opción

Revista de Antropología, Ciencias de la Comunicación y de la Información, Filosofía, Lingüística y Semiótica, Problemas del Desarrollo, la Ciencia y la Tecnología

Año 35, diciembre 2019 N° 90

Revista de Ciencias Humanas y Sociales
ISSN 1012-1587/ ISSNe: 2477-9385
Depósito Legal pp 198402ZU45

Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Departamento de Ciencias Humanas
Maracaibo - Venezuela

Opción, Año 35, Regular No.90 (2019): 607-667
ISSN 1012-1587/ISSNe: 2477-9385

Visualizando los límites de funciones y las derivadas con geometría dinámica

Jaime Gutiérrez-González
Universidad de Panamá, Panamá
jaimejgutierrezg@gmail.com

Luisa Morales-Maure
Universidad de Panamá, Panamá
luisa.morales@up.ac.pa

Marcos Campos-Nava
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México
mcampos@uaeh.edu.mx

Julio E. Crespo
Universidad de Los Lagos, Chile
jcrespo@ulagos.cl

Juan Mansilla-Sepúlveda
Universidad Católica de Temuco, Chile
jmansilla@uct.cl

Resumen

Se presentan resultados sobre representación de la función cuadrática como objeto matemático, con el propósito de que los estudiantes encuentren sentido al significado de derivada de la función. Se propone el uso de software de geometría dinámica *Cabri-Geometré* para coadyuvar en la interpretación gráfica. Los resultados muestran que el tipo de aprendizaje de los estudiantes de la muestra se explica por el tipo de tareas planteadas por los docentes. Finalmente muestran que con el uso del software los estudiantes alcanzan significado con mayor profundidad, tal como la derivada de una función.

Palabras clave: Función cuadrática; Cabri; geometría dinámica; derivada de una función

Recibido: 25-08-2019 •Aceptado: 01-10-2019

Visualizing the limits of functions and derivatives with dynamic geometry

Abstract

Results are presented on the representation of the quadratic function as a mathematical object, so that students find meaning in the meaning of the function derivative. The use of Cabri-Geometré dynamic geometry software is proposed to help in the graphic interpretation. Results show that the type of learning of the students in the sample is explained by the type of tasks posed by the teachers. Finally, they show that with the use of software, students achieve meaning in greater depth, such as that derived from a function.

Keywords: Quadratic function, Cabrí, dynamic geometry, derive from function

1. INTRODUCCIÓN

La escuela corresponde a la comunidad educativa específica responsable de la educación institucionalizada que no debe estar ajena a su contexto social sino implicada en los problemas reales y concretos de su entorno (CRESPILLO, 2010). Así, la escuela tiene la finalidad de lograr que los estudiantes se apropien de los conocimientos y al mismo tiempo desarrollar habilidades que afrontan problemas de la vida real. Pero en nuestro contexto social no es satisfactorio el nivel de aprovechamiento que se logra, por lo que se ha generado un interés por la educación particularmente en la enseñanza de las matemáticas (VALIENTE-BARDERAS, 2001).

Algunos estudiantes pueden solucionar ecuaciones y evaluar funciones, pero sin entender el significado de los algoritmos que realizan, y no logran asociar lo anterior a la resolución de problemas en los que existe variación; esto como resultado del sistema de enseñanza carente de una metodología apropiada para lograr un aprendizaje real y lograr la construcción de sentidos diversos (CARVAJAL, 2004).

A pesar de los esfuerzos que realizan los investigadores y docentes por mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (SÁNCHEZ, 2018), muchas de las técnicas utilizadas en el aula son recurrentes y se asocian al predominio del método expositivo, el poco uso de material didáctico, escases de libros y la presentación abstracta de conceptos. De hecho, la enseñanza tradicional privilegia el acercamiento algebraico en el cual el vínculo entre los registros gráfico y algebraico es casi inexistente, y cuando se da, éste pasa por la expresión algebraica de las soluciones.

En cambio, en un estudio cualitativo se requiere de una interacción fuerte entre esos registros, lo que demanda la movilización de conocimientos de diferentes marcos: funciones, geometría analítica, análisis, otros. Es por ello que se hace necesario, en primera instancia, indagar acerca de los efectos y resultados que provocan dichas metodologías empleadas, y así luego buscar innovadoras metodologías que orienten el proceso de enseñanza y aprendizaje a una más entretenida, interactiva, cautivadora y significativa para el educando, la cual vaya más allá de la repetición mecánica y sin sentido de procedimientos o algoritmos, de la memorización de fórmulas y conceptos para la realización de un simple examen. En este sentido, se puede mencionar que "El concepto de función es uno de los conceptos matemáticos más importantes de la matemática moderna. Gracias a este, la matemática del siglo XX ha alcanzado un grado de abstracción y formalidad sin precedentes". Por consiguiente, el establecimiento de vínculos entre los registros gráficos y algebraicos representa una tarea cognitiva compleja. En este trabajo se presenta el software *Cabri Geometry*, como un medio para problematizar los vínculos entre representantes visuales gráficos y representantes analíticos de la función cuadrática y su derivada.

Por lo general, durante la enseñanza del tema de la función cuadrática el docente empieza con una argumentación teórica, apoyada de ejemplos y algunas gráficas en la pizarra de los mismos; pero vistos de manera no muy atractiva por el educando, ya que está apoyada en un tipo de metodología meramente tradicionalista y aislada que no ofrece al educando la oportunidad de deducir y establecer conexiones con los conceptos involucrados. Además, la sociedad se está haciendo cada vez más dependiente de la imagen visual. Ejemplos obvios son la televisión y el cine. Gran cantidad de conceptos complejos se representan mejor usando la imagen visual. Conceptos como recurrencia y reduccionismo, que ocurren en matemáticas y ciencias, se explican fácilmente a través de gráficas computacionales; contrario a ello, si se intenta describirlos en forma escrita, pues resulta muy complicado, además de ser muy complejo leerlos.

Al respecto, LABORDE (1992) afirma "*El gran valor de nuevas tecnologías radica en ampliar, el abanico de manipulaciones posibles y el de la visualización*". Asimismo, indica que las posibilidades de visualización significan utilidad como herramienta de verificación de resultados y como fuente de experimentación; permitiendo al alumno elaborar conjeturas, contrastarlas y avanzar en la resolución de problemas. Por ende, trabajar con imágenes visuales en un ambiente computacional habilita al usuario para representar su entendimiento en una forma diferente, pues tiende a destacar una mayor motivación en el educando para hacer constante la búsqueda de la solución de un problema significativamente mayor que cuando lo resuelve a mano y quizá de forma muy abstracta.

El presente trabajo tiene por objetivo promover el uso de software *Cabri Geometry* como una herramienta metodológica de carácter innovador e interactivo en los educandos, para el estudio de la transición de la función cuadrática y su derivada.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La asignatura de Matemáticas considerada en los planes y programas de estudio del tronco común en el bachillerato aborda el tema de las funciones cuadráticas, cuya finalidad consiste en analizar sus propiedades y realizar su representación gráfica como un apoyo significativo en la formalización del conocimiento matemático. Sin embargo, es posible afirmar que el estudiante tiene un conocimiento *fraccionado* en el que los diversos conceptos, sus representaciones y sus campos de aplicación se encuentran poco articulados; es decir, existe una visión esencialmente *simbólica* del tema y, para él, saber álgebra es conocer y saber utilizar un conjunto de procedimientos que permiten resolver ejercicios de carácter simbólico (resolución de ecuaciones) sin apreciar la "potencia" de la función cuadrática y de su derivada como medio para modelar la realidad.

Por otra parte, el avance de la tecnología, particularmente en el terreno de la geometría, es clave en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos (LABORDE y BELLEIMAN, 1994). A la vez, los avances teóricos logrados en el campo de la matemática educativa permiten fundamentar tales acercamientos desde la perspectiva del constructivismo y desarrollar un soporte teórico que dirija la introducción de la tecnología como un verdadero recurso didáctico en el proceso docente.

Cada uno de los docentes deben tomar conciencia de que hay que dar un verdadero cambio en sus formas de enseñar, e ir poco a poco incorporando la tecnología como herramienta metodológica para con la enseñanza y aprendizaje de la matemática, procurando de esta manera, guiar a los educandos a un conocimiento matemático visto de una forma más interactiva y significativa, acercándose cada vez más a la siguiente premisa:

Al respecto de esta problemática, el presente trabajo de desarrollo para la enseñanza de la función cuadrática y su derivada pretende contribuir al aprendizaje de las matemáticas mediada por tecnología, a la vez de investigar sus efectos e impacto en la transición de estos conocimientos.

3. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DEL ESTUDIO

Las herramientas tecnológicas son instrumentos adecuados para que los estudiantes desarrollen actividades que interrelacionan las representaciones simbólicas-analíticas y visuales. Estas herramientas (que se transforman en instrumentos de mediación) sirven para establecer la comunicación a través de sistemas de signos.

Desde el punto de vista de la psicología, GUZMAN (1996), afirma que "para los psicólogos, la visualización es una técnica, entroncada en el análisis transaccional iniciado por Eric Berne (años 50's), que pretende una reestructuración de ciertos aspectos del subconsciente". Los psicólogos se han preocupado por la relación existente entre la visualización y el razonamiento humano. La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento", en una consecuencia de esto, CARRIÓN (1999), establece: "Obsérvese que no se habla de visualizar un diagrama sino de visualizar un concepto o problema. Visualizar un diagrama significa formar una imagen mental del diagrama; visualizar un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas". Lo cual pone de manifiesto la importancia de la visualización dentro del ámbito del proceso del aprendizaje de las matemáticas.

