}{\partial x_3} j^3 \right) + (f_1, f_2, f_3)$$

Expresándolo de forma vectorial, es decir si $\boldsymbol{u} = (u_1 j^1 + u_2 j^2 + u_3 j^3)$, entonces se tiene que:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \left(u_1 \ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + u_2 \ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_2} + u_3 \ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_3} \right)$$
$$= v \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_3^2} \right) - \ \nabla p + F$$

Identificando el producto punto entre los vectores

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (u_1 j^1 + u_2 j^2 + u_3 j^3) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} j^1 + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_2} j^2 + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_3} j^3 \right)$$
$$= v \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \boldsymbol{u} - \nabla p + F$$

Expresando la ecuación en forma vectorial:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = v\, \nabla^2 \boldsymbol{u} - \nabla p + F$$

$$v\, \nabla^2 \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \nabla p - F \quad \text{ec. (1.a)}$$

En la actualidad existen muchos estudios o referentes teóricos sobre las ecuaciones de Navier-Stokes, todos encaminados a describir o sugerir situaciones para encontrar una solución general de dichas ecuaciones, como por ejemplo:

- Según Bertozzi y Majda (2002) algunos grupos de simetría elementales para soluciones de las Ecuaciones de Navier-Stokes. Sea u, p una solución para las ecuaciones de Navier-Stokes. Entonces las siguiente transformaciones también producen soluciones como es el de la Invarianza galileana, la cual dice para cualquier vector de velocidad constante $c \in R^n$, $u_c(x,t) = u\,(x - ct, t) + c$ y $p_c(x,t) = p\,(x - ct, t) + c$. Lo que se conoce como un par de soluciones

- Caffarelli, Kohn, y Nirenberg (1982), en el artículo titulado "Regularidad parcial de soluciones débiles adecuadas de las ecuaciones de Navier-Stokes", estudio el comportamiento de soluciones débiles de las incompresibles ecuaciones de Navier-Stoke en tres dimensiones o espaciales con viscosidad unitaria.

- O. Ladyzhenskaya (1969) trabajo sobre ecuaciones diferenciales parciales (especialmente el problema 19 de Hilbert) y la dinámica de fluidos. Ella proporcionó las primeras pruebas rigurosas de la convergencia de un método de diferencias finitas para las ecuaciones de Navier-Stokes. La autora piensa las cuestiones de su existencia y singularidad cuando satisface las condiciones de frontera apropiadas. Para este propósito, ella extiende la clase de funciones permisibles de la clase infinitamente diferenciable (soluciones clásicas) a una clase de funciones generalizadas definidas en el sentido distributivo. Por lo tanto, la existencia de una solución en la nueva clase es una condición necesaria pero no suficiente para la existencia en el sentido clásico.

- J. Leray (1934). En su obra titulada "Sur Le Mouvemeblt D'ubl Liouide Visoueux Emplissant L'espace", afirma que es muy notable que cada solución turbulenta satisfaga en realidad las ecuaciones de Navier, excepto en ciertos momentos, irregularidad; estos períodos constituyen un conjunto cerrado de medida cero; a estos solo se verifican tiempos de condiciones de continuidad extremadamente amplias. Una solución turbulenta, por lo tanto, tiene la siguiente estructura: consiste en una sucesión de soluciones regulares. Finalmente se menciona dos hechos que son: Nada permite afirmar la singularidad de la solución turbulenta que corresponde a un estado inicial dado, y que la solución que corresponde a un estado inicial suficientemente próximo al resto. nunca se vuelve irregular.

- F.-H. Lin (1998), dio a conocer una nueva prueba independiente de los teoremas de regularidad parcial para soluciones de ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles en tres dimensiones, la cual se caractierizó por ser directa y sencilla, estos resultados se debieron originalmente a Scheffer y Caffarelli, Kohn y Nirenberg.

- V. Scheffer (1976), considero la relación entre los problemas de perturbación singular y la teoría de semigrupos para el operador lineal, con énfasis en el caso cuando el operador no perturbado es "hiperbólico". Concluyo que en general, el problema de la perturbación singular puede considerarse como el problema de la convergencia resolutiva.

Para solucionar la ecuación (1.a) se utilizará el principio de superposición para ecuaciones diferenciales no homogéneas. Esto implica realizar las dos siguientes etapas:

i) Determinar la función complementaria o homogénea, la cual se connotará de la siguiente forma: u_c ó u_h .

ii) Establecer cualquier solución particular u_p, de la ecuación no homogénea.

Una vez realizados los pasos anteriores la solución general de la ecuación (1.a) es:

$$u = u_h + u_p$$

La función complementaria u_h es la solución general de la ecuación homogénea asociada a:

$$v\, \nabla^2 \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \;\; 0 \quad \text{ec. (1.b)}$$

Para encontrar la solución complementaria u_h, se proponen las siguiente funciones:

$$u_h(x,t) = \Big(A_{1,2}(\,|x_1 \pm t| + 1)\Big)^{-1}\, j^1 + \Big(B_{1,2}\,(\,|x_2 \pm t| + 1)\Big)^{-1}\, j^2 + \Big(C_{1,2}\,(\,|x_3 \pm t| + 1)\Big)^{-1}\, j^3$$

Esto es implica dos soluciones, es decir:

$$u_{h1}(x,t) = \frac{1}{A_1(\,|x_1 + t| + 1)}\, j^1 + \frac{1}{B_1\,(\,|x_2 + t| + 1)}\, j^2 + \frac{1}{C_1\,(\,|x_3 + t| + 1)}\, j^3$$

$$u_{h2}(x,t) = \frac{1}{A_2(\,|x_1 - t| + 1)}\, j^1 + \frac{1}{B_2\,(\,|x_2 - t| + 1)}\, j^2 + \frac{1}{C_2\,(\,|x_3 - t| + 1)}\, j^3$$

Caso 1. Cuando la solución propuesta es de la forma:

$$u_{h1}(x,t) = \frac{1}{A_1(\,|x_1 + t| + 1)}\, j^1 + \frac{1}{B_1\,(\,|x_2 + t| + 1)}\, j^2 + \frac{1}{C_1\,(\,|x_3 + t| + 1)}\, j^3$$

La cual se analizará teniendo en cuenta el concepto de valor absoluto:

c1.i) $si\ \ (x_1 + t)\ \geq 0, (x_2 + t)\ \geq 0\ \ y\ \ (x_3 + t)\ \geq 0$

$$u_{h11}(x,t) = \frac{1}{A_1(\,x_1 + t + 1)}\, j^1 + \frac{1}{B_1\,(x_2 + t + 1)}\, j^2 + \frac{1}{C_1\,(\,x_3 + t + 1)}\, j^3$$

c1.ii) $si\ \ (x_1 + t)\ \geq 0, (x_2 + t)\ \geq 0\ \ y\ \ (x_3 + t) < 0$

$$u_{h12}(x,t) = \frac{1}{A_1(\,x_1 + t + 1)}\, j^1 + \frac{1}{B_1\,(x_2 + t + 1)}\, j^2 + \frac{1}{C_1\,(-(x_3 + t) + 1)}\, j^3$$

c1.iii) $si\ \ (x_1+t)\ \geq 0, (x_2+t)<0\ \ y\ \ (x_3+t)\geq 0$

$$u_{h13}(x,t)=\frac{1}{A_1(\,x_1+t+1)}\,j^1+\frac{1}{B_1\,(-(x_2+t)+1)}\,j^2+\frac{1}{C_1\,(\,x_3+t+1)}\,j^3$$

c1.iv) $si\ \ (x_1+t)\ \geq 0, (x_2+t)<0\ \ y\ \ (x_3+t)<0$

$$u_{h14}(x,t)=\frac{1}{A_1(\,x_1+t+1)}\,j^1+\frac{1}{B_1\,(-(x_2+t)+1)}\,j^2+\frac{1}{C_1\,(-(x_3+t)+1)}\,j^3$$

c1.v) $si\ \ (x_1+t)<0, (x_2+t)\geq 0\ \ y\ \ (x_3+t)\geq 0$

$$u_{h15}(x,t)=\frac{1}{A_1(-(\,x_1+t)+1)}\,j^1+\frac{1}{B_1\,(x_2+t+1)}\,j^2+\frac{1}{C_1\,(\,x_3+t+1)}\,j^3$$

c1.vi) $si\ \ (x_1+t)<0, (x_2+t)\geq 0\ \ y\ \ (x_3+t)<0$

$$u_{h16}(x,t)=\frac{1}{A_1(-(\,x_1+t)+1)}\,j^1+\frac{1}{B_1\,(x_2+t+1)}\,j^2+\frac{1}{C_1\,(-(x_3+t)+1)}\,j^3$$

c1.vii) $si\ \ (x_1+t)<0, (x_2+t)<0\ \ y\ \ (x_3+t)\geq 0$

$$u_{h16}(x,t) = \frac{1}{A_1(-(\, x_1 + t) + 1)}\, j^1 + \frac{1}{B_1\,(-(x_2 + t) + 1)}\, j^2 + \frac{1}{C_1\,(\, x_3 + t + 1)}\, j^3$$

c1.viii) $si\ (x_1 + t) < 0, (x_2 + t) < 0\ \ y\ \ (x_3 + t) < 0$

$$u_{h16}(x,t) = \frac{1}{A_1(-(\, x_1 + t) + 1)}\, j^1 + \frac{1}{B_1\,(-(x_2 + t) + 1)}\, j^2 + \frac{1}{C_1\,(-(x_3 + t) + 1)}\, j^3$$

Sustituyendo en la ecuación (1.b) la solución propuesta en c1.i) se obtiene el siguiente resultado:

$$\left[\frac{2\,v}{A_1\,(x_1 + t + 1)^3} + \frac{1}{{A_1}^2\,(x_1 + t + 1)^3} + \frac{1}{A_1\,(x_1 + t + 1)^2}\right]\ j^1 + \left[\frac{2\,v}{B_1\,(x_2 + t + 1)^3} + \frac{1}{{B_1}^2\,(x_2 + t + 1)^3} + \frac{1}{B_1\,(x_2 + t + 1)^2}\right]\ j^2 + \left[\frac{2\,v}{C_1\,(x_3 + t + 1)^3} + \frac{1}{{C_1}^2\,(x_3 + t + 1)^3} + \frac{1}{C_1\,(x_3 + t + 1)^2}\right]\ j^3 = 0$$

