Mutatis Mutandis: Revista Internacional de Filosofía, núm. 11, 2018 (diciembre), pp. 57-84

Fenomenología e intuicionismo matemático. Aspectos nodales de la relación entre Husserl, Brouwer y Heyting

Phenomenology and mathermatical intuitionism. Main aspects of relationship among the work of Husserl, Brouwer and Heyting

Luis Alberto Canela Morales
Universidad Nacional Autónoma de México[Φ]
luiscanela25@gmail.com

Recepción: 14.10.2018 **Aceptación:** 03.12.2018

Resumen: El objetivo de este trabajo es resaltar el vínculo entre la fenomenología de Husserl y el intuicionismo de Brouwer y Heyting. Los vínculos se presentaran siguiendo algunas de las tesis principales del Intuicionismo y de la Fenomenología, a saber, el papel que tiene nuestra subjetividad en la constitución-construcción del mundo; a la noción de cumplimiento y en el estudio del concepto de negación en la lógica clásica.

Palabras clave: Husserl, Brouwer, Heyting, Negación, Intuicionismo, Fenomenología.

Abstract: This paper analyzes the linkage between Husserl's phenomenology and Brouwer's and Heyting's intuitionism. The linkages are presented from some theses of Intuitionism and Phenomenology, namely, the role of our subjectivity in the constitution of the mathematical world; the notion of fulfilment and the study of the concept of negation in classical logic.

Key Words: Husserl, Brouwer, Heyting, Negation, Intuitionism, Phenomenology.

[Φ] Licenciado en Filosofía por la Universidad Veracruzana, Magíster por la Universidad de Guanajuato y candidato a Doctor en Filosofía en la Universidad Nacional Autónoma de México, con estancia doctoral en los Archivos Husserl de la Universidad de Colonia, Alemania.

§1. El entrecruce histórico

Entre el 22 y el 29 de abril de 1928, Husserl presentó en Ámsterdam dos conferencias tituladas: "Fenomenología y psicología. Fenomenología trascendental" en respuesta a la invitación del filósofo y lingüista holandés H.J. Pos (Husserl Chronik, p.329-330) (Hua Dok III/4, 440-441). El objetivo de esas conferencias, dicho sea de paso, era distinguir entre el *quehacer* de la ciencia psicológica y el *quehacer* de la ciencia filosófica o, dicho de otro modo, entre el desarrollo de la psicología fenomenológica y el desarrollo de la fenomenología trascendental. Más allá del contenido de estas conferencias, la importancia de este evento estuvo marcada por el encuentro personal (primero y último) que sostuvieron Husserl y el matemático holandés J.L.E. Brouwer. Sobre esta reunión se tiene certeza histórica gracias varias cartas. Por mor de la brevedad, me enfocaré únicamente en tres de ellas.[1]

En una carta a H.J. Pos, el 26 de diciembre de 1927, Husserl habla sobre su "próxima visita" a Ámsterdam:

> Tendría que estar allí [en Berlín] el 21 de abril y podría viajar a Ámsterdam el 23. Me gustaría proponer dos conferencias, seguidas de discusiones —anunciar desde el principio como accesibles solo para [estudiantes] avanzados —. Claro que decepcionaré al señor Brouwer, a quien me complace conocer. En este momento, la matemática filosófica está algo alejada de mí y no me gustaría hablar de eso desde la cátedra (*Katheder*), me llevaría mucho tiempo volver a familiarizarme, aunque ya he trabajado en ello en el pasado. Prefiero hablar de "psicología fenomenológica y fenomenología trascendental" (Hua Dok III/4, 442).

El segundo documento es una carta que envía Husserl a Heidegger, el 9 de mayo de 1928, semanas después de su viaje a Ámsterdam:

> Lo más interesante del evento en Ámsterdam fueron las largas conversaciones con Brouwer, quien me causó una impresión muy significativa, un hombre completamente original, radicalmente honesto, genuino y muy moderno. Mantiene a su propia asistente filosófica[2]

1.- * Las referencias a Husserl se harán conforme a la siguiente edición: Husserliana–*Gesammelte Werke*, publicada originalmente por Martinus Nijhoff, luego por Kluwer Academic Publishers y actualmente por Springer. Como es habitual, emplearemos la sigla Hua (Husserliana), seguida del tomo en números romanos y de las páginas en números arábigos. La correspondencia de Husserl se citará de siguiente manera: "Hua Dok III, número de volumen en arábigos y página" (véanse las referencias bibliográficas incluidas al final de este trabajo). Los trabajos de Brouwer se citarán según sus *Collected Works* (p.ej. "*CW I*, p.5)

Otras cartas son las de Husserl a Ingarden (6 de mayo 1928); de Husserl a Mahnke (12 de mayo de 1931) y de H.J. Pos a Husserl (5 de septiembre de 1927).

2.- La asistente a la que se refiere Husserl es Irmgard Gawehn. Filósofa y matemática talentosa que estudió en Berlín y Heidelberg entre 1920 y 1924; se especializó en

> (*philosophischen Assistenten*), una dama muy inteligente, bien versada en mis escritos, incluidas las '*Ideas*'; de hecho, era la única que sabía que decir en las discusiones después de mis conferencias en Ámsterdam. Ella estudió en Berlín, pero sólo encontró inspiración con P. Hofmann, especialmente con respecto a sus estudios fenomenológicos (Hua Dok III/4, p. 156).

El tercer documento es una carta que envía Brouwer a Eva Wernicke, el 30 de abril de 1928: "aquí, en estos momentos, Husserl está alrededor de mí, atrayéndome fuertemente. Piensa que *Miss* Gawehn es la persona más inteligente que ha cruzado Holanda" (van Dalen, 2011, p. 1515).[3]

Estas tres cartas, y las anteriormente citadas, constituyen el testimonio *histórico* del encuentro entre Husserl y Brouwer. Desde luego, no puede decirse que este encuentro histórico haya ejercido cierta influencia sobre el recorrido filosófica de Husserl o en el recorrido matemático de Brouwer. En contraste con otros matemáticos que sí pueden considerarse como punto de partida del quehacer filosófico-matemático del fundador de la fenomenología (Bolzano,[4] Kronecker-Weierstrass,[5] Grassmann,[6] Riemann,[7] Cantor[8] y Hilbert)[9] la recepción de la obra de Brouwer en la filosofía de Husserl es *casi nula.* Del mismo modo, Brouwer no tomó en consideración los escritos de Husserl, ni de ningún otro fenomenólogo, en sus escritos posteriores a este encuentro. Lo anterior, echa abajo lo que supuso Heidegger en 1925:

> La dirección contraria [**el intuicionismo**], **influida esencialmente por la fenomenología** (*wesentlich von der Phänomenologie beeinflusst*), plantea la cuestión de si en definitiva lo dado primariamente no será la estructura determinada de los propios objetos (en la geometría, el continuo previo a la indagación científica, por ejemplo, en la definición de la integral y de la diferencial), como pretenden Brouwer y Weyl (2006, p. 18. El énfasis es mío).

En el caso de Weyl sí es evidente este influjo (basta leer el prefacio de *Das Kontinuum*, 1918), pero en el caso de Brouwer, repito, no hay evidencia alguna de esto (Martin Löf, 1987, p. 415). Además de las cartas antes citadas, se sabe que Husserl poseía una copia del artículo de Brouwer, *Intuitionistische*

---

topología bajo la tutela de Rosenthal con quien obtuvo su doctorado en 1931 con la disertación: Über *unberandete 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten*. Esta fue publicada en los *Mathematische Annalen* en 1927. "*Fräulein* Gawehn" se convirtió en ayudante de Brouwer desde 1927 hasta 1930.

3.- También puede leerse (van Dalen, 2013, p. 520).

4.- *cf*. Beyer (1996), (Sebestik, 2003) (Frechétte, 2011) y (Casari, 2007).