Para la Educación Matemática, el uso de la tecnología computacional hoy, reviste particular interés investigativo en lo que respecta al aprendizaje de las matemáticas de nuestros estudiantes en las instituciones escolares, dado que, la tecnología computacional posibilita el estudio (tratamiento) de los objetos matemáticos y sistemas de representación y las representaciones semióticas que constituyen un elemento básico para entender la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes (LUPIAÑEZ y MORENO, 1999) y desde las actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis: formación, tratamiento y conversión de registros semióticos (DUVAL, 1999). Es por este punto la importancia de nuestro estudio para la observación del tránsito de lo visual gráfico a lo analítico de la función cuadrática y su derivada con el uso de *Cabri Geometry*.

4. MARCO CONCEPTUAL

***a) Investigación propia*:**

Una de las ventajas indiscutibles que aportan las nuevas tecnologías a la enseñanza de la matemática es su capacidad de representación gráfica, que permite visualizar e integrar muchos conceptos y propiedades que se estudian y generalmente ayuda a dar una mejor comprensión de los mismos. Así por ejemplo en nuestro caso mediante ejemplos concretos de funciones cuadráticas, el educando será capaz de descubrir, identificar y a la vez deducir características propias de la función cuadrática y la representación de la derivada de esta función.

Existen en el mercado e Internet una amplia gama de software en matemática con potencialidades graficadores, entre ellos: DERIVE, MAPLE, Winplot, Cabri Geometry; ante lo cual es tarea del docente tratar de elegir el o los que sean más convenientes para manipular y trabajar en el aula con los educandos, esto tomando en cuenta las características de accesibilidad, disponibilidad, facilidad de instalación, manipulación e interacción, nunca perdiendo de vista el objetivo que se pretenda lograr.

El propósito de este trabajo es promover un tratamiento alternativo del estudio de la derivada, partiendo sólo de la definición como un límite y mostrar que con el uso de *Cabri* es posible encontrar expresiones analíticas para las derivadas de algunas funciones importantes del cálculo, así, un estudiante será capaz de descubrir, identificar y deducir características y propiedades propias de este tipo de funciones cuadráticas, tan solo a partir de los gráficos de las mismas, adoptando así una nueva e innovadora metodología y de más atracción e interés en el educando, todo esto en contraposición al tipo de metodología tradicionalista donde el profesor es quién da hecho todo al educando, incluyendo en este caso gráficas muchas veces no con una buena representación visual en la pizarra. Además adoptando esta nueva metodología en el desarrollo de este tema, el educando podrá comprender de manera gráfica el significado geométrico de la derivada de la función cuadrática donde tienen mayores dificultades.

El uso de *Cabri Geometry* puede aportar valiosa ayuda para favorecer la enseñanza de la matemática en estos temas y otros aspectos, en concreto la relación función – gráfica y su derivada, que generalmente son presentados de manera muy abstracta y aislada al educando, perdiendo de vista una enseñanza integral. Es claro que la posibilidad de representación gráfica permite abordar una amplia gama de conceptos y aplicaciones, utilizando las potencialidades de la máquina más allá del mero cálculo numérico. Por otra parte, al editar las operaciones aritméticas de forma muy similar a como lo haríamos con lápiz y papel, permite una mejor visualización de los cálculos que realizamos.

Fundamentalmente, el interés de usar este tipo de herramientas o paquetes graficadores es aprovechar el poder de la visualización para mejorar la comprensión de conceptos y utilizarla como herramienta útil para el estudio y resolución de determinados problemas, en particular los relacionados con la función cuadrática y su derivada. Al amparo de este marco teórico, conviene señalar la gran importancia que ha acaparado este concepto de estudio en la transición de conceptos de la función cuadrática y su derivada.

b) Guía teórica:

Toda investigación está orientada por referentes iníciales y consideraciones previas del investigador, que permiten circunscribirla bajo un enfoque particular acorde con su naturaleza y características. Este enfoque constituye el paradigma que cobija la investigación.

Los principios que guían la enseñanza de la función cuadrática apoyada en el uso del Cabri II son los del constructivismo. A continuación presentamos los que se tomarán en cuenta de acuerdo con MÁSHBITS (1997) para el diseño de los problemas que se le aplicaran al estudiante para explorar el desarrollo de las ideas, conocimientos y habilidades en la transición de la función cuadrática y su derivada:

1. *El conocimiento no se transmite: es construido por el individuo como resultado de su propia actividad*. Desde el punto de vista de la psicología constructivista GLASSERFELD (1996) señala que "la transmisión de conocimientos" es un concepto vacío carente de significado. Para Glasserfeld el conocimiento, como ente ideal, no puede ser transmitido de ningún modo: sólo pude ser construido por el sujeto cognoscente como resultado de su propia actividad.

2. *La actividad que propicia el conocimiento es ante todo actividad mental de orden superior*. La actividad del que aprende, y gracias a la cual aprende, es ante todo actividad mental que involucra las funciones psíquicas superiores, y no solamente a sus estratos más elementales como la percepción y la memorización, y de ésta solamente a la memoria mecánica. La memoria interviene en el aprendizaje, pero no como mecanismo fundamental y conductor. Este se desarrolla en planos superiores que comprenden el análisis, la síntesis, la comparación, la abstracción, la deducción, la inducción, el razonamiento lógico, el razonamiento analógico y las heurísticas, entre otros procesos mentales. Este planteamiento de la psicología constructivista nos obliga a introducir como parte del diseño actividades de aprendizaje que tengan como objetivo desencadenar los procesos psíquicos superiores ya señalados, como una condición necesaria para propiciar la construcción del conocimiento por el alumno.

3. *La actividad mental que coadyuva al aprendizaje es colectiva y dialógica*[1]. La psicología pedagógica, la antropología y la epistemología han establecido que el aprendizaje del ser humano es también social, es decir, que se da no solamente en el plano de lo individual, sino que también transcurre en la interacción del individuo con su entorno social (con sus compañeros de aprendizaje, sobre todo) a través de la comunicación. En el plano de la interiorización, la comunicación también tiene un carácter dialógico:

[1] Que contempla o que propicia la posibilidad de discusión.

el estudiante "conversa" y "discute" consigo mismo. Este postulado de la psicología constructivista nos obliga a incluir, como parte del formato del diseño, actividades de carácter grupal donde la comunicación entre los alumnos juegue un papel importante. Sin este tipo de actividad, se estará corriendo el riesgo de limitar las posibilidades de lograr un aprendizaje más sólido, de desarrollar las capacidades de comunicación de los alumnos y frenar su desarrollo intelectual.

4. *La actividad debe ser adecuada al objeto de aprendizaje*. Cuando se dice que el conocimiento se construye como resultado de la actividad, esto no significa que cualquier tipo de actividad conduzca a un conocimiento, por lo menos en los términos de la enseñanza formal. La actividad del que aprende debe corresponderse con las particularidades de los conocimientos a construir. Los sistemas de representación constituyen uno de los preceptos teóricos que orientan nuestro diseño. Es precisamente este precepto teórico el que guía la introducción sistemática de las múltiples representaciones (DUVAL, 1993). En este documento Duval menciona que una figura geométrica, un enunciado verbal, una fórmula algebraica, una tabla, son representaciones semióticas, es decir, representaciones construidas por el empleo de signos. Partiendo de esta concepción, asumimos que el papel del profesor consiste en guiar la actividad cognoscitiva del alumno en su interacción con las diferentes representaciones del conocimiento matemático. En otras palabras, se trata de diseñar cuidadosamente las situaciones de aprendizaje que privilegien la interacción de los diferentes sistemas de representación

y el involucramiento de recursos tecnológicos adecuados. En la enseñanza tradicional, o en la enseñanza no tradicional pero que se realiza sin el apoyo de la tecnología, resulta difícil conjugar de manera productiva dichos ambientes. Actualmente el uso de la computadora apoyada mediante la aplicación de software educativo como el Cabri brinda grandes posibilidades para hacerlo. De este modo, una de las principales funciones didácticas de la computadora y el software educativo es el permitir la interacción de dichos ambientes.

5. *El fundamento y el punto de partida para la actividad mental del alumno lo constituye la situación problemática*. Una situación problemática surge cuando el individuo se percata de que entre él y la consecución de un determinado objetivo cognoscitivo existe un cierto obstáculo, una cierta dificultad. Esta imposibilidad temporal para acceder a la consecución del objetivo puede deberse a la falta de conocimientos o habilidades del sujeto, o a la falta de claridad respecto a cómo aplicar sus conocimientos y habilidades en situaciones nuevas. La situación problemática es en sí misma motivante para la actividad cognoscitiva del sujeto, quien se ve impulsado a resolver dicha situación. Por lo tanto, para conducir adecuadamente la actividad cognoscitiva de los estudiantes se hace necesario apelar al planteamiento sistemático de situaciones problemáticas durante la clase. Este postulado orienta el diseño hacia la creación de situaciones problemáticas cuyo objetivo sea estimular la actividad mental, cognoscitiva, de los alumnos.

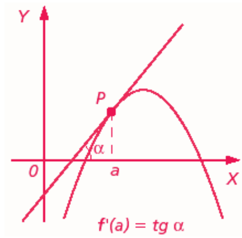
6. *La asimilación del contenido de las matemáticas por parte de los estudiantes resulta posible sólo cuando dicho contenido es presentado ante ellos como un sistema de problemas, en desarrollo e interacción, y cuya solución requiere del dominio de un sistema de acciones y conocimientos*. Este sistema de conocimientos y acciones, el "modo de acción", es precisamente lo que constituye el modelo de la actividad de los estudiantes.

Función Cuadrática

En nuestro problema de investigación nos encontramos que el objeto matemático de estudio en que centramos el interés, la función cuadrática, puede abordarse desde distintas perspectivas, es por ello por lo que vamos a caracterizar la función cuadrática desde las siguientes vertientes conceptuales, las cuales están ligadas mediante una doble conexión.

- *Expresión analítica: La expresión analítica de una función cuadrática es* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *donde* $a \neq 0$ *y el concepto de su derivada* $f'(x) = 2ax + b$.