Igualando las componentes vectoriales se tiene:

$$\frac{2\,v}{A_1\,(x_1+t+1)^3}+\frac{1}{{A_1}^2\,(x_1+t+1)^3}+\frac{1}{A_1\,(x_1+t+1)^2}=0 \quad \text{ec. (1.b.1)}$$

$$\frac{2\,v}{B_1\,(x_2+t+1)^3}+\frac{1}{{B_1}^2\,(x_2+t+1)^3}+\frac{1}{B_1\,(x_2+t+1)^2}=0 \quad \text{ec. (1.b.2)}$$

$$\frac{2\,v}{C_1\,(x_3+t+1)^3}+\frac{1}{{C_1}^2\,(x_3+t+1)^3}+\frac{1}{C_1\,(x_3+t+1)^2}=0 \quad \text{ec. (1.b.3)}$$

De la ecuación (1.b.1) se tiene que:

$$A_1=-\frac{1}{2v+x_1+t+1}$$

De la ecuación (1.b.2) se tiene que:

$$B_1=-\frac{1}{2v+x_2+t+1}$$

De la ecuación (1.b.3) se tiene que:

$$C_1=-\frac{1}{2v+x_3+t+1}$$

Sustituyendo en la solución propuesta:

$$u_{h1}(x,t)=\frac{1}{A_1(\,|x_1+t|+1)}\;j^1+\frac{1}{B_1\,(\,|x_2+t|+1)}\;j^2 \\ +\frac{1}{C_1\,(\,|x_3+t|+1)}\;j^3$$

Se obtiene:

$$u_{h1}(x,t) = -\frac{2v+x_1+t+1}{|x_1+t|+1}\, j^1 - \frac{2v+x_2+t+1}{|x_2+t|+1}\, j^2 - \frac{2v+x_3+t+1}{|x_3+t|+1}\, j^3$$

ec. (1.b.4)

Verificaremos la solución homogénea anterior, para ello se sustituirá la solución $u_{h1}(x,t)$ en la ecuación (1.b), $v\,\nabla^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} =$ 0.

Calculamos primero $v\,\nabla^2\boldsymbol{u}$

$$\begin{aligned} v\,\nabla^2\boldsymbol{u} &= v\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\boldsymbol{u} \\ &= v\left(\frac{2}{(x_1+t+1)^2} - \frac{2\,(2v+x_1+t+1)}{(x_1+t+1)^3}\right) j^1 \\ &+ v\left(\frac{2}{(x_2+t+1)^2} - \frac{2\,(2v+x_2+t+1)}{(x_2+t+1)^3}\right) j^2 \\ &+ v\left(\frac{2}{(x_3+t+1)^2} - \frac{2\,(2v+x_3+t+1)}{(x_3+t+1)^3}\right) j^3 \end{aligned}$$

Encontramos $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = (u_1 j^1 + u_2 j^2 + u_3 j^3)\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} j^1 + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_2} j^2 + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_3} j^3\right)$$

$$= \left(\frac{2v + x_1 + t + 1}{x_1 + t + 1}\left(\frac{1}{x_1 + t + 1} + \frac{2v + x_1 + t + 1}{(x_1 + t + 1)^2}\right)\right) j^1$$

$$+ \left(\frac{2v + x_2 + t + 1}{x_2 + t + 1}\left(\frac{1}{x_2 + t + 1} + \frac{2v + x_2 + t + 1}{(x_2 + t + 1)^2}\right)\right) j^2$$

$$+ \left(\frac{2v + x_3 + t + 1}{x_3 + t + 1}\left(\frac{1}{x_3 + t + 1} + \frac{2v + x_3 + t + 1}{(x_3 + t + 1)^2}\right)\right) j^3$$

Por último hallamos $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \left(-\frac{1}{x_1 + t + 1} + \frac{2v + x_1 + t + 1}{(x_1 + t + 1)^2}\right) j^1 + \left(-\frac{1}{x_2 + t + 1} + \frac{2v + x_2 + t + 1}{(x_2 + t + 1)^2}\right) j^2 + \left(-\frac{1}{x_3 + t + 1} + \frac{2v + x_3 + t + 1}{(x_3 + t + 1)^2}\right) j^3$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la ec. 1.b:

$$v\,\nabla^2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}=$$

$$=\Bigg[v\left(\frac{2}{(x_1+t+1)^2}-\frac{2\,(2v+x_1+t+1)}{(x_1+t+1)^3}\right)j^1$$

$$+\ v\left(\frac{2}{(x_2+t+1)^2}-\frac{2\,(2v+x_2+t+1)}{(x_2+t+1)^3}\right)j^2$$

$$+\ v\left(\frac{2}{(x_3+t+1)^2}-\frac{2\,(2v+x_3+t+1)}{(x_3+t+1)^3}\right)j^3\Bigg]$$

$$-\Bigg[\Bigg(\frac{2v+x_1+t+1}{x_1+t+1}\Bigg(\frac{1}{x_1+t+1}$$

$$+\frac{2v+x_1+t+1}{(x_1+t+1)^2}\Bigg)\Bigg)j^1$$

$$+\Bigg(\frac{2v+x_2+t+1}{x_2+t+1}\Bigg(\frac{1}{x_2+t+1}$$

$$+\frac{2v+x_2+t+1}{(x_2+t+1)^2}\Bigg)\Bigg)j^2$$

$$+\Bigg(\frac{2v+x_3+t+1}{x_3+t+1}\Bigg(\frac{1}{x_3+t+1}$$

$$+\frac{2v+x_3+t+1}{(x_3+t+1)^2}\Bigg)\Bigg)j^3\Bigg]$$

$$-\Bigg[\left(-\frac{1}{x_1+t+1}+\frac{2v+x_1+t+1}{(x_1+t+1)^2}\right)j^1$$

$$+\left(-\frac{1}{x_2+t+1}+\frac{2v+x_2+t+1}{(x_2+t+1)^2}\right)j^2$$

$$+\left(-\frac{1}{x_3+t+1}+\frac{2v+x_3+t+1}{(x_3+t+1)^2}\right)j^3\Bigg]$$

$$=\ 0\,j^1+\ 0\,j^2+\ 0\,j^3\ =0$$

De igual forma si se sustituye en la ecuación (1.b) las soluciones propuestas en c1.ii), c1.iii), c1.iv), c1.v), c1.vi), c1.vii) y c1.viii) se obtienen las siguientes soluciones:

c1.i) $si\ \ (x_1+t)\ \geq 0, (x_2+t)\ \geq 0\ \ y\ \ (x_3+t)\ \geq 0$

$$u_{h11}(x,t) = -\frac{2v+x_1+t+1}{|x_1+t|+1}\,j^1 - \frac{2v+x_2+t+1}{|x_2+t|+1}\,j^2 - \frac{2v+x_3+t+1}{|x_3+t|+1}\,j^3$$

c1.ii) $si\ \ (x_1+t)\ \geq 0, (x_2+t)\ \geq 0\ \ y\ \ (x_3+t) < 0$

$$u_{h12}(x,t) = -\frac{2v+x_1+t+1}{|x_1+t|+1}\,j^1 - \frac{2v+x_2+t+1}{|x_2+t|+1}\,j^2 + \frac{2v+x_3+t-1}{|x_3+t|+1}\,j^3$$

c1.iii) $si\ \ (x_1+t)\ \geq 0, (x_2+t) < 0\ \ y\ \ (x_3+t) \geq 0$

$$u_{h13}(x,t) = -\frac{2v+x_1+t+1}{|x_1+t|+1}\,j^1 + \frac{2v+x_2+t-1}{|x_2+t|+1}\,j^2 - \frac{2v+x_3+t+1}{|x_3+t|+1}\,j^3$$

c1.iv) $si\ \ (x_1+t)\ \geq 0, (x_2+t) < 0\ \ y\ \ (x_3+t) < 0$

$$u_{h14}(x,t) = -\frac{2v + x_1 + t + 1}{|x_1 + t| + 1}\, j^1 + \frac{2v + x_2 + t - 1}{|x_2 + t| + 1}\, j^2 - \frac{2v + x_3 + t - 1}{|x_3 + t| + 1}\, j^3$$

c1.v) $si\ \ (x_1 + t) < 0, (x_2 + t) \geq 0\ \ y\ \ (x_3 + t) \geq 0$

$$u_{h15}(x,t) = \frac{2v + x_1 + t - 1}{|x_1 + t| + 1}\, j^1 - \frac{2v + x_2 + t + 1}{|x_2 + t| + 1}\, j^2 - \frac{2v + x_3 + t + 1}{|x_3 + t| + 1}\, j^3$$

c1.vi) $si\ \ (x_1 + t) < 0, (x_2 + t) \geq 0\ \ y\ \ (x_3 + t) < 0$

$$u_{h16}(x,t) = \frac{2v + x_1 + t - 1}{|x_1 + t| + 1}\, j^1 - \frac{2v + x_2 + t + 1}{|x_2 + t| + 1}\, j^2 + \frac{2v + x_3 + t - 1}{|x_3 + t| + 1}\, j^3$$

c1.vii) $si\ \ (x_1 + t) < 0, (x_2 + t) < 0\ \ y\ \ (x_3 + t) \geq 0$

$$u_{h17}(x,t) = \frac{2v + x_1 + t - 1}{|x_1 + t| + 1}\, j^1 + \frac{2v + x_2 + t - 1}{|x_2 + t| + 1}\, j^2 - \frac{2v + x_3 + t + 1}{|x_3 + t| + 1}\, j^3$$

c1.viii) $si\ (x_1 + t) < 0, (x_2 + t) < 0\ \ y\ \ (x_3 + t) < 0$

$$u_{h18}(x,t) = \frac{2v + x_1 + t - 1}{|x_1 + t| + 1}\, j^1 + \frac{2v + x_2 + t - 1}{|x_2 + t| + 1}\, j^2 + \frac{2v + x_3 + t - 1}{|x_3 + t| + 1}\, j^3$$

La función general que recoge todas las soluciones del caso 1 es:

$$u_{h1}(x,t) = \left[-\frac{(-1)^{s_{11}}(2v + x_1 + t) - (-1)^{s_{11}+1}(1)}{|x_1 + t| + 1}\, C_{11}\, j^1 - \frac{(-1)^{s_{12}}(2v + x_2 + t) - (-1)^{s_{12}+1}(1)}{|x_2 + t| + 1}\, C_{12}\, j^2 - \frac{(-1)^{s_{13}}(2v + x_3 + t) - (-1)^{s_{13}+1}(1)}{|x_3 + t| + 1}\, C_{13}\, j^3\right]$$

Con:

$$s_{11} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_1 + t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_1 + t) < 0 \end{cases} \qquad s_{12} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_2 + t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_2 + t) < 0 \end{cases}$$

$$s_{13} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_3 + t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_3 + t) < 0 \end{cases}$$