5.- *cf*. Gerard (2008), Hernández Marcelo (2015) y Canela Morales (2016)

6.- *cf.* Gerard (2010) y (Hartimo, 2011)

7.- *cf.* Rosado Haddock (2017).

8.- *cf.* Ortiz Hill (1994) e (Ierna, 2012).

9.- *cf*. Okada (2013) y (da Silva, 2016).

Betrachtungen über *den Formalismus*,[10] que apareció antes de la publicación de *Lógica formal y lógica trascendental* (1929), aunque dicha copia ya no se encuentra en los Archivos Husserl de Lovaina.[11] Para terminar esta breve nota histórica, debo señalar que el escaso contacto y nula influencia entre uno y otro pensador no representa impedimento alguno para intentar describir los posibles entrecruces entre la propuesta matemática intuicionista y la fenomenología husserliana; antes bien, permite que esta parte del trabajo tenga mayor dinámica en cuanto a la condición filosófica refiere.

Dicho esto, dividiré mi trabajo en tres partes. En el primer apartado presentaré las características más importantes del intuicionismo brouweriano; en el segundo apartado explicitaré el concepto de *negación* como una *modalidad* de la evidencia en la fenomenología husserliana; en el tercer apartado describiré la manera en que el concepto de la negación (o *decepción*) es utilizado en la obra de Heyting, y finalmente presentaré algunas conclusiones críticas.

§2. La lógica intuicionista de Brouwer. El papel de la construcción, la prueba y la negación

Las propuestas matemáticas de las postrimerías del siglo XIX enfatizaban el rol fundacional y metodológico de la abstracción. La teoría de conjuntos cantoriana, las geometrías no euclidianas y el álgebra abstracta, son algunas de las disciplinas o propuestas que ejemplifican esta tendencia. Sin embargo, el creciente escepticismo hacia las formulaciones del tipo conceptual desencadenó una serie de trabajos que proponían un punto de vista diferente, a saber, la posibilidad de *construir* las matemáticas por medio de la *intuición*. Los primeros en concebir esta idea fueron los matemáticos Kronecker, Poincare, Lebesgue, Lusin, y Borel, los así llamados "pre-intuicionistas". Un segundo grupo lo constituirían Brouwer, Heyting y Kolgomorov.

Sin entrar en detalles, y siguiendo a Heyting, se puede decir que ambos grupos compartían los siguientes principios: (A) las matemáticas no sólo son formales, también poseen un contenido intuitivo, y (B) los objetos matemáticos son captados directamente por la mente, *pero* el conocimiento matemático no depende de la experiencia (Heyting, 1955, p. 5). Desde luego, la diferencia entre ambos grupos se encuentra en este "*pero*", pues mientras los pre-intuicionistas aceptan que la existencia de los objetos matemáticos es independiente de nuestro pensamiento —aunque su construcción e investigación sólo se dé por medio de una actividad mental— los intuicionistas, por su parte, señalan que los objetos matemáticos *sólo existen* como construcciones mentales (Troelstra, 1982, p. 466). De estos dos grupos, fue Brouwer quien sentó las bases del intuicionismo moderno, pero reiterando la importancia de la filosofía matemática kantiana[12] de la que se sentía deudor.

10.- Brouwer presentó este ensayo en una reunión de la Academia Holandesa de Ciencias, el 17 de diciembre de 1927, y se publicó originalmente en *KNAW Proceedings*, (1928) 31, p. 374–379.

11.- *cf.* (van Atten, 2007, p.128, nota 7).

12.- "En Kant encontramos una vieja forma de intuicionismo, ahora casi completa-

En el caso específico de Brouwer, que es el que aquí interesa, se pueden distinguir (al menos) cuatro momentos de su propuesta matemática:[13]

1. Utilizar sólo entes matemáticos ‘‘construidos’’ a partir de la secuencia de la “proto-intuición” (*Ur-intuition*).
2. Admitir sólo los infinitos reducibles al infinito potencial y las secuencias de libre elección (*Wahlfolgen*).
3. Reconstruir la matemática clásica exclusivamente con métodos constructivos de definición y demostración. (Se entiende por matemáticas clásicas a las matemáticas surgidas en el siglo XIX, fundadas sobre la teoría de conjuntos y sobre métodos axiomáticos no-finitistas).
4. Utilizar una lógica intuicionista (*versus* lógica clásica).

En (1) se confirma lo dicho líneas atrás: para Brouwer la matemática no es una ciencia puramente formal, como creían los matemáticos clásicos, sino más bien una *actividad* con un contenido específico, “el cual es captado por el sujeto pensante por medio de la intuición independiente de la experiencia” (Palau, 2002, p. 80). En efecto, lo que Brouwer intentará esclarecer a lo largo de su vida académica es el éxodo de la *conciencia matemática* desde su morada (caótica) hasta su re-encuentro en el entendimiento mutuo, es decir, hasta su encuentro con el contenido y/o datos intuitivos que generan, precisamente, el conocimiento matemático.

Al igual que Hegel, Brouwer afirma que el primer episodio del camino de la (con)ciencia inicia con la certeza sensible/ingenua en la que se forma la conciencia del tiempo y el mundo de las sensaciones (aquí aparece la distinción sujeto-objeto), continua con la atención matemática y finaliza en el autodespliege/reconocimiento del entendimiento y la individuación.

En cuanto al primer episodio del camino de la (con)ciencia, su desarrollo puede encontrarse en el “polémico” escrito/panfleto de 1905, *Vida, arte y misticismo*, donde Brouwer, además de presentar una serie de ideas acerca de algunos escritos de místicos prominentes, también bosqueja un “mundo según un sujeto pensante” (o individuo o sujeto creador). Dicho en otras palabras, desarrolla un proyecto en el que el individuo/sujeto construye gradualmente su propio universo. Para Brouwer, el individuo/sujeto se encuentra originalmente en un estado de caos indiferenciado o en un estado de completo aislamiento. Un estado donde la conciencia parece oscilar lenta, irremediable e irreversiblemente entre la quietud y la sensación (*CW I*, p. 480). El abandono de este estado de “caos” ocurre en el momento en el que el sujeto experimenta la *transición* de una sensación a otra, reflejada en la retención de la primera en la segunda (como experiencia pasada). Esto

mente abandonada, en la que el tiempo y el espacio son tomados como formas de concepción inherentes a la razón humana” (*CW I*, p 125).

13.- Un estudio que condensa estas fases del pensamiento broweriano puede encontrarse en van Dalen (1978).

comprueba, según Brouwer, que "es el [flujo del] tiempo el único elemento a priori en la ciencia" (*CW I*, p. 61). Esta tesis, irreductible a un solo ámbito, ya sea filosófico o psicológico es la piedra de toque para introducir el material básico de lo que sería su propuesta matemática: la proto-intuición (temporal) (Grattan-Guinness, 1982, p. 45).

En su disertación de 1907, *Sobre los fundamentos de la matemática*, Brouwer desarrolla dicho concepto:

> En los capítulos siguientes vamos a profundizar en la proto-intuición de la matemática (y de toda actividad intelectual) como el sustrato, despojada de toda cualidad, de cualquier percepción del cambio, de la unidad de la continuidad y discreción, de la posibilidad de pensar reunidas varias entidades y conectadas por un "entre" que nunca se agota por la inserción de nuevas entidades. Puesto que la continuidad y la discreción se producen en esta proto-intuición como complementos inseparables, ambas con igualdad de derechos y siendo igualmente claras, es imposible mantenerlas separadas como unas entidades primitivas y luego construir una respecto de la otra. De hecho, es imposible considerarlas por sí mismas. Habiendo reconocido que la intuición de la continuidad, de la "fluidez", es tan primitiva como la de varias cosas concebidas como una sola, siendo esta última la base de toda estructura matemática, podemos afirmar las propiedades del continuo como una "matriz de puntos considerada como un todo" (*CW I*, p. 17).