- *Expresión gráfica: mediante su representación gráfica, que es una parábola y la recta tangente su derivada.*



Bajo el método de la enseñanza problemática, el profesor plantea ante los estudiantes un sistema de problemas metodológicos prácticos, cognoscitivos y de otra índole, y la actividad de aprendizaje de los estudiantes se reduce a resolver tales problemas. En estas condiciones, la necesidad de resolver un problema base conduce a plantear y resolver varios sub-problemas auxiliares. De esta manera se desarrolla todo el proceso, hasta resolver el problema base planteado originalmente. Bajo lo que señalamos anteriormente tomamos como principio orientador *la organización, tanto de la actividad de enseñanza del profesor, alrededor de un sistema de problemas de aprendizaje que conducen a la asimilación del contenido propuesto: Una estrategia para el estudio del tránsito visual gráfico a lo analítico de la función cuadrática y su derivada con el uso del Cabri Geometry.*

a) Otras investigaciones:

Es de suma importancia para esta investigación contar con definiciones claras, en relación al *estudio del tránsito visual gráfico a lo analítico de la función cuadrática y su derivada con el uso del cabri geometry* , debido a que conforme a la precisión de la misma se habrá de determinar la orientación que se le debe dar al desarrollo del trabajo.

5. METODOLOGÍA

Una de las ventajas indiscutibles que aportan las nuevas tecnologías a la enseñanza de la matemática es su capacidad de representación gráfica, que permite visualizar e integrar muchos conceptos y propiedades que se estudian y generalmente ayuda a dar una mejor comprensión de los mismos. Así por ejemplo en nuestro caso mediante ejemplos concretos dados en el salón de clases de funciones cuadráticas, el educando será capaz de descubrir, identificar, construir y a la vez deducir características propias de la función cuadrática.

1.Métodos y Procedimientos

A partir de nuestra experiencia y del análisis profundo tanto del currículo como de la forma en que se trabaja el concepto matemático “derivada” en los cursos y en los libros de textos, pensamos que los estudiantes son guiados a trabajar con dicho concepto, a conocer su definición, pero únicamente con el enfoque que indica el currículo, sin poner en primer lugar una enseñanza, en el sentido de CANTORAL (1988), que favorezca las distintas miradas del concepto, sus relaciones con conceptos o imágenes de estos ya adquiridas, lo que favorecería la formación de una fuerte estructura conceptual de la función cuadrática.

Se trabajó con estudiantes (5) de sexto semestre de Preparatoria, perteneciente a la Institución Educativa "Rubén Licona Rivemar", utilizando el software Cabri Geometry con cuatro sesiones, cada sesión de una hora (3 semanas). Debemos observar que distintas investigaciones han mostrado que la noción de derivada se estabiliza en el pensamiento de los estudiantes solo hasta que la noción de derivada sucesiva aparece y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas. A partir de esta base creemos que se favorecerá este proceso si el estudiante enriquece el concepto de valor numérico de la derivada de la función cuadrática con aspectos gráficos; es por ello que en este trabajo investigamos cuál es el significado gráfico que asignan los estudiantes al valor numérico de la primera derivada de la función cuadrática, cuál es el papel que juegan las definiciones del concepto, y/o la imagen del concepto, al enfrentarse a actividades que ponen en juego el valor numérico de la derivada de la función cuadrática y cómo influye.

La situación planteada: Se inicio con el concepto de derivada de una función, luego se exploran algunas representaciones de la función cuadrática: simbólica, numérica para algunos puntos y gráfica para observar el tránsito de lo visual a lo analítico de la derivada de esta función en un punto ya que la labor del profesor se circunscribe a ser un facilitador y no un transmisor que promueva con ello la construcción autónoma del aprendizaje en el alumno.

En el marco del tránsito entre representaciones como una forma de asentar los conceptos, en particular en el estudio de la función cuadrática por lo que es importante incluir actividades que demanden el paso de una representación algebraica a otra algebraica, sin descuidar el paso de una representación a otra, por ejemplo, de una descripción en el lenguaje natural, a la representación algebraica o geométrica, o de la representación diagramática la obtención de otro tipo de representación, vemos que el tipo de posibilidades se amplían notablemente, no sólo hacia la gama de posibilidades entre representaciones, sino también, en el caso de un ejemplo específico, están presentes las distintas representaciones en los elementos que se ponen en juego para la obtención de la gráfica de una función.

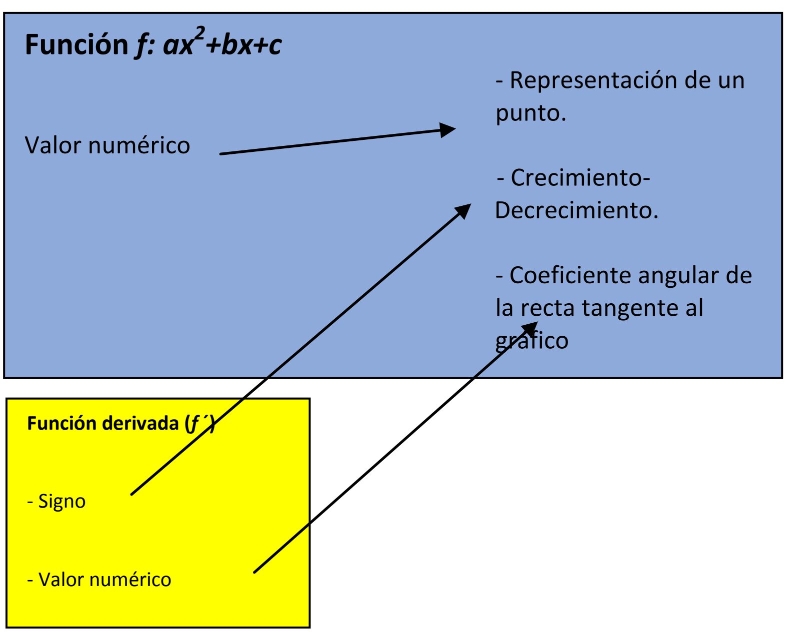
Los aspectos mencionados anteriormente llevan a que el conjunto formado por cierto concepto y sus características asociadas, parezca único e inmutable, de donde es transmitido, tanto por los textos como por los docentes, en forma muy similar a los estudiantes año tras año sin brindar la posibilidad de enriquecerlo, por ejemplo generando un espacio para descubrir características de él que no estaban establecidas en el currículo, por ejemplo como la que pone en juego esta investigación. Esta situación no parece ser exclusiva de México, nuestro grupo de investigación ha detectado esta misma situación en otros países: *en este momentos, quizá la visión más extendida entre los profesores sea aquella que asume que los conceptos matemáticos son entidades ya elaboradas y que solo deben comunicarse a sus alumnos, en una enseñanza pulcra y libres de dificultades, olvidando que esos conceptos deben ser construidos por* *sus estudiantes como herramientas capaces de tratar con varias clases de situaciones* (CANTORAL, 1988). En este sentido asumimos a la matemática como algo vivo y cambiante, con posibilidades de reorganizarse y resinificarse a partir de estudios como éste que investigan sobre cómo piensan los estudiantes ante ciertas situaciones ya sea correcta o no su respuesta. No consideramos que cierto concepto matemático esté determinado por el currículo en el cual se encuentra, ni que el "método" para "enseñarlo" sea guiar a los estudiantes por los ítems de dicho currículo, sino que en este aspecto coincidimos con las concepciones de FREIRE (1994) cuando afirma que "enseñar no es un acto mecánico de transferir a los educandos el perfil del concepto del objeto. Enseñar es sobre todo hacer posible que los educandos, epistemológicamente curiosos, se vayan apropiando del significado profundo del objeto, a que solo aprehendiéndolo pueden aprenderlo".

Al comienzo de esta investigación creíamos que en la estructura asociada al concepto "derivada" que los estudiantes habían generado, no estarían presentes significados gráficos del valor numérico de la derivada de la función cuadrática, y que el trabajar en una secuencia adecuada posibilitaría que los estudiantes reflexionaran sobre este tópico, que llevaran a un nivel consiente las limitaciones de la estructura conceptual construida en el transcurso de su escolarización y generaran significados gráficos del valor numérico de la derivada de la función cuadrática. Creemos que la secuencia, especialmente desarrollada para esta investigación, enfrentará a los estudiantes a aspectos del concepto nunca antes tenidos en cuenta, tal vez por no estar presentes en forma específica en los currículos, y permitirá que ellos descubran y propongan formas de solucionar la problemática planteada. A partir del análisis que hemos realizado de distintos elementos creemos que los estudiantes nunca se han visto enfrentados a actividades que pongan en juego el significado gráfico de la derivada de la función cuadrática, de donde las actividades propuestas serán para ello realmente situaciones problemas.

La anterior situación la podemos esquematizar en:

Esquema 1

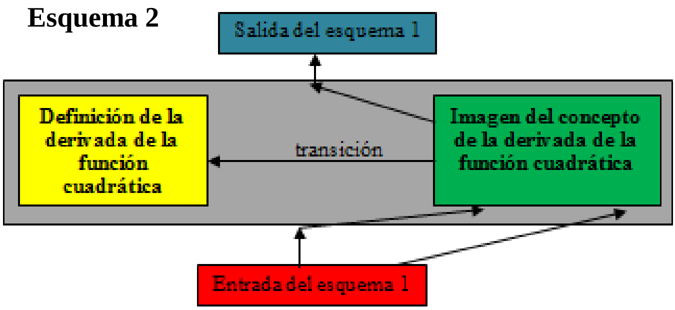
Vinculaciones entre "$f \rightarrow f'$"



Basándonos en algunos aspectos de la investigación, como la revisión bibliográfica y la visita a clase, creemos que, en una primera instancia, los alumnos no darán significado gráfico al valor numérico de la derivada de la función cuadrática ni se esforzarán a hacerlo. Creemos que una de las causas de esta actitudes es que en los programas de estudio no se establece trabajar, y menos significar, el valor numérico de la derivada de la función cuadrática, y deviene lógico que los entrevistados den, en primer instancia, respuestas del tipo “esto no me lo enseñaron” o “no sé qué significa” y no intenten dar respuesta a las actividades que los enfrentan a significar este concepto. “La enfermedad didáctica también consiste en creer que, para que alguien aprenda algo, tiene que recibir un curso, o recibir clases sobre ese algo” (CHEVALLARD, 1997).