Caso 2. Cuando la solución propuesta es de la forma:

$$u_{h2}(x,t) = \frac{1}{A_2(\,|x_1 - t| + 1)}\, j^1 + \frac{1}{B_2\,(\,|x_2 - t| + 1)}\, j^2 + \frac{1}{C_2\,(\,|x_3 - t| + 1)}\, j^3$$

La cual se analizará teniendo en cuenta el concepto de valor absoluto:

c2.i) $si \quad (x_1 - t) \geq 0, (x_2 - t) \geq 0 \;\; y \;\; (x_3 - t) \geq 0$

$$u_{h11}(x,t) = \frac{1}{A_2(\,x_1 - t + 1)}\, j^1 + \frac{1}{B_2\,(x_2 - t + 1)}\, j^2 + \frac{1}{C_2\,(\,x_3 - t + 1)}\, j^3$$

c2.ii) $si \;\; (x_1 - t) \geq 0, (x_2 - t) \geq 0 \;\; y \;\; (x_3 - t) < 0$

$$u_{h12}(x,t) = \frac{1}{A_2(\,x_1 - t + 1)}\, j^1 + \frac{1}{B_2\,(x_2 - t + 1)}\, j^2 + \frac{1}{C_2\,(-(x_3 - t) + 1)}\, j^3$$

c2.iii) $si \;\; (x_1 - t) \geq 0, (x_2 - t) < 0 \;\; y \;\; (x_3 - t) \geq 0$

$$u_{h13}(x,t) = \frac{1}{A_2(\,x_1 - t + 1)}\, j^1 + \frac{1}{B_2\,(-(x_2 - t) + 1)}\, j^2 + \frac{1}{C_2\,(\,x_3 - t + 1)}\, j^3$$

c2.iv) $si\ (x_1 - t)\ \geq 0, (x_2 - t) < 0\ \ y\ \ (x_3 - t) < 0$

$$u_{h14}(x,t) = \frac{1}{A_2(\,x_1 - t + 1)}\,j^1 + \frac{1}{B_2\,(-(x_2 - t) + 1)}\,j^2 + \frac{1}{C_2\,(-(x_3 - t) + 1)}\,j^3$$

c2.v) $si\ (x_1 - t) < 0, (x_2 - t) \geq 0\ \ y\ \ (x_3 - t) \geq 0$

$$u_{h15}(x,t) = \frac{1}{A_2(-(\,x_1 - t) + 1)}\,j^1 + \frac{1}{B_2\,(x_2 - t + 1)}\,j^2 + \frac{1}{C_2\,(\,x_3 - t + 1)}\,j^3$$

c2.vi) $si\ \ (x_1 - t) < 0, (x_2 - t) \geq 0\ \ y\ \ (x_3 - t) < 0$

$$u_{h16}(x,t) = \frac{1}{A_2(-(\,x_1 - t) + 1)}\,j^1 + \frac{1}{B_2\,(x_2 - t + 1)}\,j^2 + \frac{1}{C_2\,(-(x_3 - t) + 1)}\,j^3$$

c2.vii) $si\ \ (x_1 - t) < 0, (x_2 - t) < 0\ \ y\ \ (x_3 - t) \geq 0$

$$u_{h17}(x,t) = \frac{1}{A_2(-(\,x_1 - t) + 1)}\,j^1 + \frac{1}{B_2\,(-(x_2 - t) + 1)}\,j^2 + \frac{1}{C_2\,(\,x_3 - t + 1)}\,j^3$$

c2.viii) $si\ \ (x_1 - t) < 0, (x_2 - t) < 0\ \ y\ \ (x_3 - t) < 0$

$$u_{h18}(x,t) = \frac{1}{A_2(-(\,x_1 - t) + 1)}\, j^1 + \frac{1}{B_2\,(-(x_2 - t) + 1)}\, j^2 + \frac{1}{C_2\,(-(x_3 - t) + 1)}\, j^3$$

Sustituyendo en la ecuación (1.b) la solución propuesta en c2.i) se obtiene el siguiente resultado:

$$\left[\frac{2\,v}{A_2\,(x_1 - t + 1)^3} + \frac{1}{{A_2}^2\,(x_1 - t + 1)^3} - \frac{1}{A_2\,(x_1 - t + 1)^2}\right]\, j^1 + \left[\frac{2\,v}{B_2\,(x_2 - t + 1)^3} + \frac{1}{{B_2}^2\,(x_2 - t + 1)^3} - \frac{1}{B_2\,(x_2 - t + 1)^2}\right]\, j^2 + \left[\frac{2\,v}{C_2\,(x_3 - t + 1)^3} + \frac{1}{{C_2}^2\,(x_3 - t + 1)^3} - \frac{1}{C_2\,(x_3 - t + 1)^2}\right]\, j^3 = 0$$

Igualando las componentes vectoriales se tiene:

$$\frac{2\,v}{A_2\,(x_1 - t + 1)^3} + \frac{1}{{A_2}^2\,(x_1 - t + 1)^3} - \frac{1}{A_2\,(x_1 - t + 1)^2} = 0 \quad \text{ec. (1.b.4)}$$

$$\frac{2\,v}{B_2\,(x_2 - t + 1)^3} + \frac{1}{{B_2}^2\,(x_2 - t + 1)^3} - \frac{1}{B_2\,(x_2 - t + 1)^2} = 0 \quad \text{ec. (1.b.5)}$$

$$\frac{2\,v}{C_2\,(x_3 - t + 1)^3} + \frac{1}{{C_2}^2\,(x_3 - t + 1)^3} - \frac{1}{C_2\,(x_3 - t + 1)^2} = 0 \quad \text{ec. (1.b.6)}$$

De la ecuación (1.b.4) se tiene que:

$$A_2 = \frac{1}{-2v + x_1 - t + 1}$$

De la ecuación (1.b.5) se tiene que:

$$B_2 = \frac{1}{-2v + x_2 - t + 1}$$

De la ecuación (1.b.6) se tiene que:

$$C_2 = -\frac{1}{2v - x_3 + t - 1}$$

Sustituyendo en la solución propuesta:

$$u_{h2}(x,t) = \frac{1}{A_2(\,|x_1 - t| + 1)}\, j^1 + \frac{1}{B_2\,(\,|x_2 - t| + 1)}\, j^2 + \frac{1}{C_2\,(\,|x_3 - t| + 1)}\, j^3$$

Se obtiene:

$$u_{h2}(x,t) = \frac{-2v+x_1-t+1}{|x_1-t|+1}\, j^1 + \frac{-2v+x_2-t+1}{|x_2-t|+1}\, j^2 + \frac{-2v+x_3-t+1}{|x_3-t|+1}\, j^3$$

ec. (1.b.4)

Verificaremos la solución homogénea anterior, para ello se sustituirá la solución $u_{h2}(x,t)$ en la ecuación (1.b), $v\,\nabla^2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}=\ 0.$

Calculamos primero $v\,\nabla^2\boldsymbol{u}$

$$v\,\nabla^2\boldsymbol{u}=v\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\boldsymbol{u}$$

$$=v\left(-\frac{2}{(x_1-t+1)^2}+\frac{2\,(-2v+x_1-t+1)}{(x_1-t+1)^3}\right)j^1$$

$$+\ v\left(-\frac{2}{(x_2-t+1)^2}+\frac{2\,(-2v+x_2-t+1)}{(x_2-t+1)^3}\right)j^2$$

$$+\ v\left(-\frac{2}{(x_3-t+1)^2}+\frac{2\,(-2v+x_3-t+1)}{(x_3-t+1)^3}\right)j^3$$

Encontramos $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=(u_1j^1+u_2j^2+u_3j^3)\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1}j^1+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_2}j^2+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_3}j^3\right)$$

$$=\left(\frac{-2v+x_1-t+1}{x_1-t+1}\left(\frac{1}{x_1-t+1}-\frac{-2v+x_1-t+1}{(x_1-t+1)^2}\right)\right)j^1$$

$$+\left(\frac{-2v+x_2-t+1}{x_2-t+1}\left(\frac{1}{x_2-t+1}-\frac{-2v+x_2-t+1}{(x_2-t+1)^2}\right)\right)j^2$$

$$+\left(\frac{-2v+x_3-t+1}{x_3-t+1}\left(\frac{1}{x_3-t+1}-\frac{-2v+x_3-t+1}{(x_3-t+1)^2}\right)\right)j^3$$

Por último hallamos $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \left(-\frac{1}{x_1 - t + 1} + \frac{-2v + x_1 - t + 1}{(x_1 - t + 1)^2}\right) j^1 + \left(-\frac{1}{x_2 - t + 1} + \frac{-2v + x_2 - t + 1}{(x_2 - t + 1)^2}\right) j^2 + \left(-\frac{1}{x_3 - t + 1} + \frac{-2v + x_3 - t + 1}{(x_3 - t + 1)^2}\right) j^3$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la ec. 1.b:

$$\begin{aligned}
v\,\nabla^2 \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} =& \\
= \Bigg[v \left(-\frac{2}{(x_1 - t + 1)^2} + \frac{2\,(-2v + x_1 - t + 1)}{(x_1 - t + 1)^3}\right) j^1 &\\
+ v \left(-\frac{2}{(x_2 - t + 1)^2} + \frac{2\,(-2v + x_2 - t + 1)}{(x_2 - t + 1)^3}\right) j^2 &\\
+ v \left(-\frac{2}{(x_3 - t + 1)^2} + \frac{2\,(-2v + x_3 - t + 1)}{(x_3 - t + 1)^3}\right) j^3 \Bigg] &\\
- \Bigg[\left(\frac{-2v + x_1 - t + 1}{x_1 - t + 1} \left(\frac{1}{x_1 - t + 1} - \frac{-2v + x_1 - t + 1}{(x_1 - t + 1)^2}\right)\right) j^1 &\\
+ \left(\frac{-2v + x_2 - t + 1}{x_2 - t + 1} \left(\frac{1}{x_2 - t + 1} - \frac{-2v + x_2 - t + 1}{(x_2 - t + 1)^2}\right)\right) j^2 &\\
+ \left(\frac{-2v + x_3 - t + 1}{x_3 - t + 1} \left(\frac{1}{x_3 - t + 1} - \frac{-2v + x_3 - t + 1}{(x_3 - t + 1)^2}\right)\right) j^3 \Bigg] &\\
- \Bigg[\left(-\frac{1}{x_1 - t + 1} + \frac{-2v + x_1 - t + 1}{(x_1 - t + 1)^2}\right) j^1 &\\
+ \left(-\frac{1}{x_2 - t + 1} + \frac{-2v + x_2 - t + 1}{(x_2 - t + 1)^2}\right) j^2 &\\
+ \left(-\frac{1}{x_3 - t + 1} + \frac{-2v + x_3 - t + 1}{(x_3 - t + 1)^2}\right) j^3 \Bigg] &\\
= \; 0\, j^1 + 0\, j^2 + 0\, j^3 = 0 &
\end{aligned}$$