La hipótesis brouweriana se puede resumir del siguiente modo: *profundizar en la proto-intuición de la matemática significa profundizar en el* "*movimiento del tiempo*". Esto significa que el primer paso en la creación de un universo matemático es el reconocimiento de la *iteración* y/o secuencias de sensaciones temporales arbitrariamente extensas. Enseguida explico a detalle este paso.

El concepto de proto-intuición de Brouwer se funda *en*/*sobre* una conciencia del movimiento del tiempo o conciencia del flujo del tiempo. Ella sería la causal de la desintegración de todos los momentos de nuestra vida en dos *cosas* distintas: *una que da paso a la otra, pero que a su vez es retenida por la memoria*:

> El proto-fenómeno es, por sí mismo, la intuición del tiempo, en la que es posible la repetición en la forma: "cosa en un momento y nuevamente una cosa", como una consecuencia sobre la cual los momentos de la vida se dividen en secuencias de cosas cualitativamente distintas. Dichas secuencias se concentran, entonces, en el intelecto en secuencias matemáticas no sentidas, sino observadas (*CW I*, p. 53).

La constitución cualitativa de los elementos que componen esta dos-idad (*Zweieinigkeit*), como también la llama Brouwer, permite una nueva y última abstracción que tiene por resultado la *forma pura* de la dos-idad o dos-idad *vacía* (el sustrato común de todas las dos-idades). Esta es el punto de partida de la creación del universo matemático:

> Esta intuición de la dos-idad, la proto-intuición matemática, crea no sólo los números uno y dos, sino también todos los números ordinales finitos, en la medida en que uno de los elementos de la unidad puede ser pensado como una nueva dos-idad, dicho proceso puede repetirse indefinidamente, dando lugar al menor número ordinal infinito ω (C*W I*, p. 127-128).

La conciencia de esta unidad básica es, pues, la intuición original de las matemáticas. Esto último es reiterado en la conferencia *Die Moeglichen Maechtigkeiten* (1908), dictada en el Congreso Internacional de Matemáticas:

> Cuando se investiga cómo surgen los sistemas matemáticos, se encuentra que están construidos sobre la proto-intuición de la dos-idad. Las intuiciones de lo continuo y lo discreto se unen aquí, en tanto que una segunda cosa no se piensa por sí misma, sino en la preservación del recuerdo de la primera. La primera y la segunda se *mantienen juntas* y la intuición de la continuidad (*continere*=mantener juntos) consiste en mantenerlas juntas. Esta proto-intuición matemática no es otra cosa más que la abstracción sin contenido de la sensación del tiempo (*Zeitempfindung*), es decir, la sensación de "fijar" y "disminuir" juntas o de "permanecer" y "cambiar" juntas (*CW I*, p. 102)

Ahora bien, la primera ocasión en que Brouwer se refiere *explícitamente* a esta génesis de la conciencia matemática y a sus objetos fue en la conferencia *Matemáticas, Ciencias y Lenguaje.* Ahí, a partir de describir las tres manifestaciones de la voluntad de vivir (*Lebenswille*) del individuo, hace mención de la atención y la abstracción matemáticas. Es ahí donde aparece el segundo episodio del itinerario de la conciencia. Explicito esto con cierto detalle.

La atención matemática tiene dos fases: la actitud (o atención) temporal (*Zeitliche Einstellung*) y la actitud (o atención) causal (*kausale Einstellung*) (*CW I*, p. 417-418). La atención temporal consiste en el reconocimiento de la antes mencionada "desintegración de un momento de vida" en dos contenidos de conciencia distintos. Esta conciencia dual o dos-idad percibe un contenido, mientras otro, previamente ya percibido, es retenido en la memoria. De este modo, la proto-intuición, en tanto dos-idad, además de ser un acto *temporizador*, que puede ser repetido *ad libitum*, también da lugar a secuencias finitas de sensaciones retenidas y por tanto recordadas. En la medida en que uno de los elementos de la unidad puede ser pensado como nueva unidad, y dado que este proceso puede ser iterado indefinidamente, se justifica, según Brouwer, la inducción matemática de una manera directa. Por otro lado, la atención causal es un acto de la voluntad que identifica secuencias temporales distintas en fenómenos percibidos que o bien se extienden hacia el pasado o bien hacia el futuro. Dicho de otro modo, define el proceso por el cual las secuencias temporales similares, proporcionadas por la atención/

actitud temporal, se identifican o se mantienen juntas (van Dalen, 2008, p. 11 y ss.) El resultado de este último proceso son las llamadas *secuencias causales*, ellas, según Brouwer, constituyen el mundo y, por tanto, la ciencia en general. En resumen, la *fenomenología de la conciencia broweriana* reduce la realidad percibida a un sistema de relaciones de medios y fines, lo que da lugar a la ciencia en tanto proyección matemática sobre el mundo físico (Molina, 2007, p. 933 y ss.) Esto último, únicamente quiere decir que la aparición de la ciencia está en función del acto de la voluntad que busca ajustar el mundo a las tendencias matemáticas simples o compuestas.

Al igual que la ciencia, el lenguaje natural y el lenguaje técnico tienen lugar en el seno de un acto voluntarioso. La *primera máxima intuicionista*[14] resume esta idea:

> Separar completamente la matemática del lenguaje matemático, en particular de los fenómenos del lenguaje que son descritos por la lógica teórica, reconociendo que la matemática intuicionista es esencialmente una actividad no lingüística de la mente que tiene su origen en la percepción del movimiento del fluir temporal (*of a move of time*). Esta percepción del movimiento del fluir temporal puede ser descrita como la separación de un momento de la vida en dos cosas distintas, una de las cuales es retenida por la memoria. Si esa dos-idad nacida de esa forma, es desprovista de toda cualidad, queda la forma vacía del substrato común de todas las dos-idades. Ese sustrato común, esa forma vacía, es lo que es objeto de la intuición matemática (Brouwer, 2011, p. 4-5).

Es de aclararse, además, que para Brouwer ningún lenguaje está exento de malos entendidos y, por tanto, libre de error. De hecho, las limitaciones del lenguaje natural no pueden ser resueltas o suplantadas por el lenguaje técnico de la matemática formalista, cuyo registro físico (dentro de sistema de símbolos) sólo es de utilidad para el trabajo técnico del matemático. Por tanto, según Brouwer, el lenguaje sólo es útil en tanto herramienta para la *comunicación*, aunque imperfecta, pues nunca se garantiza la traducción correcta de la voluntad. Ahora bien, la desconfianza y cierto escepticismo hacia el lenguaje son consecuencias genuinas de las tesis intuicionistas. En efecto, una de las creencias básicas del intuicionismo es que la representación lingüística siempre es *incompleta* y, por tanto, siempre está abierta a modificaciones temporales. Un sistema formal, asegura Brouwer, no podría captar la matemática en su totalidad dado que su carácter no-progresista no le permite incorporar nuevos teoremas y conceptos. Un ejemplo claro de este carácter *inacabado* y *potencial* son los ordinales infinitos. Sobre este punto, Brouwer comenta lo siguiente en *Mathematik, Wissenschaft und Sprache*:

14.- La primera versión de esta máxima intuicionista se presenta de forma más o menos clara en algunas partes rechazadas de la versión original de la disertación doctoral de Brouwer. Un estudio exegético y comparativo entre la versión original de la disertación doctoral (1904-1906) y la versión presentada en 1907, se encuentra en van Stigt (1979); en van Dalen (1999, p. 92 y ss.) y (2011. p. 22-32).