A pesar de lo planteado en el párrafo anterior, esperamos que, por la forma que fue estructurada la secuencia, los alumnos se cuestionen a lo largo de toda la secuencia, tal vez por primera vez, posibles significados gráficos del valor numérico de la derivada de la función cuadrática, que realicen conjeturas, las discutan y traten de validarlas. Es por eso que creemos que la visualización del concepto de derivada de la función cuadrática con ayuda del *Cabri Geometry* si influya en que su transición sea más sencilla y pueda comprender este significado, presentamos el siguiente esquema que nos ayudara a cumplir nuestros objetivos. En nuestro trabajo, con relación a la visualización, nos basaremos “En un sentido más amplio, la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje de quien aprende. Ahora bien, realizar la actividad de visualización requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a lo numérico, gráfico o algebraico, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales. La visualización entonces, trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diversas representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado y, sobre todo, de la participación en una cultura particular al compartir símbolos y significados" (CANTORAL y MONTIEL, 2003) Deseamos explorar en nuestro estudio si los estudiantes visualizan por medio de gráficos las situaciones problemáticas que involucran valores numéricos de la derivada de la función cuadrática.

Esquema 2



Como expusimos en el punto anterior, que el alumno sepa enunciar la definición del concepto no asegura su construcción; a esto debemos sumarle que los estudiantes no consultan en forma natural la definición, sino que consultan, por lo menos algunos en principio y muchos en forma permanente, la Imagen del Concepto asociada a éste. Además, para que esa imagen conceptual sea suficiente para enfrentar problemas de cálculo, y en especial problemas relacionados con las derivadas de distintos órdenes de una función.

Al introducir el tema derivada de una función en un real, tanto en los libros de textos escolares, como en los desarrollos de los cursos, se trabaja observando la variación de la recta secante para determinar que el límite de la esta recta es la recta tangente al gráfico. Pero luego este tipo de razonamiento es dejado de lado y se pasan a calcular analíticamente límites, no se realizan interpretaciones gráficas que permitan reforzar la idea de variación.

La enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. De modo que aun siendo capaces de derivar una función, no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación. Así también, pueden encontrar una derivada sin asumir que el resultado obtenido mediante la derivación sea a su vez una nueva función susceptible de derivación. De modo que podemos encontrar entre los estudiantes consideraciones como las siguientes: Si $f(2)=0$, entonces $f'(2)=0$, pues f en 2 es constante. O bien, si $f(x)=x^2$, entonces $f'(x)=2x$. Si se estimula al estudiante a visualizar la función, sus derivadas sucesivas, con trabajos como el presentado en el párrafo anterior, pensamos que se podrían disminuir las dislexias antes presentadas.

Según DE GUZMÁN (1996), “la visualización ha sido la tónica general en el trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos. Uno u otro tipo de imagen acompaña constantemente sus especulaciones, probablemente aun las más abstractas, aunque la naturaleza de esta imagen presenta una variedad de individuo a individuo mucho mayor de lo que sospechamos. La visualización, como vemos por estas muestras, ha jugado un importante papel en el desarrollo del pensamiento matemático. Como tenía que ser, dada la naturaleza cognoscitiva del hombre, tan condicionada por los elementos visuales, intuitivos, simbólicos, representativos, y como corresponde a la naturaleza de la matemática y a sus propósitos.”

Entonces, ¿no deberíamos considerar como una de las condiciones necesarias para que el alumno entienda el concepto de derivada es que pueda visualizar el concepto? Como, por ejemplo, estando en condiciones de esbozar el gráfico de una función f / $f'(2)=-3$ y $f''(2)=5$. ¿O deberíamos creer que solamente conociendo la definición del concepto “derivada” es que ya lo ha incorporado?.

En nuestra opinión, no debemos creer que visualizar es un sustituto superficial de entender, sino que es un componente más del entendimiento, relaciona cada concepto matemático con la imagen conceptual asociada a él. Encontramos que muchos autores presentan una dicotomía entre lo analítico y lo visual, en muchos casos se apoya la visualización, en otros se la deja de lado por no ser “matemática”, también encontramos el modelo propuesto por ZAZKIS, DUBINSKY y DAUTERMANN (1996) en el cual proponen que lo analítico y lo visual son mutuamente dependientes: "*We propose an alternative model, the Visualizer/Analyzer or VA model, that assumes visualization and analysis to be mutually dependent in mathematical problem solving, rather than unrelated opposites. Our model provides one description of how this mutual dependence might function. We end by considering how pedagogical approaches might be designed in consonance with this model to help students coordinate visual and analytic thinking*". Nosotros compartimos esta opinión, por un lado creemos que la visualización es necesaria en matemática, en cálculo, y en especial en nuestro tema de estudio, pero debe establecerse una relación entre los aspectos visuales y los analíticos del problema, o concepto dado.

Como dijimos antes, creemos que al pensar en una función no derivable en x=3 viene a la mente el gráfico de una función que lo cumpla antes que su expresión analítica. Pero esto no significa que por imaginar un gráfico que aparentemente no es derivable en un real se ha construido el concepto de derivabilidad. A esto le sumamos que debemos estar prevenidos de los peligros involucrados en la visualización, estar consciente de estos peligros debe llevarnos a analizar las figuras "más allá de lo que los ojos ven". Este tipo de análisis de las figuras ayudará a que se construyan los conceptos involucrados. Creemos que para que un estudiante pueda construir el concepto de derivada debe haber incorporado a su imagen conceptual características gráficas de dicho concepto, pero además debe ser consciente de los "malas interpretaciones" que pueden tener dichas imágenes y poder reflexionar sobre ello. Al enfrentarse a situaciones donde las estrategias visuales y analíticas son posibles, las personas pueden aprender combinando estas dos maneras de pensamiento.

Veamos a continuación un ejemplo que ocurre muy frecuentemente en las aulas y que lleva a que la matemática instrumental cercene a la matemática relacional llevando a un empobrecimiento de la capacidad de desarrollo intelectual de los estudiantes:

En el estudio gráfico y analítico de funciones reales, los estudiantes en general “siguen” ciertos pasos:

- Estudio del dominio de la función.

- Calculo del límite en puntos de discontinuidad.

- Determinar las asíntotas.

- Derivar la función, deducir intervalos de crecimiento, decrecimiento.

- Estudio de los puntos de no derivabilidad.

- Cálculo de extremos relativos.

- Derivada segunda, deducir intervalos de concavidad positiva, de concavidad negativa.

- Cálculo de puntos de inflexión, tangente al gráfico en dichos puntos.

Encontramos muchos docentes y libros de texto que indican que se deben seguir este recetario, sino el estudio de una función está incompleto. Aspecto que sabemos no es real.

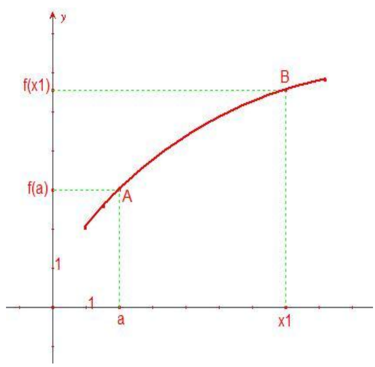
2.Evidencias del tratamiento escolar

Observación de clases

Por lo que respecta a la derivada, diremos que ésta se introduce al seno escolar como una medida de la inclinación de la recta tangente a una curva. Es decir, el concepto de derivada se presenta en clase mediante una explicación que utiliza a la pendiente de la recta tangente a los estudiantes de entre 16 y 18 años de edad. Ello presupone que la noción de pendiente, que fue introducida a estudiantes de entre 12 y 14 años de edad, haya adquirido una cierta estabilidad funcional. Una vez definida la derivada como "la operacionalización de la estrategia visual anterior, se suele iniciar su tratamiento más bien algorítmico y teórico que consiste en enseñar a derivar diversas funciones y a demostrar algunos teoremas" (CANTORAL 1988).La profesora me indica que en la clase anterior se trabajó ecuación de la recta. Se vieron los casos: ecuación de la recta que pasa por dos puntos, ecuación de la recta conociendo su coeficiente angular y el punto de corte con el eje de las ordenadas ($y = mx + n$), y ecuación de la recta que pasa por un punto dado con coeficiente angular dado $(y - y_0) = m(x - x_0)$.

Comenzamos la clase dibujando en la pantalla de la computadora parte de la función cuadrática, estas características no son indicadas a los alumnos. Al realizar el gráfico indica "supongamos que esta gráfica corresponde a la de una función f que relaciona el tiempo transcurrido con la posición de un móvil, si llamamos "*x*" a la variable tiempo, *f*(*x*) indica la posición del móvil en el instante *x*".

☞**Profesora:** Consideremos dos puntos *A* y *B* de la gráfica, si sus coordenadas son $A(a,f(a))$ y $B(x_1,f(x_1))$, ¿qué significa?



☞**Alumnos:** Quedan en silencio.

P: ¿Qué significa que el punto *A* pertenezca al gráfico de *f*, ¿qué relación hay entre las coordenadas, qué significan esas coordenadas en esta función?

A: Que a "*a*" le corresponde *f*(*a*).

P: Sí, ¿y qué significan esas variables?

A: x es tiempo y $f(x)$ la posición.

P: Sí, pero, ¿qué relación hay entre ellas en el caso que A pertenece al gráfico?

A: ... que para el instante "a" el móvil está en $f(a)$

P: Muy bien, en el instante "a" el móvil se encuentra en $f(a)$, y ¿qué relación indica B?