De igual forma si se sustituye en la ecuación (1.b) las soluciones propuestas en c2.ii), c2.iii), c2.iv), c2.v), c2.vi), c2.vii) y c2.viii) se obtienen las siguientes soluciones:

c2.i) $si \quad (x_1 - t) \geq 0, (x_2 - t) \geq 0 \ y \ (x_3 - t) \geq 0$

$$u_{h21}(x,t) = \frac{-2v + x_1 - t + 1}{|x_1 - t| + 1}\, j^1 + \frac{-2v + x_2 - t + 1}{|x_2 - t| + 1}\, j^2 + \frac{-2v + x_3 - t + 1}{|x_3 - t| + 1}\, j^3$$

c2.ii) $si \ (x_1 - t) \geq 0, (x_2 - t) \geq 0 \ y \ (x_3 - t) < 0$

$$u_{h22}(x,t) = \frac{-2v + x_1 - t + 1}{|x_1 - t| + 1}\, j^1 + \frac{-2v + x_2 - t + 1}{|x_2 - t| + 1}\, j^2 + \frac{2v - x_3 + t + 1}{|x_3 - t| + 1}\, j^3$$

c2.iii) $si \ (x_1 - t) \geq 0, (x_2 - t) < 0 \ y \ (x_3 - t) \geq 0$

$$u_{h23}(x,t) = \frac{-2v + x_1 - t + 1}{|x_1 - t| + 1}\, j^1 + \frac{2v - x_2 + t + 1}{|x_2 - t| + 1}\, j^2 + \frac{-2v + x_3 - t + 1}{|x_3 - t| + 1}\, j^3$$

c2.iv) $si \ (x_1 - t) \geq 0, (x_2 - t) < 0 \ y \ (x_3 - t) < 0$

$$u_{h24}(x,t) = \frac{-2v + x_1 - t + 1}{|x_1 - t| + 1}\ j^1 + \frac{2v - x_2 + t + 1}{|x_2 - t| + 1}\ j^2 + \frac{2v - x_3 + t + 1}{|x_3 - t| + 1}\ j^3$$

c2.v) $si\ (x_1 - t) < 0, (x_2 - t) \geq 0\ \ y\ \ (x_3 - t) \geq 0$

$$u_{h25}(x,t) = \frac{2v - x_1 + t + 1}{|x_1 - t| + 1}\ j^1 + \frac{-2v + x_2 - t + 1}{|x_2 - t| + 1}\ j^2 + \frac{-2v + x_3 - t + 1}{|x_3 - t| + 1}\ j^3$$

c2.vi) $si\ \ (x_1 - t) < 0, (x_2 - t) \geq 0\ \ y\ \ (x_3 - t) < 0$

$$u_{h26}(x,t) = \frac{2v - x_1 + t + 1}{|x_1 - t| + 1}\ j^1 + \frac{-2v + x_2 - t + 1}{|x_2 - t| + 1}\ j^2 + \frac{2v - x_3 + t + 1}{|x_3 - t| + 1}\ j^3$$

c2.vii) $si\ \ (x_1 - t) < 0, (x_2 - t) < 0\ \ y\ \ (x_3 - t) \geq 0$

$$u_{h27}(x,t) = \frac{2v - x_1 + t + 1}{|x_1 - t| + 1}\ j^1 + \frac{2v - x_2 + t + 1}{|x_2 - t| + 1}\ j^2 + \frac{-2v + x_3 - t + 1}{|x_3 - t| + 1}\ j^3$$

c2.viii) $si\ \ (x_1 - t) < 0, (x_2 - t) < 0\ \ y\ \ (x_3 - t) < 0$

$$u_{h2}(x,t) = \frac{2v - x_1 + t + 1}{|x_1 - t| + 1}\, j^1 + \frac{2v - x_2 + t + 1}{|x_2 - t| + 1}\, j^2 + \frac{2v - x_3 + t + 1}{|x_3 - t| + 1}\, j^3$$

La función general que recoge todas las soluciones del caso 2 es:

$$u_{h2}(x,t) = \left[\frac{(-1)^{s_{21}}(-2v + x_1 - t) + 1}{|x_1 - t| + 1}\, C_{21}\, j^1 + \frac{(-1)^{s_{22}}(-2v + x_2 - t) + 1}{|x_2 - t| + 1}\, C_{22}\, j^2 + \frac{(-1)^{s_{23}}(-2v + x_3 - t) + 1}{|x_3 - t| + 1}\, C_{23}\, j^3 \right]$$

Con:

$$s_{21} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_1 - t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_1 - t) < 0 \end{cases} \qquad s_{22} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_2 - t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_2 - t) < 0 \end{cases}$$

$$s_{23} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_3 - t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_3 - t) < 0 \end{cases}$$

Una vez obtenidas las soluciones de los casos 1 y 2, es decir $u_{h1}(x,t)$ y $u_{h2}(x,t)$. Se puede obtener la solución homogénea asociada a la ecuación (1.b), la cual está dada por:

$$u_h(x,t) = \left[-\frac{(-1)^{s_{11}}(2v+x_1+t)-(-1)^{s_{11}+1}(1)}{|x_1+t|+1}\ C_{11}\ j^1 - \frac{(-1)^{s_{12}}(2v+x_2+t)-(-1)^{s_{12}+1}(1)}{|x_2+t|+1}\ C_{12}\ j^2 - \frac{(-1)^{s_{13}}(2v+x_3+t)-(-1)^{s_{13}+1}(1)}{|x_3+t|+1}\ C_{13}\ j^3\right] + \left[\frac{(-1)^{s_{21}}(-2v+x_1-t)+1}{|x_1-t|+1}\ C_{21}\ j^1 + \frac{(-1)^{s_{22}}(-2v+x_2-t)+1}{|x_2-t|+1}\ C_{22}\ j^2 + \frac{(-1)^{s_{23}}(-2v+x_3-t)+1}{|x_3-t|+1}\ C_{23}\ j^3\right] \text{ ec. (1.b.9)}$$

Con:

$$s_{11} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_1+t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_1+t) < 0 \end{cases} \qquad s_{22} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_2+t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_2+t) < 0 \end{cases}$$

$$s_{23} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_3+t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_3+t) < 0 \end{cases}$$

$$s_{21} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_1-t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_1-t) < 0 \end{cases} \qquad s_{22} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_2-t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_2-t) < 0 \end{cases}$$

$$s_{23} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_3-t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_3-t) < 0 \end{cases}$$

Para encontrar la solución particular $u_p(x,t)$, se usaran funciones vectoriales que pueden tener una solución coherente acerca de la forma de u_p. En este caso del vector formado por $\nabla p - F$. Ejemplo, consideremos el vector gradiente de la presión dado por:

$\nabla p = |\nabla p| \, [\, a_1 \, x_1 \, e^{-a_1 \, x_1} \, (v \, a_1 + |\nabla p| \, e^{-a_1 \, x_1} \,) \, j^1 + a_2 \, x_2 \, e^{-a_2 \, x_2} \, (v \, a_2 + |\nabla p| \, e^{-a_2 \, x_2} \,) \; j^2 + a_3 \, x_3 \, e^{-a_3 \, x_3} \, (v \, a_3 + |\nabla p| \, e^{-a_3 \, x_3} \,) \, j^3]$ Donde a_1, a_2, a_3 son constantes. ec. (1.a.1)

El cual tiene como solución particular el vector gradiente de la presión

$$\overrightarrow{\nabla p_p} = |\nabla p| \; (e^{-a_1 \, x_1} \, j^1 + e^{-a_2 \, x_2} \, j^2 + \; e^{-\, a_3 \, x_3} \, j^3) \quad \text{ec. (1.a.2)}$$

Y el vector fuerza dado por:

$$\vec{F} = |F| \, e^{-wt} \left[\; e^{-b_1 \, x_1} \left(v \, {b_1}^2 + |F| \, b_1 \, e^{-wt-b_1 \, x_1} + w \right) j^1 + \; e^{-b_2 \, x_2} \left(v \, {b_2}^2 + |F| \, b_2 \, e^{-wt-b_2 \, x_2} + w \right) \, j^2 + e^{-b_3 \, x_3} \left(v \, {b_3}^2 + |F| \, b_3 \, e^{-wt-b_3 \, x_3} + w \right) j^3 \right] \quad \text{ec. (1.a.3)}$$

Tiene como solución particular el vector fuerza

$$\overrightarrow{F_p} = |F| \, e^{-wt} \, (e^{-b_1 \, x_1} \, j^1 + e^{-b_2 \, x_2} \, j^2 + \; e^{-\, b_3 \, x_3} \, j^3) \quad \text{ec. (1.a.4)}$$

En donde w es una constante que puede ser la $w = 2\pi f$ donde f es la frecuencia o $f = \frac{1}{T}$

La ec(1.a) queda de la forma:

$$v\, \nabla^2 \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \nabla p - F \qquad \text{ec. (1.a)}$$

$$v\, \nabla^2 \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = |\nabla p| \left[a_1\, x_1\, e^{-a_1 x_1} (v\, a_1 + |\nabla p|\, e^{-a_1 x_1})\, j^1 + a_2\, x_2\, e^{-a_2 x_2} (v\, a_2 + |\nabla p|\, e^{-a_2 x_2})\, j^2 + a_3\, x_3\, e^{-a_3 x_3} (v\, a_3 + |\nabla p|\, e^{-a_3 x_3})\, j^3 \right] - |F|\, e^{-wt} \left[e^{-b_1 x_1} \left(v\, {b_1}^2 + |F|\, b_1\, e^{-wt - b_1 x_1} + w \right) j^1 + e^{-b_2 x_2} \left(v\, {b_2}^2 + |F|\, b_2\, e^{-wt - b_2 x_2} + w \right) j^2 + e^{-b_3 x_3} \left(v\, {b_3}^2 + |F|\, b_3\, e^{-wt - b_3 x_3} + w \right) j^3 \right] \qquad \text{ec. (1.a.5)}$$