Es este sustrato común de todas las dos-idades la que forma la proto-intuición de las matemáticas, cuyo autodespliegue (*Selbstentfaltung*) introduce, entre otras cosas, al infinito como realidad mental (*gedankliche Realität*) y efectiva y, primero que nada, la totalidad de los números naturales, que no es comentada aquí, enseguida la de los números reales y finalmente toda la matemática pura (*CW I*, p.418-419)

La iteración y la estructura de los números naturales surgidas a través del desenvolvimiento de la intuición de la dos-idad, permite a Brouwer afirmar que en las matemáticas intuicionistas la demostración por medio de la retención no sólo se verifica en las instancias individuales, sino también en la serie numérica natural. Lo que Brouwer llama *repetición indefinida* de la dos-idad es la antesala de la noción formal de autodespliegue. El autodespliegue es, por así decirlo, parte integrante de la proto-intuición pues complementa los primeros actos de atención matemática creando nuevas secuencias infinitas a partir de secuencias previamente adquiridas (Tieszen, 1989, p. 13). Como resultado de estas secuencias infinitas, la discusión sobre la secuencia de números naturales y la capacidad de aprehender la serie numérica en su totalidad quedarían resueltas a partir del "axioma de la inducción completa", y con ello se daría paso al reconocimiento de la totalidad de los números naturales como una *entidad potencialmente infinita* (Tieszen, 1989, p. 54).

De esto último habla el punto (2): "admitir sólo los infinitos reducibles al infinito potencial y rechazar el paraíso de Cantor". Para efectos de una fundamentación de la aritmética desde un punto de vista intuicionista "no es correcto partir de conjuntos infinitos como entidades (infinito actual), sino del llamado infinito potencial, propio de los números naturales" (Palau, 2002, p. 80-8). Efectivamente, Brouwer observa que el desarrollo de la matemática es un proceso infinito fundado en construcciones intuitivas que gradualmente van adquiriendo nuevos instrumentos demostrativos y van adquiriendo nuevos resultados ligados a la descripción de la estructura de nuestra subjetividad. Por tanto, y siguiendo la *segunda máxima del intuicionismo*, un conjunto numerable no puede ser visto como *algo terminado* al que se puede acceder desde reglas aritmética definidas, antes bien se debe reconocer la posibilidad de generar nuevas entidades matemáticas:

> SEGUNDO ACTO DE INTUICIONISMO que reconoce la posibilidad de generar nuevas entidades matemáticas. Primeramente, las secuencias infinitas progresivas P_1, $P_2 \ldots P_n$ cuyos términos son elegidos más o menos libremente a partir de entidades matemáticas previamente adquiridas, de modo que la libertad de elección existente quizás para el primer término P_1 pueda estar sujeta a una restricción al elegir un término siguiente P_v *y así de nuevo hasta llegar a restricciones más rígidas o inclusive hasta abolir la libertad de elección sobre los elementos siguientes* P_v's, en la medida que todas estas intervenciones restringidas del sujeto, del mismo modo que todas las elecciones de los P_v's, en cualquier fase del proceso pueden depender de experiencias matemáticas futuras del sujeto

> creativo. En segundo lugar, en la forma de especies matemáticas, esto es, propiedades pensables de entidades matemáticas previamente adquiridas y que satisfacen la condición de que, si ellas valen para una entidad matemática determinada, también valen para todas las entidades matemáticas que han sido definidas como iguales a aquella, relaciones de igualdad que son simétricas, reflexivas y transitivas; aquellas entidades matemáticas previamente adquiridas para las cuales vale la propiedad son llamadas elementos de la especie (*CW I*, p. 511).

La cita presenta una clara alusión a las secuencias de libre elección[15] que constituyen el origen de la reconstrucción sistemática de las matemáticas desde el punto de vista intuicionista. Sin entrar en detalles, puede decirse que las secuencias de libre elección reconstruyen el análisis clásico a partir de secuencias que pueden ser *continuadas* de forma arbitraria, pues no están fijadas por una ley (algoritmo). Esto permite modelar matemáticamente el continuo intuitivo como una *especie* de las secuencias infinitas convergentes de intervalos racionales (van Atten, van Dalen y Tieszen, 2002). Michael Dummett resume estas ideas del siguiente modo:

> Una secuencia de elección es una secuencia infinita de números naturales cuyos términos se generan sucesivamente. En el proceso de generarlos, las elecciones libres pueden desempeñar un papel. Por un lado, la selección de cada término puede ser totalmente determinada de antemano por alguna regla efectiva: una secuencia generada por tal regla es una secuencia similar a la ley. Por otro lado, tenemos una secuencia cuya selección de cada término es totalmente irrestricta: éstas son las secuencias sin ley. Entre estas secuencias de elección, la selección de cuyos términos está parcialmente restringida por adelantado, pero no completamente determinada (2000, p. 287).

Ahora bien, es posible rastrear las secuencias de libre elección (o secuencias infinitas progresivas) en algunas partes de la disertación de 1907 (*CW I*, p. 83). No obstante, su primera aparición formal[16] como *objetos* matemáticos o como principios de continuidad fue en la reseña del texto de Schoenflies y Hahn, *Die Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen* (1914);[17] en los artículos de los años 1918-1919, *Begrundung der Mengenlehre unabhän-*

15.- van Atten (2007) presenta un estudio muy completo sobre la posible interpretación fenomenológica de las secuencias de elección brouwerianas. Debido a la extensión de este emplazamiento remito a su estudio para mayores aclaraciones.

16.- *cf*. (Troelstra, 1982, p 470).

17.- (*CW I*, p. 139-142). Publicada originalmente en la *Jahresbericht des Deutschen Mathematiker- Vereinung,* 1914, 23, pp. 78-83. En esta reseña, Brouwer afirma que todo conjunto bien construido (*wohlkonstruierte Punktmenge*), desde un punto de vista intuicionista, se compone de una parte contable (*abzählbare*) y una parte no-contable (*nicht abzählbare*). La parte incontable se determina por una secuencia de elecciones de un conjunto finito (p. 140-141).

gig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten,[18] y en el ensayo de 1919, *Intuitionistische Mengenlehre*.[19]Vistos en conjunto, la tarea de estos trabajos es frenar el avance de la "mala compresión" del infinito actual. Para lograr dicho objetivo, la estrategia Brouwer fue reconocer que en principio nuestra intuición matemática sólo puede crear conjuntos numerables de individuos. Con lo anterior, Brouwer pretende desacreditar la creación del conjunto de todos los números ordinales no-numerablemente infinitos (como en el caso de Cantor y su teoría matemática de los conjuntos infinitos no-numerables y el tratamiento de conjuntos infinitos de distinta cardinalidad $\mathbf{N}_{\aleph 0}$, $\mathbf{R}_{\aleph 1}$). Desde la perspectiva intuicionista, no admitir el infinito actual, por considerar al conjunto infinito como *algo ya concluido*, significa mantener la coherencia con el sentido intuitivo que admite, con naturalidad, la sucesión indefinida de los números naturales. Frente a los casos que presentan una estructura infinita donde no es posible distinguir entre el proceso de generación y el producto generado, Brouwer presenta un concepto de infinito no restringido (potencial) donde se distingue entre el *proceso mismo* y el *producto no-terminado*.

Líneas atrás mencioné que estas secuencias de elección se "unen" en un dispositivo denominado extensión o despliegue (*Spread*/*Menge*) cuya función es comparable a la función de los conjuntos cantorianos. Esto significa que se puede definir un conjunto en la forma del despliegue, es decir, en el modo común de *generación* de los elementos de un conjunto. Esta definición es válida constructivamente hablando pues una *sucesión* que se *prolonga infinitamente* (idea intuitiva del continuo como una determinación gradual de puntos) es una sucesión que admite una serialidad dentro de las matemáticas intuicionistas. Ahora bien, es importante hacer notar que el intuicionismo matemático exige tener una prueba, procedimiento *o construcción* mediante procesos intuitivos para admitir un teorema o formula dentro del sistema intuicionista.