A: Lo mismo.

P: ¿Qué?

A: ...que en el instante $x1$ el móvil se encuentra en $f(x_1)$.

P: Bien. Así que tenemos un móvil del cual sabemos que en el instante "a" su posición es $f(a)$ y en el instante "$x1$" su posición es $f(x_1)$. ¿Cómo calculan en física la velocidad media del móvil entre los instantes "a" y "$x1$"?

A: Dividiendo las diferencias.

P: ¿Qué significa eso?

A: Restamos las "*f*" y las "*x*" y las dividimos.

A: Calculamos los deltas y los dividimos.

P: Pase uno al pizarrón donde se refleja el gráfico hecho en Cabri Geometry a hacerlo.

Pasa un alumno 1, escribe: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

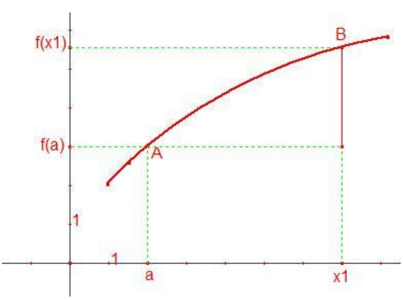
P: ¿Qué significa eso?

A: La resta.

A: La diferencia.

P: Por favor escribe como calculas esos deltas.

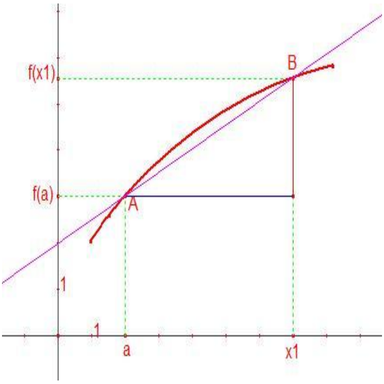
Alumno, escribe $\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}$



P: Muy bien. ¿Dónde estaría representado en el gráfico esta diferencia? (La profesora indica con el dedo *f*(*x*1)-*f*(*a*)). El alumno toca con el dedo el segmento determinado por los puntos (0,$f(a)$) y (0,$f(x_1)$).

P: Observa que ese segmento es igual a este (toca el segmento determinado por *B* y la proyección ortogonal de $(0,f(x_1))$ sobre la recta determinada por *B* y $(x_1,0)$).

J: Sí... es lo mismo...



P: Márcalo con rojo por favor.

El alumno marca: (Figura #2)

P: ¿Y la otra diferencia?

A: Abajo.

A$_1$: Acá (toca el segmento determinado por $(a,0)$ y $(x1,0)$).

P: Sí, pero ese segmento es igual a...

El alumno1 mira al pizarrón. Otro alumno le dice "arriba, el que está arriba".

A$_1$: Ah, sí, éste.

P: Márcalo con azul.

Alumno 1, marca el segmento buscado: (Figura #3)

P: Bien, gracias.

Alumno 1, se sienta.

P: ¿Qué relación hay entre este cociente y el gráfico?

A: Es la velocidad media.

P: Si, del móvil, ¿pero dónde, en el gráfico, vemos representado este cociente?

A: Silencio.

P: Tracemos la recta que determinan los puntos *A* y *B*...Llamémosle *C* a este punto.

A: Queda un triángulo rectángulo

P: Muy bien. Observemos ese triángulo *ABC*, ¿qué indica el cociente? (marca el cociente incremental)

A: Son los catetos.

P: Sí... Observen el triángulo y la recta, ¿qué relación indica este cociente?

A: Ah!!!!!! Esa cosa de la recta...el ángulo.

A: El angular... espere (Busca en el cuaderno) El coeficiente angular!!

A: Sí, eso.

P: Muy bien, ¿y qué significa el coeficiente angular? ¿Qué relación hay entre este coeficiente y la recta?

A: La tangente!!

P: Sí, la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas, llamémosle α_{AB} (lo anota en el dibujo). Pase uno a escribir la ecuación de esta recta.

Alumno 2: ¿Puedo usar el cuaderno?

P: Claro, *Pasa Alumno 2 y escribe: y = mx+n.*

P: ¿Cuál sería el coeficiente angular de esta recta?

Alumno 2, toca el cociente $\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}$ *ya escrito por alumno 1 en el pizarrón, la profesora lo recuadra.*

P: ¿Cómo le podemos llamar?

A_2: Coeficiente.

P: Muy bien, pero, ¿con qué letra lo podemos indicar?

A: *m*.

P: Bien, llamémosle m_{AB} porque es el coeficiente angular de la recta *AB* (escribe m en el recuadro) Entonces, ¿qué representa este cociente?

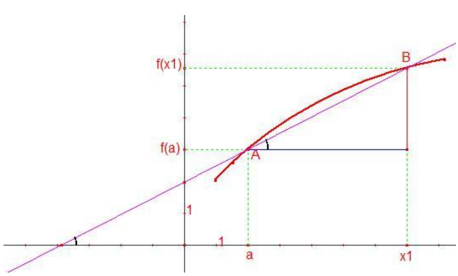
$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} \longrightarrow m_{AB}$$

A: Al coeficiente angular.

P: ¿De qué?

A: De la recta.

P: Muy bien, entonces el cociente (toca el C.I.) corresponde al coeficiente angular de la recta *AB* e indica la velocidad media del móvil en el intervalo $[a, x1]$. Recordemos que m_{AB} = tg α (agrega esta igualdad al recuadro). (Figura #4)



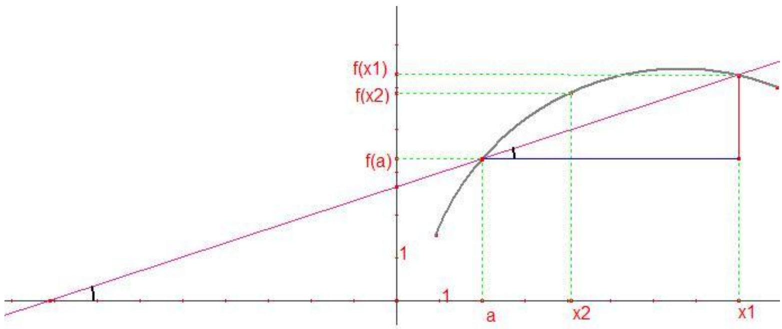
$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} \rightarrow m_{AB} = tg\alpha_{AB}$$

P: Si queremos ahora calcular la velocidad media en otro intervalo [a, x_2], ¿cómo haríamos?

A: Lo mismo.

P: Pase uno a hacerlo.

Pasa alumno 3. Ella considera un punto sobre el eje a la derecha de x_1, la profesora le indica que desea calcular la velocidad media en un intervalo menor, que considere el nuevo punto entre a y x_1. La alumna 3 considera x_2 entre a y x_1, el punto del gráfico que le corresponde esa abscisa y la ordenada de este último. Luego realiza el mismo razonamiento y escribe: (Figura #5)



P: Bien, gracias. Ahora quiero seguir calculando velocidades medias de intervalos [a, x_i] a medida que xi se aproxima a "a". No haremos todas las rectas porque rayaríamos mucho el gráfico y no podríamos ver que está ocurriendo. Pase uno con una regla y la vamos ubicando como si fueran las distintas rectas.

Pasa alumno 4, al pizarrón regla en mano.

P: ¿Que harás ahora?

$$\frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a}$$

A_4: Tomo otro punto.

α_{AB}

P: Bien, ¿dónde?

A_4: Acá (marca un punto entre a y x_2).

P: Bien, ¿cuál sería la recta ahora que debes considerar?

Alumno 4, coloca la regla sobre A y un supuesto B_3 de abscisa x_3.

P: Bien. Si ahora consideramos otro...

Alumno 4, marca un supuesto x_4 y pone la regla sobre A y un supuesto B4.

P: ¿Qué ocurre con esos puntos del gráfico?

A: Se acercan a *A*.

P: Muy bien. ¿Están todos de acuerdo?

A: Sí.

P: ¿Y que pueden decir de las distintas rectas AB_i?

A: Silencio.

P: Anda colocando la regla de las formas que irían variando las rectas secantes. ¿A qué se van acercando?

A: Pasan por *A*.

A_4: A la tangente.

P: Muy bien. Observen que todas las rectas AB_i pasan por *A*, pero se van aproximando a la recta tangente al gráfico en *A*.

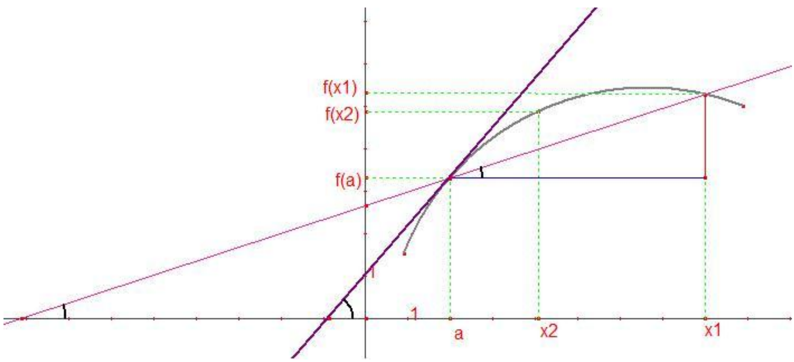
La profesora toma la regla y hace el movimiento que irían haciendo las distintas secantes.

P: ¿Ven que se van aproximando a la tangente en *A*?

A: Sí.

P: Bien, tracémosla entonces. Llamémosle α al ángulo que forma con el eje de las abscisas.

La profesora traza en la computadora una la recta tangente al gráfico en A, de color lila (Figura #6)



α_{AB}

α_{AB}

α

P: Resumiendo, *x* se aproxima a "*a*" (escribe *x* → *a*) entonces *B* se aproxima a ...

A: *A*.

P: Bien (escribe. *B*→*A*), la recta *AB* se aproxima a...

A: La tangente.