La solución particular de la forma:

$$u_p = |\nabla p| \left(e^{-a_1 x_1} j^1 + e^{-a_2 x_2} j^2 + e^{-a_3 x_3} j^3 \right) - |F|\, e^{-wt} \left(e^{-b_1 x_1} j^1 + e^{-b_2 x_2} j^2 + e^{-b_3 x_3} j^3 \right) \qquad \text{ec. (1.a.6)}$$

Por último, podemos afirmar que la ecuación:

$$v\, \nabla^2 \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \nabla p - F \qquad \text{ec. (1.a)}$$

Tiene por solución a:

$$u(x,t) = u_h + u_p = \left[-\frac{(-1)^{s_{11}}(2v + x_1 + t) - (-1)^{s_{11}+1}(1)}{|x_1 + t| + 1}\, C_{11}\, j^1 - \frac{(-1)^{s_{12}}(2v + x_2 + t) - (-1)^{s_{12}+1}(1)}{|x_2 + t| + 1}\, C_{12}\, j^2 - \frac{(-1)^{s_{13}}(2v + x_3 + t) - (-1)^{s_{13}+1}(1)}{|x_3 + t| + 1}\, C_{13}\, j^3 \right] + \left[\frac{(-1)^{s_{21}}(-2v + x_1 - t) + 1}{|x_1 - t| + 1}\, C_{21}\, j^1 + \right.$$

$\frac{(-1)^{s_{22}}(-2v+x_2-t)+1}{|x_2-t|+1}\ C_{22}\ j^2 + \frac{(-1)^{s_{23}}(-2v+x_3-t)+1}{|x_3-t|+1}\ C_{23}\ j^3\Big] +$
$|\nabla p|\ \left(e^{-a_1\,x_1}\, j^1 + e^{-a_2\,x_2}\, j^2 + \ e^{-\,a_3\,x_3}\, j^3\right) - |F|\, e^{-wt}\ \left(e^{-b_1\,x_1}\, j^1 +\right.$
$\left. e^{-b_2\,x_2}\, j^2 + \ e^{-\,b_3\,x_3}\, j^3\right)$ ec. (1.a.7)

Con:

$$s_{11} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_1+t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_1+t) < 0 \end{cases} \qquad s_{12} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_2+t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_2+t) < 0 \end{cases}$$

$$s_{13} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_3+t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_3+t) < 0 \end{cases}$$

$$s_{21} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_1-t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_1-t) < 0 \end{cases} \qquad s_{22} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_2-t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_2-t) < 0 \end{cases}$$

$$s_{23} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_3-t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_3-t) < 0 \end{cases}$$

Para facilitar el cálculo de $|F|$ o de $|\nabla p|$ se hace uso de la ecuación de divergencia o condición 2 del problema, es decir

$$div\, u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (x \in R^n, t \geq 0)$$

Se analizará el caso para el cual:

$(x_1 + t) \geq 0, (x_2 + t) \geq 0 \; y \; (x_3 + t) \geq 0$ y $(x_1 - t) \geq 0, (x_2 - t) \geq 0 \; y \; (x_3 - t) \geq 0$

Lo que implica la siguiente solución:

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \left[-\frac{2v + x_1 + t + 1}{|x_1 + t| + 1}\, C_{11}\, j^1 - \frac{2v + x_2 + t + 1}{|x_2 + t| + 1}\, C_{12}\, j^2 \right. \\ & \left. - \frac{2v + x_3 + t + 1}{|x_3 + t| + 1}\, C_{13}\, j^3 \right] \\ & + \left[\frac{-2v + x_1 - t + 1}{|x_1 - t| + 1}\, C_{21}\, j^1 \right. \\ & + \frac{-2v + x_2 - t + 1}{|x_2 - t| + 1}\, C_{22}\, j^2 \\ & \left. + \frac{-2v + x_3 - t + 1}{|x_3 - t| + 1}\, C_{23}\, j^3 \right] \\ & + |\nabla p| \; (e^{-a_1 x_1} j^1 + e^{-a_2 x_2} j^2 + e^{-a_3 x_3} j^3) \\ & - |F| \, e^{-wt} \, (e^{-b_1 x_1} j^1 + e^{-b_2 x_2} j^2 + e^{-b_3 x_3} j^3) \end{aligned}$$

De donde se obtiene: $div\, u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} =$
$-\frac{C_{11}}{|x_1+t|+1} + \frac{C_{11}\,(2v+x_1+t+1)}{(|x_1+t|+1)^2} + \frac{C_{21}}{|x_1-t|+1} - \frac{C_{21}\,(-2v+x_1-t+1)}{(|x_1-t|+1)^2} +$
$|F|\, b_1\, e^{-wt-b_1 x_1} - |\nabla p|\, a_1\, e^{-a_1 x_1} - \frac{C_{12}}{|x_2+t|+1} + \frac{C_{12}\,(2v+x_2+t+1)}{(|x_2+t|+1)^2} +$
$\frac{C_{22}}{|x_2-t|+1} - \frac{C_{22}\,(-2v+x_2-t+1)}{(|x_2-t|+1)^2} + |F|\, b_2\, e^{-wt-b_2 x_2} - |\nabla p|\, a_2\, e^{-a_2 x_2} -$
$\frac{C_{13}}{|x_3+t|+1} + \frac{C_{13}\,(2v+x_2+t+1)}{(|x_3+t|+1)^2} + \frac{C_{23}}{|x_3-t|+1} - \frac{C_{23}\,(-2v+x_3-t+1)}{(|x_3-t|+1)^2} +$
$|F|\, b_3\, e^{-wt-b_3 x_3} - |\nabla p|\, a_3\, e^{-a_3 x_3}$

Igualando a cero la divergencia y despejando $|F|$

$$div\, u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$|F| = (b_1\, e^{-wt-b_1\, x_1} + b_2\, e^{-wt-b_2\, x_2} + b_3\, e^{-wt-b_3\, x_3})^{-1} \left(\frac{C_{11}}{|x_1+t|+1} - \frac{C_{11}\,(2v+x_1+t+1)}{(|x_1+t|+1)^2} - \frac{C_{21}}{|x_1-t|+1} + \frac{C_{21}\,(-2v+x_1-t+1)}{(|x_1-t|+1)^2} + |\nabla p|\, a_1\, e^{-a_1\, x_1} + \frac{C_{12}}{|x_2+t|+1} - \frac{C_{12}\,(2v+x_2+t+1)}{(|x_2+t|+1)^2} - \frac{C_{22}}{|x_2-t|+1} + \frac{C_{22}\,(-2v+x_2-t+1)}{(|x_2-t|+1)^2} + |\nabla p|\, a_2\, e^{-a_2\, x_2} + \frac{C_{13}}{|x_3+t|+1} - \frac{C_{13}\,(2v+x_2+t+1)}{(|x_3+t|+1)^2} - \frac{C_{23}}{|x_3-t|+1} + \frac{C_{23}\,(-2v+x_3-t+1)}{(|x_3-t|+1)^2} \right)$$

Aplicando las condiciones iniciales (3) a la solución general de la ec (1.a): Se analizará el caso para el cual:

$(x_1+t) \geq 0, (x_2+t) \geq 0\ y\ (x_3+t) \geq 0$ y $(x_1-t) \geq 0, (x_2-t) \geq 0\ y\ (x_3-t) \geq 0$

Lo que implica la siguiente solución:

$$u(x,t) = \left[-\frac{2v + x_1 + t + 1}{|x_1 + t| + 1}\, C_{11}\, j^1 - \frac{2v + x_2 + t + 1}{|x_2 + t| + 1}\, C_{12}\, j^2 - \frac{2v + x_3 + t + 1}{|x_3 + t| + 1}\, C_{13}\, j^3\right] + \left[\frac{-2v + x_1 - t + 1}{|x_1 - t| + 1}\, C_{21}\, j^1 + \frac{-2v + x_2 - t + 1}{|x_2 - t| + 1}\, C_{22}\, j^2 + \frac{-2v + x_3 - t + 1}{|x_3 - t| + 1}\, C_{23}\, j^3\right] + |\nabla p|\ \left(e^{-a_1 x_1}\, j^1 + e^{-a_2 x_2}\, j^2 + e^{-a_3 x_3}\, j^3\right) - |F|\, e^{-wt}\left(e^{-b_1 x_1}\, j^1 + e^{-b_2 x_2}\, j^2 + e^{-b_3 x_3}\, j^3\right)$$

Cuando $t = 0$ se tiene que:

$$u(x,0) = u^0(x) = \left[-\frac{2v + x_1 + 1}{|x_1| + 1}\, C_{11}\, j^1 - \frac{2v + x_2 + 1}{|x_2| + 1}\, C_{12}\, j^2 - \frac{2v + x_3 + 1}{|x_3| + 1}\, C_{13}\, j^3\right] + \left[\frac{-2v + x_1 + 1}{|x_1| + 1}\, C_{21}\, j^1 + \frac{-2v + x_2 + 1}{|x_2| + 1}\, C_{22}\, j^2 + \frac{-2v + x_3 + 1}{|x_3| + 1}\, C_{23}\, j^3\right] + |\nabla p|\ \left(e^{-a_1 x_1}\, j^1 + e^{-a_2 x_2}\, j^2 + e^{-a_3 x_3}\, j^3\right) - |F|\left(e^{-b_1 x_1}\, j^1 + e^{-b_2 x_2}\, j^2 + e^{-b_3 x_3}\, j^3\right)$$

(x $\in \mathbb{R}^3$).

Aquí, $u^0(x)$ es un campo vectorial libre de divergencia C^∞ en $\mathbb{R}^3$, $f_i(x,t)$ son los componentes de una fuerza dada, aplicada externamente (por ejemplo, la gravedad), v es un coeficiente positivo (la viscosidad), Las ecuaciones de Euler son las ecuaciones (1), (2), (3) con un conjunto v igual a cero.

La ecuación (1) es solo la ley de Newton $f = m\,a$ para un elemento fluido sujeto a lo externo fuerza $f = (f_i(x,t))_{1\le i\le n}$ y a las fuerzas que surgen de la presión y la fricción.