Este punto converge con (3): "Reconstruir la matemática clásica exclusivamente con métodos ''constructivos'' de definición y demostración". Así que "[…] demostrar la existencia de una entidad será dar su método de construcción y probar una afirmación será exhibir la forma de construcción de la prueba, i.e., el método de cálculo o algoritmo que en un número finito de pasos permita su construcción" (Palau, 2002, p. 81). Para Brouwer, un enunciando matemático será verdadero cuando se *demuestre*, vía *construcción mental*, su verdad y su evidencia; un enunciado matemático será falso cuando

18.- (*CW I*, p. 150-221). Estos artículos son importantes porque entre 1918 y 1919, Brouwer define la función principal de las secuencias de elección: reconstruir el análisis clásico identificando los puntos sobre la serie de los reales con las mismas secuencias de elección. Esto es posible gracias a que las secuencias de elección son recogidas en un "dispositivo" denominado extensión (*Spread* o su equivalente en alemán *Menge*) cuya función es comparable a la función de los conjuntos cantorianos. Básicamente una extensión es originada por un método (*Methode*) que determina parte de una secuencia finita de números naturales y por otro método que asigna una serie o secuencia de signos (*Zeichenreihe*), ambos definidos por una ley (*Gesetz*).
19.- (*CW I*, p. 230-235).

no se logre probar la posibilidad de su construcción mental. Dicho en otras palabras, el aseguramiento de la verdad debe tener como consecuencia su demostrabilidad.[20] Por ejemplo, si se trata de demostrar *P*, limitarse a *afirmar* su verdad es falaz e insuficiente. La verdad de *P* no *prueba P*; tampoco la reducción al absurdo de *P* prueba *P*, pues el resultado al que se llega es a la negación de *P*, pero eso no es equivalente a su afirmación (refutar no equivale a afirmar). Para poder afirmar la verdad de un enunciado es preciso contar con una prueba de él. En suma, probar un enunciado matemático es presentar un método de construcción para dicha entidad.

Este radical cambio de perspectiva lleva al intuicionismo a la negación de las demostraciones *por absurdo*, además de rechazar el principio del tercero excluso.[21] Con esto, llegamos al punto (4): "utilizar una lógica intuicionista (*versus* lógica clásica)". La utilidad de la lógica intuicionista es mayormente visible en el papel que juega la negación o el juicio negativo. Este último punto, lo estudiaré al principio del §4.

§3. La negación como modalidad de la evidencia en la fenomenología husserliana

En la introducción a la sexta de las *Investigaciones lógica* Husserl propone la siguiente tesis: todo pensar y conocer teorético son expresables por medio de actos expresivos. Esta hipótesis se desprende de la articulación fenomenológica de las cinco primeras investigaciones lógicas y la tematización de dos aspectos capitales de la significación: 1) su referencia *intencional* y 2) su carácter de idealidad. ¿Qué significa referencia intencional y qué significa carácter de idealidad? En un sentido muy general, y sin remisión de citas a la quinta investigación lógica donde se detalla dicho concepto, se puede afirmar que la intencionalidad no es más que la nota esencial de ciertas vivencias de "ser conciencia de algo" (justo por ello se llaman vivencias intencionales). Es una peculiaridad esencial de la esfera de las vivencias en general; es lo que caracteriza la conciencia en sentido estricto y lo que justifica que se designe la corriente entera de las vivencias a la vez como corriente y como unidad de conciencia. Lo que finalmente revela la reflexión fenomenológica es que este es un proceso inmanente característico de toda experiencia, aunque infinitamente variado en cuanto forma.

Sobre el carácter de idealidad. Dentro de la complejidad del fenómeno de la expresión (*Ausdruck*) se encuentran ciertos actos que le *dan* su significación y actos que *cumplen* esa significación. De acuerdo con este análisis la sig-

20.- "En la matemática intuicionista no se infiere de acuerdo con normas que estén contenidas en una lógica, sino que cada inferencia individual es probada de manera inmediata por su evidencia. Así también, el resultado de un proceso de demostración matemática no se encuentra en las inferencias lógicas, sino en la construcción de sistemas matemáticos" (Heyting, 1955, p. 16).

21.- En sentido estricto, la ley del tercero excluido no es el único principio lógico no aceptado por Brouwer y otros intuicionistas. La ley de la doble negación y las leyes De Morgan no son principios válidos desde la óptica intuicionista.

nificación o intención significativa (*Bedeutungsintention*) es (en la vivencia concreta de un juicio) el carácter de acto que la posición judicativa posee en conexión atributiva con el contenido del juicio o, lo que es lo mismo, es un *carácter de acto* que modifica el acto de expresar y lo presupone. La función intencional de mentar un objeto y de dirigirse a él de un modo determinado no sólo hace valer en general la dimensión de apertura de la conciencia, también permite especificar los distintos modos de mención y poner de relieve el papel de la intencionalidad en los actos de conocimiento. Así, Husserl distingue entre vivencias intencionales que tienden al objeto, pero sin tener un contenido presencial y efectivo del mismo, y aquellas en las que, además de tender a él, está dada la presencia del objeto correspondiente. Unas *mientan* significativamente sus objetos y otras, además de esto, tienen "en persona" (*leibhaft*) al objeto intencionado, dando así *cumplimiento* a la mención vacía (Paredes Martín, 2002). La intuición o "intención intuitiva" es lo que proporciona la presencia efectiva del objeto. De este modo, los conceptos de "intención" y cumplimiento (o plenificación o intuición impletiva, *Erfüllung*)[22] aseguran la posibilidad de situaciones vivenciales que, efectivamente, proporcionan la presencia de los objetos mentados.[23] Lo anterior, repito, ocurre cuando el objeto intendido coinciden con la expresión emitida correcta y suficientemente. Por ejemplo: "la expresión *un mirlo echa a volar* y su respectiva situación intuitiva (el mirlo y su vuelo)". Se trata, dice Husserl, de un análisis fenomenológico de la correspondencia entre lo intuido y lo significado en la expresión (Husserl, 1999, p. 606).

Para Husserl, es la percepción la que determina la referencia objetiva de la significación, lo que no quiere decir que parte de la significación resida en la percepción —de hecho, "habrá que decir también que *ninguna parte de esta significación reside en la percepción misma*" (1999, p. 614)—. En efecto, la significación reside únicamente en la intención como *intención de esto* o *aquello*, esto es, lo anticipado por la percepción es *lo que puede ser, lo posible* y lo *efectivamente* captado. En Hua XI, Husserl señala que:

> El proceso fue un proceso constante de ampliación (*Erweiternden*) del conocimiento. Esta ampliación se produce a través de síntesis discretas de la percepción de tal manera que una cosa, ya bastante familiar a través de una percepción previa, ocasionalmente se perc-

22.- La introducción sistemática del concepto de cumplimiento aparece en la sexta de las *Investigaciones lógicas*, capítulos 1 y 2. La noción de grados del cumplimiento en los capítulos 3 y 5. Del mismo modo, Husserl desarrolla, en *Ideas* I, y en franca superación de la función representativa de las *Investigaciones lógicas*, una serie de tematizaciones con respecto a las determinaciones de la evidencia en relación con los polos noético-noemáticos, especialmente en lo referente a las síntesis de adecuación. Una mayor exposición de este tema puede encontrarse en Anton Mlinar (2012), (2013a) y (2013b).

23.- Puede haber un cumplimiento estático o dinámico de una intención significativa. El cumplimiento es estático cuando el objeto está inmediatamente presente en la conciencia y es dinámico cuando se requiere una secuencia de actos en el tiempo para experimentar el objeto o al menos para experimentarlo completamente.

> ibe nuevamente bajo un recuerdo simultáneo de percepciones previas, es decir, en un reconocimiento directo. Como podemos ver fácilmente, la nueva adquisición de conocimiento continúa la adquisición anterior con respecto a los nuevos aspectos. Pero todo esto concierne a síntesis de cumplimiento, es decir, de concordancia (*Einstimmgkeit*) (Hua XI, 25).