P: Bien, llamémosle t a la recta tangente al gráfico en A (escribe $AB \rightarrow t$). El ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas, α, ¿a qué se aproxima?

A: Silencio.

P: Observen, la rectas *ABi* se aproximan a la recta *t*, los ángulos que forman esas rectas se van a aproximar... (Con la regla va mostrando el supuesto movimiento de las rectas e indica con el dedo el ángulo en cuestión).

A: Al de la tangente.

P: Claro. El ángulo que forman las distintas secantes con el eje de las abscisas tiende al ángulo que forma la recta tangente con el eje, le habíamos llamado α. (Escribe $\alpha_{AB} \rightarrow \alpha$). Y el coeficiente angular de las rectas AB_i ¿a qué se aproxima?

A: ... al de la tangente.

P: Bien, llamémosle m (escribe $m_{ABi} \rightarrow m$).

P: En este ejercicio en concreto, ¿qué indicaba este cociente?

A: El coeficiente angular.

P: Si, muy bien, pero... ¿qué estábamos intentando calcular?

A: La velocidad.

P: La velocidad media del intervalo [a,x_I]. Entonces, si *xi* se aproxima a "*a*", ¿la velocidad media a qué se aproxima?

A: Silencio.

P: Si estamos calculando la velocidad media de un intervalo [a,x_i] cada vez más chiquito, *xi* se está acercando a "*a*", ¿la velocidad media se está pareciendo a qué?

A: Silencio.

P: ¿No recuerdan de física la velocidad instantánea?

A: Sí.

P: Bien, entonces, si el intervalo de tiempo considerado cada vez es menor, es "*a*" y un poquito más, es casi como estar calculando la velocidad en "*a*". ¿Entienden?

A: Sí.

P: Bien, entonces, la velocidad media de los intervalos [*a*,*xi*] cuando *xi* se aproxima a "*a*" se aproxima a...

A: La velocidad en "*a*".

P: Muy bien, a la velocidad instantánea del móvil en el instante "*a*". Recordemos que el cociente se aproxima al coeficiente angular de la recta tangente.

3.Entrevista a docentes

Se realiza una encuesta, y en los casos necesarios una posterior entrevista, a docentes que dictan el curso de matemática. Con ella se espera descartar, o apoyar, nuestra hipótesis de que éste tema es trabajado en forma muy similar, por razones ya antes expuestas, por la mayoría de los docentes.

La encuesta es realizada en forma oral para que los docentes no leyeran las siguientes preguntas antes de haber respondido la correspondiente. De esta forma sus repuestas no estarían influenciadas por las próximas preguntas. Sus respuestas son registradas en forma escrita y al terminar la encuesta, si cabía alguna aclaración extra u otra pregunta, se realizaba la entrevista.

A partir de la encuesta podemos deducir que:

- Todos los docentes entrevistados introducen el tema "derivadas" a partir de su interpretación gráfica.

- Otorgan un significado al signo del valor numérico de la función derivada primera y a dicho valor numérico en si (el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico en el punto en cuestión).

- Los docentes no utilizan ayuda de herramientas electrónicas, para que el estudiante observe de forma visual el concepto de la derivada de la función cuadrática.

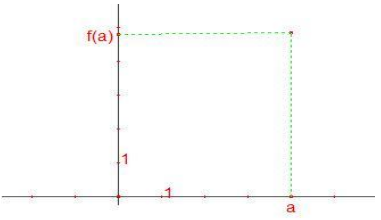
La encuesta confirmó nuestra hipótesis, la totalidad de los profesores encuestados no trabaja el valor numérico de la derivada de la función cuadrática en sus cursos. Además, la celda correspondiente a la imagen del concepto, evocada en el momento de la entrevista, o es muy pobre o se encuentra vacía.

Entonces, ¿qué significado tiene el valor numérico de esta función para alumnos y docentes? ¿Qué diferencias podemos encontrar entre una función *f* y otra *g* un entorno de un real "*a*" si $f''(a) = 5$ y $g''(a) = 8$? ¿Qué diferencias podemos encontrar en los gráficos de dichas funciones al cumplirse estas condiciones? ¿Qué significado asignan los alumnos y docentes a estas dos expresiones? ¿Cómo construyen este significado los estudiantes?.

CANTORAL, (1988) señala que "la enseñanza habitual del análisis matemático logra que los estudiantes deriven, integren, calculen límites elementales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión".

De modo que aun siendo capaces de derivar una función, no puedan reconocer en un cierto problema la necesidad de una derivación. Así también, pueden determinar la función derivada de una función dada sin asumir que el resultado obtenido mediante la derivación sea a su vez una nueva función susceptible de derivación".

Compartimos la tesis de las investigaciones que forman parte de los antecedentes de ésta, en las cuales se considera que la noción de derivada se llega a estabilizar en el pensamiento de los alumnos cuando se adquiere la comprensión de las derivadas sucesivas. Para ello no es suficiente que solo se conozcan, y se aplique exitosamente, las reglas de derivación. Creemos que se debe construir un significado al valor numérico de la derivada de la función cuadrática, lo que luego permitirá poder estudiar su variación. Lo cual tendrá varios aspectos positivos, por un lado puede ayudar a estudiar la variación de la derivada de la función cuadrática, y por otro, lograr visualizar este concepto permitirá que éste sea resignificado de una forma más rica.

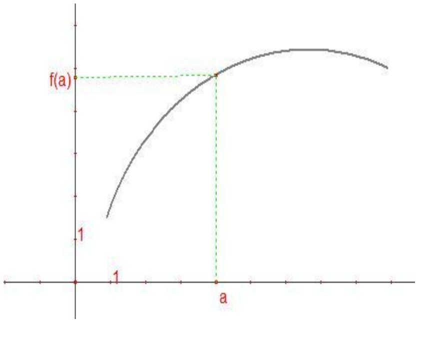


"En nuestras experiencias con profesores en servicio en la educación media y superior y con sus estudiantes hemos constatado que en caso de que logren incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, entonces manejan a la función no solo como objeto sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad, en otras palabras, en caso de tener un dominio del contexto geométrico/visual tanto en la algoritmia, la intuición, así como en la argumentación será posible el tránsito entre las diversas representaciones.” (Cantoral, 1988). “El problema didáctico en consecuencia, estriba fundamentalmente en la dificultad cognitiva para adquirir maestría en el contexto geométrico, por ejemplo, en el plano de la argumentación es mucho más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que geométricamente, razón por lo que en la enseñanza se acude al refugio algorítmico con facilidad.” (CANTORAL, 1988).

Analizaremos ahora algunos de los aspectos matemáticos del problema:

Si de una función real *f* sabemos que *f*(*a*)=*b*, podemos asociar esta información analítica a una imagen visual. Sabemos que el punto *A*(*a*, *f*(*a*)) pertenece al gráfico de *f*. (Figura #7)

Figura #8



Si además sabemos que *f* ´(*a*)= *c*, podemos asegurar que:

1) *f* es continua en *x*=*a*, entonces podemos afirmar que existe un entorno de *a* en el cual existe *f*(*x*), por existir el límite de

f(*x*) cuando "*x*" tiende a "*a*". Podemos visualizar estos datos en un gráfico: (Figura #8)

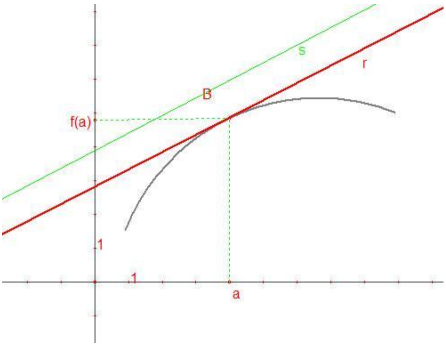
2) el gráfico de *f* (llamémosle *G*) será tangente en *x*=*a* a una recta de coeficiente angular *c*, llamémosle *r*.

Una posible imagen que acude a nuestra mente al pensar en una recta de coeficiente angular "*c*" es una que pase por el origen y cumpla dicha condición. A esta recta le llamaremos *s*.

Como además sabemos que la recta buscada (*r*) es tangente a *G* en el punto *A*(*a*,*f*(*a*)) debemos trasladar la recta *s* hasta el punto *A*. Para ello debemos determinar la traslación que hace corresponder *s* con *r*.

Observemos que una traslación, tal vez la más natural a elegir, es la traslación de vector *BA* (T_{BA}). Se cumple que T_{BA} (*s*) = *r* y T_{BA} (*B*) = *A*.

Figura #9



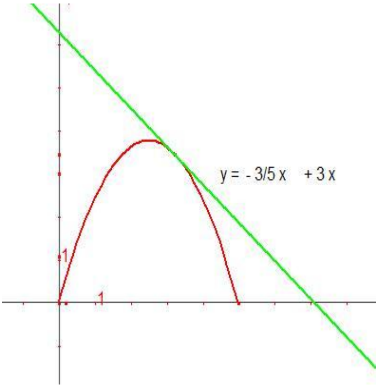
Pero, debemos prestar atención a que si elegimos cualquier punto (*C*) de la recta *s* se cumple que T_{CA} (*s*) = *r* y T_{CA} (*C*) = *A*, siendo *r* la recta tangente al gráfico *G* en *A* buscada. Tal vez por eso no se hace tanto hincapié en la posibilidad de elegir distintos puntos de la recta *s*, dado que el más fácil de elegir es el que tiene igual ordenada que *A*.

Como la condición de tangencia es una condición local, se cumplen las condiciones en un entorno de $x=a$. Sería algo así como preguntarnos qué "parte" de la recta *s* debemos "llevar" hasta el punto *A*. Además, es seguro, que no importa la "parte" de la recta elegida para que en una traslación quede tangente a *G* dado que en cualquier traslación la imagen de una recta es otra recta paralela a ella.