La ecuación (2) simplemente dice que el fluido es incompresible. Para soluciones físicamente razonable, queremos asegurarnos de que $u(x,t)$ no crezca tan grande como $|x| \longrightarrow \infty$. Por lo tanto, restringiremos la atención a las fuerzas f y las condiciones iniciales u^0 que satisfacen a (4) y (5), esto es:

Para la condición (4)

(4) $|\partial_x^\propto u^0(x)| \le C_{\propto K}(1+|x|)^{-K} \;\; en \;\; R^n \;\; para\, cualquier \;\; \propto y\, K$

Generalizando para la derivada de orden $\propto$ $|\partial_x^\propto u^0(x)|$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^{\propto} u^0(x)| \leq \ (\propto !) \Big[& C_{11}\,(|x_1| \\
& + 1)^{-\propto} \left(\left| (-1)^{\propto} \left(-1 + \frac{2v + x_1 + 1}{|x_1| + 1} \right) \right| \right) \\
& + C_{21}\,(|x_1| + 1)^{-\propto} \left(\left| (-1)^{\propto} \left(1 + \frac{-2v + x_1 + 1}{|x_1| + 1} \right) \right| \right) \\
& + C_{12}\,(|x_2| + 1)^{-\propto} \left(\left| (-1)^{\propto} \left(-1 + \frac{2v + x_2 + 1}{|x_2| + 1} \right) \right| \right) \\
& + C_{22}\,(|x_2| + 1)^{-\propto} \left(\left| (-1)^{\propto} \left(1 + \frac{-2v + x_2 + 1}{|x_2| + 1} \right) \right| \right) \\
& + C_{13}\,(|x_3| + 1)^{-\propto} \left(\left| (-1)^{\propto} \left(-1 + \frac{2v + x_3 + 1}{|x_3| + 1} \right) \right| \right) \\
& + C_{23}\,(|x_3| + 1)^{-\propto} \left(\left| (-1)^{\propto} \left(1 + \frac{-2v + x_3 + 1}{|x_3| + 1} \right) \right| \right) \Big] \\
& + |F| \left(\left| {b_1}^{\propto} \right| \left| e^{-b_1 x_1} \right| + \left| {b_2}^{\propto} \right| \left| e^{-b_2 x_2} \right| \right. \\
& \left. + \left| {b_3}^{\propto} \right| \left| e^{-b_3 x_3} \right| \right) \\
& + |\nabla p| \ (|{a_1}^{\propto}| \, |e^{-a_1 x_1}| + |{a_2}^{\propto}| \, |e^{-a_2 x_2}| \\
& + |{a_3}^{\propto}| \, |e^{-a_3 x_3}|)
\end{aligned}
$$

De aquí se puede apreciar que

$$
\begin{aligned}
C_{\propto K} = (\propto !)\, C_{ij}\ con\ i = 1{,}2.\ j = 1{,}2{,}3.\ \ y\ \ k = \\
\propto \quad en\ \ R^n\ \ para\ cualquier\ \ \propto y\ K
\end{aligned}
$$

Para la condición (5) se tiene que:

(5) $|\partial_x^{\propto}\, \partial_t^m f(x,t)|$

$$\leq C_{\propto mK}(1+|x|)^{-K} \quad en \;\; R^n$$

$$\times [0,\infty) \;\; para\; cualquier \quad \propto, m, K$$

Demostración:

$$f(x,t) = \overrightarrow{F_p} = |F|\; e^{-wt}\; (e^{-b_1\, x_1}\, j^1 + e^{-b_2\, x_2}\, j^2 + \; e^{-\, b_3\, x_3}\, j^3)$$

Para $|\partial_x^1\, \partial_t^1 f(x,t)| = |\partial_x\, \partial_t\, f(x,t)|$

$$\left|\partial_{x_1}\, \partial_t\, f(x,t)\right| = \left||F|\, w\, b_1\, e^{-wt-b_1x_1} \; + \; |F|\, w\, b_2\, e^{-wt-b_2x_2}\right.$$

$$\left. + |F|\, w\, b_3\, e^{-wt-b_3x_3}\; \right|$$

$$\leq \left||F|\, w\, b_1\, e^{-wt-b_1x_1}\right| + \left||F|\, w\, b_2\, e^{-wt-b_2x_2}\right|$$

$$+ \left||F|\, w\, b_3\, e^{-wt-b_3x_3}\right|$$

$$= \; |F|\; |w| \; \left(|b_1\,|\left|b_1\, e^{-wt-b_1x_1}\right|\right.$$

$$\left. + |\; b_2|\left|\, b_2\, e^{-wt-b_2x_2}\right| + |\; b_3|\left|\, b_3\, e^{-wt-b_3x_3}\right|\right)$$

Generalizando para $|\partial_x^{\propto}\, \partial_t^m\, f(x,t)|$

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^{\propto}\, \partial_t^{m}\, f(x,t)| = \Big|&(-1)^{-(\propto+m)}\, |F|\, w^m\, {b_1}^{\propto}\, e^{-wt-b_1x_1} \\
&+ (-1)^{-(\propto+m)}\, |F|\, w^m\, {b_2}^{\propto}\, e^{-wt-b_2x_2} \\
&+ (-1)^{-(\propto+m)}\, |F|\, w^m\, {b_3}^{\propto}\, e^{-wt-b_3x_3}\, \Big| \\
&\leq \left|(-1)^{-(\propto+m)}\, |F|\, w^m\, {b_1}^{\propto}\, e^{-wt-b_1x_1}\right| \\
&+ \left|(-1)^{-(\propto+m)}\, |F|\, w^m\, {b_2}^{\propto}\, e^{-wt-b_2x_2}\right| \\
&+ \left|(-1)^{-(\propto+m)}\, |F|\, w^m\, {b_3}^{\propto}\, e^{-wt-b_3x_3}\right| \\
&= \ |F|\, |w^m|\ \left(\left|\, {b_1}^{\propto}\, e^{-wt-b_1x_1}\right| + \left|\, {b_2}^{\propto}\, e^{-wt-b_2x_2}\right| \right.\\
&\left. + \left|\, {b_3}^{\propto}\, e^{-wt-b_3x_3}\right|\right) \\
&= |F|\, |w^m|\, \left|\, {b_1}^{\propto}\right|\, \left|\, e^{-wt-b_1x_1}\right| \Big(1 \\
&+ \left|\, {b_1}^{-\propto}\, {b_2}^{\propto}\, e^{b_1x_1-b_2x_2}\right| + \left|\, {b_1}^{-\propto}\, {b_3}^{\propto}\, e^{b_1x_1-b_3x_3}\right|\Big)
\end{aligned}
$$

Se puede verificar que $C_{\propto mK}(1+|x|)^{-K} = |F|\, |w^m|\, \left|\, {b_1}^{\propto}\right|\, \left|\, e^{-wt-b_1x_1}\right| \left(1 + \left|\, {b_1}^{-\propto}\, {b_2}^{\propto}\, e^{b_1x_1-b_2x_2}\right| + \left|\, {b_1}^{-\propto}\, {b_3}^{\propto}\, e^{b_1x_1-b_3x_3}\right|\right)$ de donde se concluye que $C_{\propto mK} = |F|\, w^m \left|\, {b_1}^{\propto}\right|$ y $k = -1$

Se puede verificar que la solución (1), (2) y (3) es físicamente razonable porque satisface a:

Para la condición (6) se tiene que:

(**6**) $p, u \in C^{\infty}\ (R^n \times [0,\infty))$, se puede apreciar que la funciones p, u son continuamente diferenciables R^n, ya que todas las derivadas parciales de orden n son continuas, y por lo tanto lo serán en $(R^n \times [0,\infty))$

Para la condición (7) se tiene que:

$$(\mathbf{7}) \quad \int_{R^n} |u(x,t)|^2 dx < C \quad para\ todo \quad t \geq 0 \quad (Energía\ acotada)$$

Demostración: Se analizará el caso para el cual:

$(x_1 + t) \geq 0, (x_2 + t) \geq 0 \ y \ (x_3 + t) \geq 0$ y $(x_1 - t) \geq 0, (x_2 - t) \geq 0 \ y \ (x_3 - t) \geq 0$

Lo que implica la siguiente solución:

$$u(x,t) = \left[-\frac{2v + x_1 + t + 1}{|x_1 + t| + 1} C_{11}\, j^1 - \frac{2v + x_2 + t + 1}{|x_2 + t| + 1} C_{12}\, j^2 - \frac{2v + x_3 + t + 1}{|x_3 + t| + 1} C_{13}\, j^3 \right] + \left[\frac{-2v + x_1 - t + 1}{|x_1 - t| + 1} C_{21}\, j^1 + \frac{-2v + x_2 - t + 1}{|x_2 - t| + 1} C_{22}\, j^2 + \frac{-2v + x_3 - t + 1}{|x_3 - t| + 1} C_{23}\, j^3 \right] + |\nabla p| \left(e^{-a_1 x_1} j^1 + e^{-a_2 x_2} j^2 + e^{-a_3 x_3} j^3 \right) - |F|\, e^{-wt} \left(e^{-b_1 x_1} j^1 + e^{-b_2 x_2} j^2 + e^{-b_3 x_3} j^3 \right)$$

Sustituyendo la solución $u(x,t)$ en la integral.

$$
\begin{aligned}
\int_{R^n} |u(x,t)|^2 dx \leq \big(& {C_{11}}^2 + {C_{13}}^2 + {C_{12}}^2 + {C_{21}}^2 + {C_{22}}^2 \\
&+ {C_{23}}^2\big) x_1 x_2 x_3 + 4\, {C_{11}}^2 v\, x_2 x_3\, ln(|x_1 + t| + 1) \\
&+ 4\, {C_{12}}^2 v\, x_1 x_3\, ln(|x_2 + t| + 1) \\
&+ 4\, {C_{13}}^2 v\, x_1 x_2\, ln(|x_3 + t| + 1) - \frac{4\, {C_{11}}^2 v^2\, x_2 x_3}{|x_1 + t| + 1} \\
&- \frac{4\, {C_{12}}^2 v^2\, x_1 x_3}{|x_2 + t| + 1} - \frac{4\, {C_{13}}^2 v^2\, x_1 x_2}{|x_3 + t| + 1} \\
&- 4\, {C_{21}}^2 v\, x_1 x_3\, ln(|x_2 - t| + 1) \\
&- 4\, {C_{22}}^2 v\, x_1 x_3\, ln(|x_2 - t| + 1) \\
&- 4\, {C_{23}}^2 v\, x_1 x_2\, ln(|x_3 - t| + 1) - \frac{4\, {C_{21}}^2 v^2\, x_2 x_3}{|x_1 - t| + 1} \\
&- \frac{4\, {C_{22}}^2 v^2\, x_1 x_3}{|x_2 - t| + 1} - \frac{4\, {C_{23}}^2 v^2\, x_1 x_2}{|x_3 - t| + 1} \\
&- \frac{|\nabla p|^2}{2} \left[\frac{x_2\, x_3\, e^{-2\, a_1\, x_1}}{a_1} + \frac{x_1\, x_3\, e^{-2\, a_2\, x_2}}{a_2} \right. \\
&\left. + \frac{x_1\, x_2\, e^{-\, 2\, a_3\, x_3}}{a_3} \right] \\
&- \frac{|F|^2 e^{-2\, wt}}{2} \left[\frac{x_2\, x_3\, e^{-2\, b_1\, x_1}}{b_1} + \frac{x_1\, x_3\, e^{-2\, b_2\, x_2}}{b_2} \right. \\
&\left. + \frac{x_1\, x_2\, e^{-\, 2\, b_3\, x_3}}{b_3} \right]
\end{aligned}
$$