En este análisis, el cumplimiento y la capacidad de cumplimiento es otra forma de hablar de intuición. La distinción intención de significado /cumplimiento significativo es algo así como la distinción de concepto/intuición. Así, una intención-significado se cumple cuando el objeto hacia el cual nos dirigimos está presente en nuestra experiencia, pero también se puede cumplir cuando el objeto podría hacerse presente a la conciencia a través de secuencias de actos en los que se realiza. Cuando esto sucede, tenemos evidencia del objeto o estado de cosas.

La evidencia es, para Husserl, la vivencia de la verdad, la verdad vivida (*Prolegómenos* §51). En sentido fenomenológico, la evidencia encuentra su origen, en primer lugar, en una conciencia intencional y, en segundo lugar, en la vivencia del cumplimiento. Es "precisamente esta caracterización fundamental de la evidencia es la que permite advertir el contraste con lo meramente mentado y que, en consecuencia, debe ser llevado a evidencia" (Anton Mlinar, 2014 p. 35). Dicho de otra manera, el proceso de cumplimiento (el *estar cumplido* o el *carácter de cumplido*) "lleva a la tácita consideración unilateral de la evidencia como conciencia plena, haciendo del vacío o mención un momento ajeno o externo a la evidencia en cuanto tal" (p. 35).

Finalmente, la plenitud o el cumplimiento es un momento nuevo frente a la cualidad y la materia, pero que corresponde especialmente a ésta en el modo de un complemento. Esta noción de cumplimiento es el carácter fundamental con el que Husserl determina su comprensión fenomenológica de la evidencia. También "podría formularse el problema mismo de la evidencia como el problema de la conducción de la mención vacía no-evidente de un estado de cosas a la correspondiente evidencia" (p. 51). Así pues, "ella establece el marco de la posibilidad del cumplimiento, marco que no se constituye como un todo cerrado de determinaciones estrictamente definidas en cuanto a su contenido sino como un predelineamiento" (p.51).

La síntesis de cumplimiento (*Synthesis der Erfüllung*) o, mejor dicho, toda expectativa puede hallar, en vez de cumplimiento, decepción (*Enttäuschung*), lo cual implica una determinación diferente (*Andersbestimmung*) o en otra dirección. ¿Qué quiere decir esto? Quiere decir que los aspectos mentados se revelan de *otro modo de ser* al que habían sido anunciados. En este tipo de acto o síntesis, lo intuido aparece como distinto, "como «*no el mismo*», como «otro» que el *objeto* del acto de intención" (Husserl, 1999, p. 628). Nuevamente en Hua XI, Husserl señala:

> Sin embargo, hay un suceso que va en contra del cumplimiento, la

> decepción, hay una ocurrencia que va en contra de determinar más de cerca, es decir, determinar lo contrario. En lugar de preservar y enriquecer aún más los conocimientos adquiridos, se puede poner en cuestión, anularlos […] Así, en el caso normal de percepción, todo cumplimiento progresa como el cumplimiento de expectativas. Estas son expectativas sistematizadas, sistemas de rayos de expectativas que, al cumplirse, también se enriquecen; es decir, el sentido vacío se vuelve más rico en sentido, ajustándose a la forma en que se prefigura el sentido. Pero cada expectativa también puede ser decepcionada, y la decepción esencialmente presupone un cumplimiento parcial, sin una cierta medida de unidad manteniéndose en la progresión de las percepciones, la unidad de la experiencia vivida intencional se derrumbaría. Sin embargo, a pesar de la unidad del proceso perceptivo que se produce con este contenido de sentido unitario y permanente, efectivamente se produce una ruptura, y la vivencia de "lo otro" (*anders*) surge. También hay una vivencia de "lo contrario" sin interrupción, una decepción de un estilo regular que, en virtud de su regularidad, puede anticiparse y que, por tanto, puede ser prefigurado en el horizonte vacío (Hua XI, 25-26).

Como bien señala Husserl, la decepción esto no mienta una mera privación del cumplimiento, sino un nuevo hecho descriptivo en el que opera una forma de síntesis de la distinción o "síntesis del conflicto". Dicho con más claridad, la intuición no concuerda con la intención significativa, decimos "entra en conflicto", pero la vivencia de este conflicto es una forma de síntesis. En todo caso, la decepción es una *manera* de cumplimiento. ¿Qué significa entonces que tiene lugar una decepción en vez de un cumplimiento? Tomemos como ejemplo la figura del alfil blanco en el ajedrez. Este transcurre, en un principio, de acuerdo a la percepción que cumple sus expectativas de "blanco" y "en perfecto estado". Al continuar el curso de sus escorzos, se me muestra una parte de su lado trasero que no era visible al principio. El predelineamiento originario la presumía como igualmente "blanco" y "en perfecto estado", como en el perfil delantero. Sin embargo, aparece la conciencia de lo "decepción": está teñido de amarillo y no continua en perfecto estado, sino que está maltratado, con fracturas, roto. Aquí se "produce un conflicto entre las intenciones aún en curso y los nuevos contenidos de sentido que ingresan con su originariedad y sus correspondientes horizontes. La fuerza de la plenitud impresional se impone frente a la certeza de la expectativa, y el sentido de la percepción se ve modificado incluso retroactivamente en la esfera retencional, es decir, las mismas expectativas anteriores se ven resignificadas" (Anton Mlinar, 2013b, p. 199-200). El conflicto se da entre el sentido de una intención anticipativa y el sentido de una impresión originaria, es ahí cuando la negación tiene su *lugar* como un tipo determinado de cumplimiento. En efecto, una intención es decepcionada, en el modo de la contrariedad (*Widerstreit*), tan sólo por ser una parte de una intención mayor cuya parte complementaria sí se cumple: "en toda contrariedad hay, pues, también en cierto modo concordancia parcial y contrariedad parcial" (Husserl, 1999, p.629). De nuevo, cumplimiento y decepción coinciden sólo en una cosa: la dirección hacia el objeto por parte de la intención significativa.

§4. Decepción y negación. La propuesta de A. Heyting como puente entre Husserl y Brouwer

Según algunos autores,[24] entre Husserl, Heyting y Brouwer existe un vínculo en cuanto al tratamiento de la negación (como modalidad de la evidencia) se refiere.[25] Me dedicaré a explicitar esta idea en lo que resta del texto. En esta última parte explicitaré este punto. Comenzaré con el concepto de negación brouweriano, después presentaré la propuesta de Heyting.

En párrafos anteriores mencioné cómo Brouwer se vio obligado, casi desde un comienzo, a proponer modificaciones a la lógica clásica que correspondían a su visión de la naturaleza de las entidades matemáticas. Cabe recordar que Brouwer considera las matemáticas como construcciones mentales sin lenguaje (técnico o no) y en la medida en que sólo nos ocupamos de tales construcciones intuitivas, las cuestiones sobre la aplicación o no de una constante lógica, cualquiera que esta sea, no pueden siquiera ser planteadas. No obstante, en cuanto al rechazo o modificación, de parte de Brouwer, de la ley del tercero excluso, las cosas no son muy claras. Tampoco lo es su tratamiento a la concepción de la negación como un operador veritativo funcional (Molina, 2008, p. 95-112). De hecho, su formalización y su aislamiento como tema de investigación no forman parte, en sentido estricto, de su pensamiento.

Es difícil encontrar una tematización precisa sobre el papel del enunciado negativo en la lógica de Brouwer. Sin embargo, si tenemos en cuenta sus primeros trabajos (1908) hasta 1923, encontraremos que sí hace uso de la negación, pero englobada en una idea más general: la *incompatibilidad* entre construcciones matemáticas.