Hasta el momento sabemos de la función *f* que: $f(a)=b$

- $f'(a)=c$

Podemos visualizarlo gráficamente: (gráfica #10)



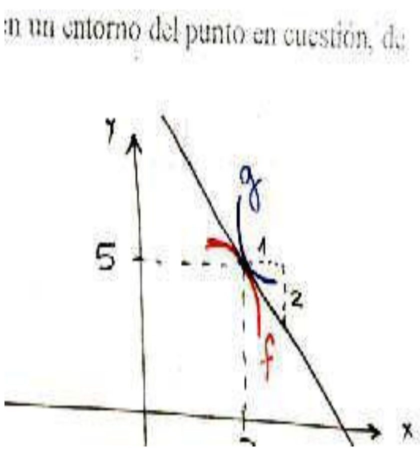
Para incorporar esto debemos:

1) Aceptar que hay una única función polinómica de segundo grado que aproxima mejor a la función en $x=a$.

2) Reconocer que hay una familia de parábolas cuya expresión analítica tiene coeficiente principal $\frac{f''(a)}{2}$ que son congruentes por medio de una traslación. A esta familia de parábolas de llamaremos FP_k, siendo $k = \frac{f''(a)}{2}$

Analíticamente:

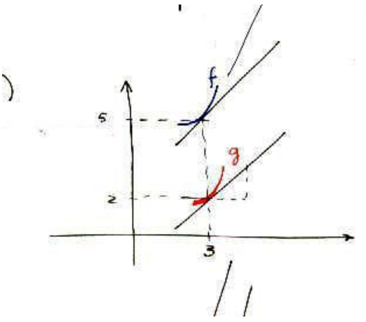
La recta t tiene por ecuación $y = mx+p$ con $m = f'(a)$ entonces la ecuación de $t1$ será de la forma $y = f'(a)\, x+ q$, como la ecuación de $P1$ es de la forma $g(x) = 2\ f''(a)\ x2$, debemos determinar el valor de x para el cual $g'(x) = f'(a)$: $g'(\mathrm{x})=f''(a)\, x$, entonces $f''(a)\, x = f'(a)$ si y solo si $x = f'(a) / f''(a)$.



Visualmente:

Teniendo graficada la función $g_1(x) = \frac{f''(a)}{2}$, la función f y su recta tangente (t) en el punto A, se puede buscar aproximar la recta tangente ($t1$), con tecnología o no, al gráfico de g_1 que sea paralela a la recta tangente t.

Esto permitirá que se pueda determinar, o mejor dicho darnos una idea de la "parte" de la parábola que al trasladarla será tangente a la función dada.



Creemos que sería conveniente utilizar tecnología que permita determinar exactamente las funciones involucradas, pero con un programa que permita "mover" los gráficos, trasladarlos, se podrá hacer un buen tratamiento del tema desde un contexto visual.

Nos interesa enfatizar una de las observaciones que realiza GARCÍA (1998) en su tesis de maestría titulada: "Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo", dado que encontramos que, la forma como se introduce el tema "derivadas", en los cursos que ella ha investigado en México es similar a la forma de introducirlo en Panamá: "Encontramos hoy en día que el concepto de derivada se introduce en la enseñanza a través del concepto de pendiente de la recta tangente, el cual se presenta a los estudiantes, de manera gráfica, observando que las rectas secantes se mueven hacia la recta tangente".

De lo anterior, y de la revisión de textos presentada, podemos señalar que la introducción al concepto de derivada, y en particular al concepto de valor numérico de la función derivada primera, tiene su base en una interpretación gráfica de ella. Dado que reconocemos obstáculos epistemológicos asociados al concepto de recta tangente es que no hemos incluido en nuestra investigación casos que enfrenten al estudiante a dichos obstáculos, pues no son ellos nuestro objetivo de estudio.

DOLORES (1999) realizó un trabajo experimental con cuatro estudiantes con el objetivo de que afloraran los obstáculos de naturaleza epistemológica que los estudiantes presentan, así como la forma en que ellos tratan de construir el concepto de derivada en su perspectiva geométrica. Los obstáculos detectados en la experiencia:

- El trazado de tangentes a curvas no cónicas. Primero manifiestan que no es posible, luego realizan distintos intentos para trazarla, entre ellos la adaptación de métodos clásicos por ellos conocidos.
- La transición de la concepción global a la concepción local de tangencia. Para superar la crisis a la que se enfrentan por su concepción clásica griega de tangente trazan la recta tangente teniendo cuidado de no prolongarla para que no corte nuevamente a la curva. En los casos que la vuelve a cortar dicen que es tangente y secante a la vez.
- Trazado de rectas tangentes en puntos de inflexión. Consideran que es imposible trazar una recta tangente por dicho punto.

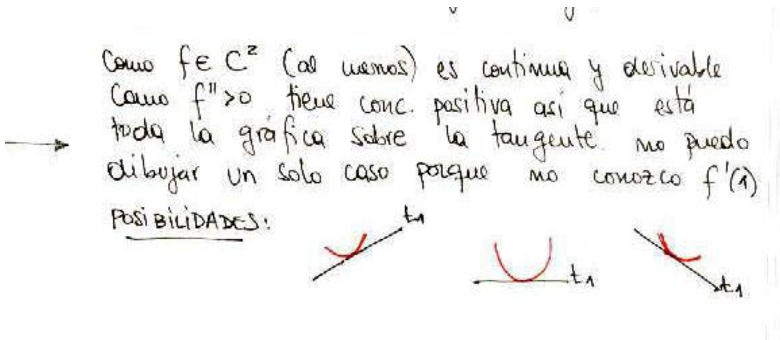
CANTORAL (1988) por su parte, investiga los aspectos conceptuales de la evolución de la noción de tangente y sus relaciones con la de derivada y se centra en los obstáculos didácticos de origen epistemológico que revelan dificultades inherentes al concepto mismo. Algunas de ellas:

- "El estudiante no se percata de que la forma usual de calcular la derivada en un punto, requiere que la variable independiente tome el valor prohibido"
- El estudiante no admite que la recta tangente a una curva diferenciable sea única.
- El estudiante no acepta que mediante un proceso infinito logre obtener la pendiente de la recta tangente.

Basándonos en estas investigaciones es que hemos sido cuidadosos al elegir las situaciones que formarían parte de la secuencia que presentaríamos en nuestra investigación. En nuestra secuencia no presentamos a los estudiantes a estas situaciones tan estudiadas que implicarían enfrentarlos a un obstáculo epistemológico del concepto recta tangente a una curva. Si no que construyeran ellos mismos sus conocimientos. Es claro que la posibilidad de representación gráfica permite abordar una amplia gama de conceptos y aplicaciones, utilizando la tecnología. Por otra parte, al editar las operaciones aritméticas de forma muy similar a como lo haríamos con lápiz y papel, permite una mejor visualización de los cálculos que realizamos. Fundamentalmente, el interés de usar este tipo de herramientas es aprovechar el poder de la visualización para mejorar la comprensión de conceptos y utilizarla como herramienta útil para el estudio y resolución de determinados problemas, en particular los relacionados con la función cuadrática.

6. ANALISIS DE LOS RESULTADOS

La presentación y enseñanza de la derivada de la función cuadrática, ha sido uno de los temas que generalmente, ha tenido serios problemas de conceptualización y entendimiento en los educandos. El tipo de metodología empleada por el docente para la enseñanza de este tema se ha caracterizado por ser una de carácter meramente tradicionalista y sin sentido para el educando, la cual se refleja en su rendimiento académico. En este apartado mostraremos, luego de estar en el aula de clase con los cinco estudiantes, el análisis que obtuvimos de esta información, que se ubican en diversos momentos del diálogo.



"...si la noción de derivada se acompaña de la definición y la explicación que aparece en la didáctica actual, entonces se está destinando al estudiante a reducirse a la algoritmia, como resultado de su incapacidad para comprender."

Es evidente que han logrado visualizar la situación planteada, que han podido convertir información del registro gráfico a otros y viceversa. La visualización de los distintos conceptos involucrados fue clave al momento de definir la conjetura final, dado que ella permitió establecer las primeras, presentar contraejemplos, etc.

Los estudiantes, en esta oportunidad, confunden con frecuencia el signo de la derivada con el de la función, en otro caso, recuerdan que las pendientes de las tangentes a la curva determinan el signo de la derivada, de modo que se tendrá para pendientes positivas correspondientes derivadas positivas. Este cambio de registro, la pregunta planteada en el contexto simbólico con apoyo visual, y la respuesta construida en el contexto visual, resulta mucho más complicado para los estudiantes y ello se expresa en dos sentidos, por un lado la proporción de respuestas acertadas es bajo y por otro las explicaciones que utilizan son escasas y evidentemente escuetas.

Los estudiantes dan evidencias de haber generado una nueva imagen asociada al concepto valor numérico de la derivada de la función cuadrática, la cual contiene aspectos de significación gráfica. Es interesante destacar que los alumnos, primero en forma independiente, y luego en equipo han generado imágenes asociadas a este concepto que al verbalizarlas parecen muy similares.

Suponemos entonces que lo que ha consultado para resolver las situaciones planteadas es su imagen asociada al concepto, la cual ha sido suficiente para resolver varias de las situaciones planteadas en cuanto a la función derivada primera. Dado que la imagen asociada al concepto en juego es suficiente para resolver las situaciones planteadas no se hace necesario, para los estudiantes en esta instancia, consultar la definición de este.

Por primera vez se hace explícita una seudo definición de derivada de la función cuadrática, y junto a ella la puesta en palabras de imágenes asociadas al concepto derivada primera, esta combinación parece haber ayudado al estudiante a significar gráficamente al valor numérico de la derivada de la función cuadrática.

En el diálogo que presentamos anteriormente no colocamos este que nos parece muy interesante, analizar detenidamente:

Alumno1: Yo razoné la derivada es la pendiente de la tangente en a. La derivada primera de una función es hacer $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Alumno2: El límite.

Alumno1: El límite de eso.