Evaluando la integral 4 en la región: $0 \leq x_1 \leq K$, $0 \leq x_2 \leq K$, $0 \leq x_3 \leq K$

$$\int_{R^n} |u(x,t)|^2 dx \leq \left({C_{11}}^2 + {C_{13}}^2 + {C_{12}}^2 + {C_{21}}^2 + {C_{22}}^2 + {C_{23}}^2\right)K^3$$
$$+ 4\,{C_{11}}^2 v\, K^2\, ln(|K+t|+1)$$
$$+ 4\,{C_{12}}^2 v\, K^2\, ln(|K+t|+1)$$
$$+ 4\,{C_{13}}^2 v\, K^2\, ln(|K+t|+1) - \frac{4\,{C_{11}}^2 v^2\, K^2}{|K+t|+1}$$
$$- \frac{4\,{C_{12}}^2 v^2\, K^2}{|K+t|+1} - \frac{4\,{C_{13}}^2 v^2\, K^2}{|K+t|+1}$$
$$- 4\,{C_{21}}^2 v\, K^2\, ln(|K-t|+1)$$
$$- 4\,{C_{22}}^2 v\, K^2\, ln(|K-t|+1)$$
$$- 4\,{C_{23}}^2 v\, K^2\, ln(|K-t|+1) - \frac{4\,{C_{21}}^2 v^2\, K^2}{|K-t|+1}$$
$$- \frac{4\,{C_{22}}^2 v^2\, K^2}{|K-t|+1} - \frac{4\,{C_{23}}^2 v^2\, K^2}{|K-t|+1}$$
$$- \frac{|\nabla p|^2}{2}\left[\frac{K^2\, e^{-2\,a_1 K}}{a_1} + \frac{K^2\, e^{-2\,a_2 K}}{a_2} + \frac{K^2\, e^{-2\,a_3 K}}{a_3}\right]$$
$$- \frac{|F|^2 e^{-2\,wt}}{2}\left[\frac{K^2\, e^{-2b_1\,K}}{b_1} + \frac{K^2\, e^{-2b_2\,K}}{b_2}\right.$$
$$\left. + \frac{K^2\, e^{-2b_3\,K}}{b_3}\right]$$

Se puede apreciar que la solución de la integral evaluada en cualquier región en R^n es menor que cualquier constante C que sea mayor que el valor de la integral evaluada en esa región, esto es

$$\int_{R^n} |u(x,t)|^2 dx < C \quad para\, todo \quad t \geq 0$$

2.2. Solución del problema para n-dimensiones

GENERALIZACION DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE NAVIER - STOKES

La función complementaria u_h es la solución general de la ecuación homogénea asociada a:

$$\nu\,\nabla^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = 0 \qquad \text{ec. (2)}$$

Para resolver estas ecuaciones se debe considerar una solución particular de la forma:

$$\begin{aligned} u_h(x,t) = {} & \left(a_1\,(\,|x_1 \pm t| + 1)\right)^{-1} j^1 + \left(a_2\,(\,|x_1 \pm t| + 1)\right)^{-1} j^2 \\ & + \left(a_3\,(\,|x_1 \pm t| + 1)\right)^{-1} j^3 + \cdots \\ & + \left(a_n\,(\,|x_1 \pm t| + 1)\right)^{-1} j^n \end{aligned}$$

Caso 1. Se sustituirá en la ecuación (2) la solución

$$\begin{aligned} u_{h1}(x,t) = {} & \frac{1}{a_1(\,|x_1 + t| + 1)}\,j^1 + \frac{1}{a_2\,(\,|x_2 + t| + 1)}\,j^2 \\ & + \frac{1}{a_3\,(\,|x_3 + t| + 1)}\,j^3 + \cdots + \frac{1}{a_n\,(\,|x_n + t| + 1)}\,j^n \end{aligned}$$

Probaremos la solución para el caso que:

$$(x_1+t)\ \geq 0, (x_2+t)\ \geq 0, \dots\quad (x_n+t)\ \geq 0$$

Esto implica una solución de la forma:

$$u_{h11}(x,t) = \frac{1}{a_1(\,x_1+t+1)}\,j^1 + \frac{1}{a_2\,(x_2+t+1)}\,j^2 + \cdots + \frac{1}{a_n\,(\,x_n+t+1)}\,j^n$$

Sustituyendo en la ecuación (2) la solución propuesta se obtiene el siguiente resultado:

$$\left[\frac{2v}{a_1\,(\,x_1+t+1)^3} + \frac{1}{{a_1}^2\,(\,x_1+t+1)^3} + \frac{1}{a_1\,(\,x_1+t+1)^2}\right]\ j^1 + \left[\frac{2v}{a_2\,(x_2+t+1)^3} + \frac{1}{{a_2}^2\,(x_2+t+1)^3} + \frac{1}{a_2\,(x_2+t+1)^2}\right]\ j^2 + \left[\frac{2v}{a_3\,(x_3+t+1)^3} + \frac{1}{{a_2}^2\,(x_3+t+1)^3} + \frac{1}{a_3\,(x_3+t+1)^2}\right]\ j^3 + \cdots + \left[\frac{2v}{a_n\,(x_n+t+1)^3} + \frac{1}{{a_n}^2\,(x_n+t+1)^3} + \frac{1}{a_n\,(x_n+t+1)^2}\right]\ j^n = 0$$

Igualando las componentes vectoriales se tiene:

$$\frac{2v}{a_1\,(x_1+t+1)^3}+\frac{1}{a_1{}^2\,(x_1+t+1)^3}+\frac{1}{a_1\,(x_1+t+1)^2}=0 \quad \text{ec. (2.1)}$$

$$\frac{2v}{a_2\,(x_2+t+1)^3}+\frac{1}{a_2{}^2\,(x_2+t+1)^3}+\frac{1}{a_2\,(x_2+t+1)^2}=0 \quad \text{ec. (2.2)}$$

$$\frac{2v}{a_3\,(x_3+t+1)^3}+\frac{1}{a_2{}^2\,(x_3+t+1)^3}+\frac{1}{a_3\,(x_3+t+1)^2}=0 \quad \text{ec. (2.3)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{2v}{a_n\,(x_n+t+1)^3}+\frac{1}{a_n{}^2\,(x_n+t+1)^3}+\frac{1}{a_n\,(x_n+t+1)^2}=0 \quad \text{ec. (2.4)}$$

De la ecuación (2.1) se tiene que:

$$a_1=-\frac{1}{2v+x_1+t+1}$$

De la ecuación (2.2) se tiene que:

$$a_2=-\frac{1}{2v+x_2+t+1}$$

De la ecuación (2.3) se tiene que:

$$a_3=-\frac{1}{2v+x_3+t+1}$$

De la ecuación (2.n) se tiene que:

$$a_n = -\frac{1}{2v + x_n + t + 1}$$

Sustituyendo en la solución propuesta $u_{h1}(x,t)$, se obtiene:

$$u_{h1}(x,t) = -\frac{2v+x_1+t+1}{|x_1+t|+1}\, j^1 - \frac{2v+x_2+t+1}{|x_2+t|+1}\, j^2 - \frac{2v+x_3+t+1}{|x_3+t|+1}\, j^3 - \cdots - \frac{2v+x_n+t+1}{|x_n+t|+1} j^n \quad \text{ec. (2.6)}$$

La función general que recoge todas las soluciones del caso 1 es:

$$u_{h1}(x,t) = \left[-\frac{(-1)^{s_{11}}(2v + x_1 + t) - (-1)^{s_{11}+1}(1)}{|x_1 + t| + 1}\, C_{11}\, j^1 - \frac{(-1)^{s_{12}}(2v + x_2 + t) - (-1)^{s_{12}+1}(1)}{|x_2 + t| + 1}\, C_{12}\, j^2 - \frac{(-1)^{s_{13}}(2v + x_3 + t) - (-1)^{s_{13}+1}(1)}{|x_3 + t| + 1}\, C_{13}\, j^3 - \cdots - \frac{(-1)^{s_{1n}}(2v + x_n + t) - (-1)^{s_{1n}+1}(1)}{|x_n + t| + 1}\, C_{1n}\, j^n \right]$$

Con:

$$s_{11} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_1 + t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_1 + t) < 0 \end{cases} \qquad s_{12} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_2 + t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_2 + t) < 0 \end{cases}$$

$$\ldots \; s_{1n} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_n + t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_n + t) < 0 \end{cases}$$

Caso 2. Se sustituirá en la ecuación (2) la solución

$$u_{h2}(x,t) = u_{h1}(x,t)$$
$$= \frac{1}{a_1(\,|x_1 - t| + 1)}\,j^1 + \frac{1}{a_2\,(\,|x_2 - t| + 1)}\,j^2$$
$$+ \frac{1}{a_3\,(\,|x_3 - t| + 1)}\,j^3 + \cdots + \frac{1}{a_n\,(\,|x_n - t| + 1)}\,j^n$$

Probaremos la solución para el caso que:

$$(x_1 - t)\ \geq 0, (x_2 - t)\ \geq 0, \ldots\quad (x_n - t)\ \geq 0$$

Esto implica una solución de la forma:

$$u_{h11}(x,t) = \frac{1}{a_1(\,x_1 - t + 1)}\,j^1 + \frac{1}{a_2\,(x_2 - t + 1)}\,j^2 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{a_n\,(\,x_n - t + 1)}\,j^n$$

Sustituyendo en la ecuación (1.b) la solución propuesta se obtiene el siguiente resultado:

$$\left[\frac{2v}{a_1\,(x_1-t+1)^3}+\frac{1}{{a_1}^2\,(x_1-t+1)^3}-\frac{1}{a_1\,(x_1-t+1)^2}\right]\ j^1$$
$$+\left[\frac{2v}{a_2\,(x_2-t+1)^3}+\frac{1}{{a_2}^2\,(x_2-t+1)^3}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{a_2\,(x_2-t+1)^2}\right]\ j^2$$
$$+\ \left[\frac{2v}{a_3\,(x_3-t+1)^3}+\frac{1}{{a_2}^2\,(x_3-t+1)^3}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{a_3\,(x_3-t+1)^2}\right]\ j^3+\cdots$$
$$+\left[\frac{2v}{a_n\,(x_n-t+1)^3}+\frac{1}{{a_n}^2\,(x_n-t+1)^3}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{a_n\,(x_n-t+1)^2}\right]\ \ j^n=0$$