En efecto, en los primeros trabajos de Brouwer, el enunciado negativo es definido como una incompatibilidad entre dos construcciones matemáticas,[26] posteriormente la identificó con el concepto de *absurdo*. En otros momentos, como en el artículo del año 1923 *Intuitonistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe*, se refiere a ella en medio de discusiones sobre el principio del tercero excluido o sobre la teoría de conjuntos. Ahora bien, según Brouwer, la verdad se confirma en *pruebas constructivas* y la falsedad se genera a partir de una *contradicción*. En ambos casos, la admisión de una proposición como válida, *no se sigue* de su *necesidad*, pues bien podría ser el caso que se tratara de una proposición para la cual no existe una prueba constructiva. En

24.- (Tieszen, 1984), (Gethmann, 2003) (van Atten 2007, 2015).

25.- Es posible encontrar más entrecruces, pero mor del espacio he decidido no agregarlos. Para una visión más panorámica de las convergencias entre Husserl, Brouwer y Heyting, *cf.* (Franchella, 2007).

26.- “En el punto en que se enuncia la contradicción, yo simplemente percibo que la construcción ya no cabe, que la estructura requerida no puede ser incrustada en la estructura básica dada” (*Collected Works I*, p.73).

suma, para Brouwer la alternativa lógica clásica *A v ¬A* no es exhaustiva. Así, una vez que la aplicabilidad del tercero excluso se ha "puesto en duda", se vuelve necesaria la creación de una lógica donde sea posible hablar de más valores de verdad (Palau, 2002, p. 79 y ss.) Es precisamente en el artículo de 1908, *La no fiabilidad de los principios lógicos*, donde Brouwer admite la posibilidad de una divergencia respecto del tercero excluso, pero sin llegar a negarlo:

> Consideremos el principio del tercero excluso: este afirma que toda suposición es verdadera o es falsa. En matemáticas esto significa que toda supuesta incorporación de un sistema a otro, satisfechas ciertas condiciones dadas, se puede realizar por una construcción, o podemos llegar también, por una construcción, a la detención del proceso que conduciría a dicha incorporación. De esto se sigue que la cuestión de la validez del principio del tercero excluso es equivalente a la cuestión de *si pueden existir problemas matemáticos insolubles* (*CW I*, p. 109-110)

La cita es muy clara. Brouwer reconoce que toda proposición matemática *P* debe estar correlacionada con su construcción mental *C*. Así, afirmar *P* es afirmar que se ha realizado la construcción *C*. Pero si afirmamos ¬P estamos afirmando que se ha demostrado, por una construcción mental C^1, que *C* no se puede realizar como *P*. Lo cual no tiene mucho sentido. Ahora bien, existen casos donde la construcción *C* no ha sido realizada (demostrada constructivamente) y queda *indeterminada*. Por ejemplo, una oración como *(1) Aquiles es un hombre fuerte*, tiene una demostración (informal) que apela a las definiciones contenidas en los libros de *La Ilíada*. Sin embargo, la oración, *(2) Aquiles tiene un número primo de lunares o no lo tiene*, no tiene modo alguno de ser afirmada o negada. Si consideramos a *(2)* como una instancia de *A v ¬A*, entonces *(2)* o bien es verdadera o bien es falsa. Si la consideramos como verdadera, no se gana mucho, pues la información del número de los lunares de Aquiles no se obtuvo por medio de una prueba o *demostración*. Un ejemplo más formal se puede encontrar en el artículo antes referido, *La no fiabilidad de los principios lógicos*, donde Brouwer cita como ejemplo la expansión decimal de π y la posición donde cierto número de dígitos consecutivos sean iguales a ceros. En resumen, lo ejemplos anteriores evidencian que la incompatibilidad entre dos construcciones matemáticas *demuestra* la imposibilidad de subsumir un sistema (matemático) de objetos en otro sistema (matemático).

El concepto de negación en Heyting. Este alumno de Brouwer es, quizá, el ejemplo más claro de la aplicación de la artillería fenomenológica a un ambiente lógico-matemático. En efecto, en cierto período de su producción científica, Heyting utilizó una terminología fenomenológica para expresar la interpretación intuicionista de las constantes lógicas. La interpretación de Heyting de las condiciones para *demostrar*[27] enunciados con constantes lógicas tiene

27.- Hay que entender que se trata de una demostración intuitiva e informal. Para ser más explícitos: una prueba clásica obtiene su fuerza epistémica debido a la naturaledos fuentes teóricas: por un lado, algunos resultados del trabajo Brouwer, específicamente la idea de que las demostraciones son un tipo de *construcción* (Legris, 2008, p. 80 y ss.) y, por otro lado, algunas conclusiones de las *Investigaciones lógicas* de Edmund Husserl, particularmente la cuarta y sexta investigaciones.[28]La prueba de esto se encuentra en su texto, *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik* (1931) —contribución presentada en el simposio sobre metodología de las ciencias formales realizado en Königsberg en septiembre de 1930—. En dicho ensayo, Heyting analiza los conceptos de enunciado, proposición y verdad a contraluz de las meditaciones fenomenológicas de Husserl. Cabe apuntar que la intención de Heyting era explorar el significado de las constantes lógicas dentro de un marco donde se especifique la noción de prueba, por ello comenzó distinguiendo entre un enunciado (*Aussage*) y una proposición (*Satz*).

> "Una proposición es la *afirmación* de un enunciado" (*ein Satz ist die Behauptung einer Aussage*). Un enunciado matemático (*mathematische Aussage*) expresa una cierta expectativa (*bestimmte Erwartung*). Por ejemplo, el enunciado "la constante de Euler *C* es racional" expresa la expectativa de que podamos encontrar dos enteros *a* y *b* tales que *C=a/b*. Tal vez la palabra "intención" (*Intention*), acuñada por los fenomenólogos, exprese aún mejor lo que aquí se quiere decir por expectativa. También uso la palabra "enunciado" (*Aussage*) para la intención que es expresada lingüísticamente mediante la declaración. La intención, como ya enfatizó anteriormente, se refiere no sólo a un estado de cosas (*Sachverhalt*) existente de manera independiente de nosotros, sino a una vivencia (*Erlebnis*) pensada como posible, como se desprende del ejemplo anterior" (1931, p. 113).

En la cita se enuncian varios conceptos que debemos rescatar. En primer lugar, la dupla *intención-expectativa*, la noción de *estados de cosas* y finalmente el concepto de *vivencia* (intencional). Comienzo mi análisis por este último concepto. Siguiendo a Husserl, Heyting concibe a las vivencias intencionales como aquellas "construcciones que hace el sujeto de conocimiento, de modo que no se hace referencia a una realidad matemática independiente del sujeto." (Legris, 2008, p. 81). En efecto, Heyting retoma la nota esencial de una vivencia intencional, a saber, su referencia objetiva, el modo de referirse *a algo* (como el juzgar, el imaginar, el percibir, etc.)[29] Siguiendo este

za convincente de los pasos de inferencia por los que se forma. En el caso de una construcción intuicionista esta se ciñe a la *realización* de la intención expresada en términos del *cómo se construyó*, es decir, de la naturaleza de los pasos tomados en la construcción (Prawitz, 2012, p. 46 y ss.)

28.- Hay que aclarar que la influencia de Husserl sobre Heyting está mediada por Oskar Becker, en especial por su libro *Mathematische Existenz* (1927). "[…] lo que al parecer sí sabemos es que Heyting, al dar las interpretaciones intuicionistas de las nociones lógicas básicas, fue influenciado por Husserl a través de Oskar Becker" (Martin Löf, 1987, p. 415).

29.- "No importa lo que se cuenta, sino el proceso de contar mismo. La actividad mental, es esencial […]Tan pronto como los numerales fueron introducidos, la gente apunte, resulta que para Heyting las matemáticas son el correlato objetivo de las construcciones mentales hechas por un sujeto racional. “Cada proposición matemática debe ser una afirmación acerca de las construcciones mentales” (1974, p. 87). Dicho con mayor exactitud, el objeto intencional al cual se refiere un enunciado o proposición matemática es el *significado* de ese enunciado, en este caso, las *construcciones mentales*. El cumplimiento intuitivo consistiría en saber si esa construcción constituye una *demostración* o *prueba* del enunciado de un determinado *estado de cosas* en tanto correlato intencional de dicho enunciado. Veamos esto con un poco más de detalle.