En este diálogo A_1 hace explícita la utilización de una seudo definición de derivada primera en x=a, además muestra relaciones entre este concepto y otros que pueden estar presentes en la imagen asociada a dicho concepto.

Era de esperar que la imagen asociada a conceptos que los estudiantes ya habían trabajado no estuviera vacía, muestras de ello hemos dado en las anteriores transcripciones, pero no así la asociada al concepto que implica la representación gráfica del valor numérico de la derivada de la función cuadrática. Entonces, dado que los estudiantes no han dado indicios de utilizar muchas de las definiciones involucradas, y han hecho explícita la no utilización de otras, es que consideramos que la imagen conceptual asociada a los conceptos ya conocidos, que se ha puesto en juego ha sido suficiente, en la mayoría de los casos, para resolver las situaciones que les hemos planteado. En cambio, frente a la asignación de significado gráfico al valor numérico de la derivada de la función cuadrática, su imagen del concepto "pendiente de la recta tangente en ese punto". Esto último ha llevado a que los estudiantes modificaran su imagen asociada a este concepto generando un nuevo concepto del cual, en algunos casos, han intentado dar una definición.

El estudio de la parábola cuya expresión es de la forma $f(x)=ax^2$ permitió a estos estudiantes observar similitudes y diferencias en el comportamiento de sus gráficos y a partir de allí generar conjeturas sobre el significado gráfico del valor numérico de la derivada de la función cuadrática. Este diálogo evidencia que por lo menos dos estudiantes han puesto en juego el concepto de la recta tangente. Nuevamente el estudio de las parábolas les permite establecer una relación “por dentro” que será base de sus conjeturas.

Por otra parte, la enseñanza de la matemática constituye realmente una tarea bastante difícil, tanto para los alumnos como para los profesores, por ser esta una de las ciencias con un alto grado de abstracción, sin embargo el uso de las tecnologías informáticas ofrecen a profesores la oportunidad de crear ambientes de aprendizaje enriquecidos para que los estudiantes perciban la matemática como una ciencia experimental y un proceso exploratorio significativo dentro de su formación.

La necesidad de dar un verdadero salto y cambio al uso adecuado de la tecnología en pro al mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en los salones de clase, haciendo frente a un nuevo perfil, a un nuevo currículo escolar que permita lograr en los educandos miembros activos, analistas, de pensamiento crítico y autónomo cumpliendo así con las necesidades y exigencias de este mundo globalizado y rápidos cambios tecnológicos.

CONCLUSIONES

Hemos presentado y analizado algunas evidencias de que el tratamiento curricular que se tiene al tema “Estudio analítico y representación gráfica de funciones” (EARG) en México, puede generar en los estudiantes un tratamiento instrumental de los conceptos y no permitir el desarrollo de su carácter relacional. El estudiante puede realizar exitosamente el EARG de una función realizando solo un tratamiento basado en técnicas algorítmicas, en la utilización de tablas, con la aplicación de reglas sin razones, y además realizando un proceso intelectual que implique solo el consultar la imagen asociada a los conceptos involucrados y no las definiciones de ellos. También hemos mostrado que este tipo de tratamiento no hace necesario el que el estudiante ponga en juego aspectos de su pensamiento, por lo que no posibilita el desarrollo fundamental en el entendimiento relacional del tema.

Dado que por un lado consideramos imprescindible el desarrollo del pensamiento de los estudiantes para trabajar con amplitud los temas del cálculo o análisis, además de que es la hipótesis de nuestro equipo a fin de que el estudiante logre formarse la noción de derivada sucesiva, establecer un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas, se deben incorporar elementos variacionales y significar los distintos elementos relacionados a la variación en estudio. Por ello, es que consideramos necesario que el estudiante enriquezca el concepto de valor numérico de la función cuadrática.

En primer lugar debemos destacar que el análisis de los resultados confirmó nuestra idea inicial de que los estudiantes no se habían enfrentado con problemas que impliquen el significar gráficamente al valor numérico de la derivada de la función cuadrática, de donde la actividad planteada en el salón representa en verdad un problema para ellos y no se trató de ejercicios tipo que con lleven respuestas mecánicas de repetición. Es en este sentido que se ha confirmado nuestra suposición sobre que, en una primera instancia, los alumnos no significarían gráficamente al valor numérico de la de la derivada en un punto de la función cuadrática, y en etapas posteriores, por la forma que fue realizada la secuencia, realizarían intentos por significarlo generando distintas conjeturas.

La mayoría de los procesos intelectuales analizados en esta primer instancia se pueden ubicar dentro del caso “Respuesta intuitiva” de los esquematizados por VINNER (1991); los estudiantes consultan solo la imagen del concepto al intentar dar solución a la situación planteada, como esta imagen es suficiente para generar una respuesta no se sienten en la necesidad de consultar la definición del concepto. Es decir, hemos encontrado que en una primera instancia la imagen de los estudiantes asociada al concepto de “*pendiente de la recta tangente en un punto dado*” ha sido suficiente para ellos en el aula para que construyeran un nuevo conocimiento. En cambio no hemos encontrado evidencias sobre los tipos de procesos intelectuales que esperan la mayoría de los docentes que ocurran: “deducción puramente formal”, y “deducción siguiendo el pensamiento intuitivo”; sí hemos dado evidencias de una situación que se encuentra dentro del caso “Interacción entre definición e imagen” en la cual un estudiante expresa que considera necesario recurrir a la definición del concepto frente a la evidencia de que no han encontrado una solución a la situación planteada.

Creemos que la visualización de las situaciones planteadas ha permitido, a la mayoría de los estudiantes que participaron en las actividades, resignificar el concepto en juego, así como posibilitó que ellos pudieran generar distintas argumentaciones. El uso del software mencionado en la enseñanza-aprendizaje de funciones ofrece, entre otros, los siguientes beneficios:

- Prioriza el proceso de pensamiento de los estudiantes a medida que éstos construyen conocimiento matemático.

- Posibilita el establecimiento de vínculos entre lo concreto y lo simbólico.

- Visualiza los efectos que tiene la derivada de la expresión ax^2+bx+c

- Acelera la exposición a un gran número de problemas y ofrece retroalimentación inmediata cuando los estudiantes generan expresiones matemáticas incorrectas.

Finalmente, en vista de los puntos anteriormente descritos se puede concluir que para lograr una mejor comprensión y asimilación conceptual del estudio de la función cuadrática en los educandos es importante implementar el uso de “software” como una gran herramienta metodológica de carácter innovador e interactivo, la cual facilitara el estudio de este tipo de funciones a través de una forma más entretenida, motivadora e interactiva.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CANTORAL, R. (1988). "Historia del cálculo y su enseñanza: Del trazado de tangentes al concepto de derivada". **Publicaciones Centroamericanas 2**: 381-386. México.

CANTORAL, R. y MONTIEL, G. (2003). "Una presentación visual del polinomio de LaGrange". **Números**, Vol. 55. España.

CARRIÓN, V. (1999). **Álgebra de funciones mediante el proceso de visualización,** Depto. de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

CARVAJAL, A. (2004). Las matemáticas en la escuela primaria: construcción de sentidos diversos. **Educación Matemática**, vol. 16 (3): 79-101.

CHEVALLARD, Y. (1997). **La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado**. Aique grupo editor. España.

CRESPILLO, E. (2010). La escuela como institución educativa. **Pedagogía Magna** 5:257-261.

DE GUZMÁN, M. (1996). El papel de la visualización**. El Rincón de la Pizarra**. Capítulo 0. Pirámide, Madrid.

DOLORES, C. (1999). **Una introducción a la derivada a través de la variación**. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

DUVAL, R. (1993). **Semiosis y noesis, lecturas en didáctica de las matemáticas** SME Cinvestav, México, pp. 118-144.

DUVAL, R. (1999). **Semiosis y pensamiento humano**. Traducción al español a cargo de M. Vega, realizada en la U. del Valle, del original francés del mismo título publicado por P. Lang, Suiza en 1995.

FREIRE, P. (1994). **Cartas a Cristina: Reflexiones sobre mi vida y mi trabajo**. Editorial Siglo XXI, México.

GARCÍA, M. (1988). **Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo**. Tesis de maestría. Cinvestav. México

GLASERSFELD, E. VON (1996). "Footnotes to The Many Faces of Constructivism"**. Educational Researcher**, 25(6), p. 19.

LABORDE, C. (1992). "Solving problems in computer based geometry environments: the influence of the features of the software". Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 92(4): 126-133.

LABORDE, J.M. y BELLEMAIN, F. (1994). ***Cabrí-Géomètre* II** (software), Dallas, Tex.: Texas instrument.

MÁSHBITS Y.I. (1997). **Problemas psicológico-pedagógicos de la conducción de la actividad de aprendizaje**. Editorial Vyscha shkola, Kiev, Ucrania.

LUPIAÑEZ, J.L. y MORENO A.L. (1999). **Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas.** CINVESTAV, IPN, México.

SÁNCHEZ, B.I. (2018). "Aprender y enseñar matemáticas: desafío de la educación". **IE**

Revista de Investigación Educativa de la REDIECH 8(15): 7-10.

VALIENTE-BARDERAS, S. (2001). Reseña Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. En F. Hernández Pina y E. Soriano Ayala (Ed.), Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. **Educación Matemática** 13(1): 119-123.

VINNER, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), **Advanced mathematical thinking** (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

ZAZKIS, R., DUBINSKY, E. y DAUTERMANN, J. (1996). "Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding." **Journal for Research in Mathematics Education**, 27(4): 435-437.

UNIVERSIDAD DEL ZULIA

opción

Revista de Ciencias Humanas y Sociales

Año 35, N° 90 (2019)

Esta revista fue editada en formato digital por el personal de la Oficina de Publicaciones Científicas de la Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia.
Maracaibo - Venezuela

www.luz.edu.ve

www.serbi.luz.edu.ve

produccioncientifica.luz.edu.ve