Igualando las componentes vectoriales se tiene:

$$\frac{2v}{a_1\,(x_1-t+1)^3}+\frac{1}{{a_1}^2\,(x_1-t+1)^3}-\frac{1}{a_1\,(x_1-t+1)^2}=0 \quad \text{ec. (2.7)}$$

$$\frac{2v}{a_2\,(x_2-t+1)^3}+\frac{1}{{a_2}^2\,(x_2-t+1)^3}-\frac{1}{a_2\,(x_2-t+1)^2}=0 \quad \text{ec. (2.8)}$$

$$\frac{2v}{a_3\,(x_3-t+1)^3}+\frac{1}{{a_2}^2\,(x_3-t+1)^3}-\frac{1}{a_3\,(x_3-t+1)^2}=0 \quad \text{ec. (2.9)}$$

$$\vdots\ \frac{2v}{a_n\,(x_n-t+1)^3}+\frac{1}{{a_n}^2\,(x_n-t+1)^3}-\frac{1}{a_n\,(x_n-t+1)^2}=0 \quad \text{ec. (2.10)}$$

De la ecuación (2.1) se tiene que:

$$a_1 = \frac{1}{-2v + x_1 - t + 1}$$

De la ecuación (2.2) se tiene que:

$$a_2 = \frac{1}{-2v + x_2 - t + 1}$$

De la ecuación (2.3) se tiene que:

$$a_3 = \frac{1}{-2v + x_3 - t + 1}$$

De la ecuación (2.n) se tiene que:

$$a_n = \frac{1}{-2v + x_n - t + 1}$$

Sustituyendo en la solución propuesta $u_{h2}(x,t)$, Se obtiene:

$$u_{h2}(x,t) = \frac{-2v+x_1-t+1}{|x_1-t|+1}\, j^1 + \frac{-2v+x_2-t+1}{|x_2-t|+1}\, j^2 + \frac{-2v+x_3-t+1}{|x_3-t|+1}\, j^3 + \cdots + \frac{-2v+x_n-t+1}{|x_n-t|+1} j^n \quad \text{ec. (2.11)}$$

La función general que recoge todas las soluciones del caso 2 es:

$$u_{h2}(x,t) = \left[\frac{(-1)^{s_{21}}(-2v + x_1 - t) + 1}{|x_1 - t| + 1}\ C_{21}\, j^1 + \frac{(-1)^{s_{22}}(-2v + x_2 - t) + 1}{|x_2 - t| + 1}\ C_{22}\, j^2 + \frac{(-1)^{s_{23}}(-2v + x_3 - t) + 1}{|x_3 - t| + 1} C_{23}\ j^3 + \cdots + \frac{(-1)^{s_{2n}}(-2v + x_n - t) + 1}{|x_n - t| + 1} C_{2n}\ j^n\right]$$

Con:

$$s_{21} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_1 - t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_1 - t) < 0 \end{cases} \qquad s_{22} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_2 - t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_2 - t) < 0 \end{cases}$$

$$\ldots \ s_{2n} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_n - t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_n - t) < 0 \end{cases}$$

Una vez obtenidas las soluciones de los casos 1 y 2. Se puede obtener la solución homogénea asociada a la ecuación (2), la cual está dada por:

$$u_h(x,t) = \left[-\frac{(-1)^{s_{11}}(2v+x_1+t)-(-1)^{s_{11}+1}(1)}{|x_1+t|+1}\ C_{11}\, j^1 - \frac{(-1)^{s_{12}}(2v+x_2+t)-(-1)^{s_{12}+1}(1)}{|x_2+t|+1}\ C_{12}\, j^2 - \frac{(-1)^{s_{13}}(2v+x_3+t)-(-1)^{s_{13}+1}(1)}{|x_3+t|+1}\ C_{13}\, j^3 - \cdots - \frac{(-1)^{s_{1n}}(2v+x_n+t)-(-1)^{s_{1n}+1}(1)}{|x_n+t|+1}\ C_{1n}\, j^n\right] + \left[\frac{(-1)^{s_{21}}(-2v+x_1-t)+1}{|x_1-t|+1}\ C_{21}\, j^1 +\right.$$

$\frac{(-1)^{s_{22}}(-2v+x_2-t)+1}{|x_2-t|+1}\ C_{22}\, j^2 + \frac{(-1)^{s_{23}}(-2v+x_3-t)+1}{|x_3-t|+1} C_{23}\ \ j^3 + \cdots +$
$\left.\frac{(-1)^{s_{2n}}(-2v+x_n-t)+1}{|x_n-t|+1} C_{2n}\ \ j^n\right]$ ec. (2.12)

Con:

$$s_{11} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_1+t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_1+t) < 0 \end{cases} \qquad s_{12} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_2+t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_2+t) < 0 \end{cases}$$

$$\ldots \ \ s_{1n} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_n+t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_n+t) < 0 \end{cases}$$

$$s_{21} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_1-t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_1-t) < 0 \end{cases} \qquad s_{22} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_2-t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_2-t) < 0 \end{cases}$$

$$\ldots \ \ s_{2n} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_n-t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_n-t) < 0 \end{cases}$$

Si consideramos la solución particular de la forma:

$$u_p = |\nabla p|\ \ (e^{-a_1\, x_1}\, j^1 + e^{-a_2\, x_2}\, j^2 + \ e^{-\, a_3\, x_3}\, j^3 + \cdots + e^{-\, a_n\, x_n}\, j^n) - |F|\, e^{-wt}\, (e^{-b_1\, x_1}\, j^1 + e^{-b_2\, x_2}\, j^2 + \ e^{-\, b_3\, x_3}\, j^3 + \cdots + e^{-\, b_n\, x_n}\, j^n) \qquad \text{ec. (2.13)}$$

Por último, podemos afirmar que la ecuación:

$$v\,\nabla^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} = \nabla p - F \qquad \text{ec. (1.a)}$$

Tiene por solución a:

$$u(x,t) = u_h + u_p = \left[-\frac{(-1)^{s_{11}}(2v+x_1+t)-(-1)^{s_{11}+1}(1)}{|x_1+t|+1}\,C_{11}\,j^1 - \frac{(-1)^{s_{12}}(2v+x_2+t)-(-1)^{s_{12}+1}(1)}{|x_2+t|+1}\,C_{12}\,j^2 - \frac{(-1)^{s_{13}}(2v+x_3+t)-(-1)^{s_{13}+1}(1)}{|x_3+t|+1}\,C_{13}\,j^3 - \cdots - \frac{(-1)^{s_{1n}}(2v+x_n+t)-(-1)^{s_{1n}+1}(1)}{|x_n+t|+1}\,C_{1n}\,j^n\right] + \left[\frac{(-1)^{s_{21}}(-2v+x_1-t)+1}{|x_1-t|+1}\,C_{21}\,j^1 + \frac{(-1)^{s_{22}}(-2v+x_2-t)+1}{|x_2-t|+1}\,C_{22}\,j^2 + \frac{(-1)^{s_{23}}(-2v+x_3-t)+1}{|x_3-t|+1}C_{23}\,j^3 + \cdots + \frac{(-1)^{s_{2n}}(-2v+x_n-t)+1}{|x_n-t|+1}C_{2n}\,j^n\right] + |\nabla p|\,\left(e^{-a_1\,x_1}\,j^1 + e^{-a_2\,x_2}\,j^2 + e^{-\,a_3\,x_3}\,j^3 + \cdots + e^{-\,a_n\,x_n}\,j^n\right) - |F|\,e^{-wt}\,\left(e^{-b_1\,x_1}\,j^1 + e^{-b_2\,x_2}\,j^2 + e^{-\,b_3\,x_3}\,j^3 + \cdots + e^{-\,b_n\,x_n}\,j^n\right) \qquad \text{ec. (2.14)}$$

Con:

$$s_{11} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_1 + t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_1 + t) < 0 \end{cases} \qquad s_{12} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_2 + t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_2 + t) < 0 \end{cases}$$

$$\ldots \; s_{1n} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_n + t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_n + t) < 0 \end{cases}$$

$$s_{21} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_1 - t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_1 - t) < 0 \end{cases} \qquad s_{22} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_2 - t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_2 - t) < 0 \end{cases}$$

$$\ldots \; s_{2n} = \begin{cases} 0 & si \quad (x_n - t) \geq 0 \\ 1 & si \quad (x_n - t) < 0 \end{cases}$$

REFERENCES

BERTOZZI A. and MAJDA, A. 2002. **Vorticity and Incompressible Flows**, Cambridge U. Press, Cambridge (UK).

CAFFARELLI, L.; KOHN, R. and NIRENBERG, L. 1982. "Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations", In **Comm. Pure & Appl. Math**. 35 (1982): 771–831.

CONSTANTIN, P. 2001. "Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics". In **Mathematics Unlimited–2001 and Beyond, Springer Verlag, Berlin**, 2001, 353–360.

LADYZHENSKAYA, O. 1969. **The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows** (2nd edition), Gordon and Breach, New York (USA).

LERAY, J. 1934. "Sur le mouvement d'un liquide visquex emplissent l'espace". In **Acta Math**. J. 63 (1934), 193–248.

LIN, F.H. 1998. "A new proof of the Caffarelli–Kohn–Nirenberg theorem". In **Comm. Pure. & Appl. Math**. 51 (1998), 241–257.

SCHEFFER, V. 1976. “Turbulence and Hausdorff dimension”. In **Turbulence and the Navier–Stokes Equations, Lecture Notes in Math**. 565, Springer Verlag, Berlin, 1976, 94–112.

CHENG, H. 2004. “On partial regularity for weak solutions to the Navier–Stokes equations”. In **Journal of Functional Analysis** 211 153-162 Elsevier, (2004).

UNIVERSIDAD
DEL ZULIA

opción
Revista de Ciencias Humanas y Sociales

Año 35, N° 90 (2019)

Esta revista fue editada en formato digital por el personal de la Oficina de Publicaciones Científicas de la Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia.
Maracaibo - Venezuela

www.luz.edu.ve

www.serbi.luz.edu.ve

produccioncientifica.luz.edu.ve