Es importante destacar que cuando se habla de la *verdad* de una proposición esta se explica como el *conocimiento de la prueba* que satisface una proposición verdadera (*S sabe que P* se “transforma” en *S conoce una prueba de P* o, dicho de otro modo: *P es verdadera* se “transforma” en *existe una prueba para P*.[30] Es factible decir que para Heyting una proposición es la intención de una prueba, pues las pruebas son, finalmente, construcciones. Es así que se entiende porque para Heyting la afirmación de un enunciado es correlato del cumplimiento de la intención efectuando una construcción, tal como se pretende en el enunciado. La intención expresada por una proposición se cumple exactamente si conocemos una construcción matemática que demuestre que las cosas son lo que la intención dice que son[31] (van Atten, 2015, 87). Es la forma en la que la proposición *intencionada* se cumple. También se podría pensar que una declaración matemática es la expresión de un problema. Así, la intención expresada por la declaración se cumple si resuelve el problema. Dicho brevemente mientras Husserl habla de *intención* y *cumplimiento*, Heyting habla de *significado* y *demostración* (*prueba*), respectivamente:

> La afirmación de un enunciado significa el cumplimiento de la intención. Por ejemplo, la proposición “C es racional” significa que se han encontrado los enteros deseados […] La afirmación de un enunciado no es más un enunciado, sino la comprobación (*Feststellung*) de un hecho empírico, a saber, el cumplimiento de la intención expresada por el enunciado (Heyting 1931, p. 113).

---

ha aprendido a abstraer del contenido de las percepciones que son aisladas y considerarlos como entidades puras” (1974, p. 81).

30.- Per Martin-Löf, a quien mencioné anteriormente, presenta una interpretación intuicionista del concepto de prueba y construcción en términos puramente husserlianos. La comparación queda del siguiente modo: Acto- Aprehensión/captación; objeto del acto-Prueba y contenido del acto-lo probado. *Cf*. (1985) y (1987).

31.- He aquí una prueba. “Considérese una solución al problema *P*. Tal construcción también serviría para probar la proposición A_P, porque A_P expresa una intención hacia una construcción que es una solución de P. Pero entonces la construcción también debe ser una solución al problema P_{AP} porque estos son las construcciones intendidas por A_P. Por otro lado, consideremos una solución de P_{AP}. Esta solución debe servir para cumplir la intención expresada por A_P, pero mediante la explicación de A_P, las construcciones que sirven para cumplir esta intención son precisamente las soluciones del problema *P*” (Sundholm, 1983, p. 159).

En este contexto se hace la distinción entre construcciones *posibles* y construcciones *realizadas*. “Estas últimas son las auténticas demostraciones, que son vistas a la vez, y manera indistinguible, como el proceso de demostrar y el resultado de ese proceso. Las demostraciones son entidades gnoseológicas, mientras que las construcciones son entidades semánticas” (Legris, 2008, p. 82). Resumiré lo hasta ahora dicho: (i). Una proposición matemática se prueba realizando una determinada construcción que debe satisfacer ciertas propiedades (en el ejemplo de Heyting: “la constante de Euler es racional”, el objeto determinado serían un par de número enteros); (ii). El significado de una proposición se explica en términos de qué construcciones deben realizarse para probar la proposición, y (iii). La afirmación de una proposición no es en sí misma una (u “otra”) proposición (Sundholm, 1983, p. 161).

Ahora bien, Heyting toma nota del hecho de que la decepción (y no el mero no-cumplimiento) de una *intención*, en el sentido fenomenológico de Husserl (y Becker),[32] parece describir bien el concepto de negación diseñado por la lógica intuicionista. Heyting piensa que este tipo de emplazamientos superan el viejo prejuicio de la lógica tradicional de asumir que los juicios o bien son una aceptación o bien un rechazo. Para Heyting, la negación es una asunción como la convicción positiva, *pero* de signo opuesto. Por eso es que se le considera un juicio. En otras palabras, la negación de un enunciado significa la intención cognoscitiva de un *conflicto* (*Widerstreit)* vinculado con la intención que el enunciado negado significa en una suerte de *evidencia negativa*:

> Una función lógica es un proceso (*Verfahren*) para formar un enunciado diferente de un enunciado dado. La negación es tal función; Becker, siguiendo a Husserl, ha descrito su significado muy claramente. Para él, la negación es algo absolutamente positivo, a saber, la intención de un conflicto ligado con la intención originaria (*ursprünglichen Intention*). El enunciado “C no es racional” significa, también, la expectativa de que se puede derivar (*herleiten*) una contradicción (*Widerspruch*) a partir del supuesto de que C es racional. Es importante anotar que la negación de un enunciado siempre hace referencia a un procedimiento demostrativo (*Beweisverfahren*) que conduce a una contradicción, incluso si en el enunciado original no se menciona ningún procedimiento demostrativo (Heyting, 1931, p. 113).

Como se puede observar, en Heyting la negación, en tanto *conocimiento del conflicto*, implica dos fases: primero, la *intención* del *estado de cosas* y, se-

32.- Dicho sea de paso, para Becker la negación no indica simplemente la mera privación del cumplimiento, sino un hecho descriptivo nuevo. Becker repite la idea husserliana de cumplimiento parcial (Hua XI, §7) o “cumplimiento más débil”, y añade la distinción entre el ““no cumplimiento” y la frustración, lo que lleva, a su vez a distinguir entre dos tipos de negación, a saber, entre la negación como no afirmación del enunciado y la negación como afirmación de que el enunciado lleva a contradicción (entre no afirmar p y afirmar que no p). El no cumplimiento tiene un sentido negativo (o “privativo”) a diferencia de la frustración, que es positiva” (Legris, 2008, p. 84).

gundo, la *decepción* de esta *intención* en el estado de cosas. Si tomamos en cuenta la anterior categorización matemática se obtiene un notable paralelo con la categorización dada por Husserl. Así, un juicio matemático *P* puede ser:

1. Cumplido.
2. Frustrado/Decepcionado.
3. Ni cumplido ni frustrado ni tenemos un método que conduzca al cumplimiento o la frustración de P.

Lo que Heyting argumenta aquí es que las intenciones de significado matemático también pueden tener cumplimientos de significado correspondientes (Tieszen,2008, p.91 y ss.) ¿Esto qué quiere decir? Básicamente lo que se quiere decir es que una vez que se haya cumplido o frustrado un juicio matemático, este debe considerarse como cumplido o frustrado para todos los momentos posteriores en un tipo "idealización" de la que también forma parte la prueba matemática, pero que no está involucrada en la confirmación empírica. En efecto, el enunciado subjetivo del tercero excluido, en particular, nos dice que todo juicio puede ser llevado a una adecuación positiva o negativa.

En resumen de lo anterior se derivan las siguientes explicaciones del significado de las constantes lógicas (en lógica proposicional) (van Atten, 2015, p. 87):

Conjunción: la intención expresada por $p \wedge q$ es cumplida cuando *p* y *q* son cumplidas.

Disyunción: $p \vee \neg q$, se cumple cuando, al menos, uno de los dos, *p* o *q*, se cumple.

Implicación: $p \rightarrow q$, se cumple cuando el sujeto tiene una construcción que transforma cualquier construcción (prueba) de *p* en una construcción (prueba) de *q*.

Negación: *p* se cumple cuando el sujeto tiene una construcción que transforma cualquier prueba de *p* en la prueba de una contradicción.

Finalmente, además de los vínculos ya mencionados ¿qué otros aspectos acercan a Heyting al proyecto husserliano? En primer lugar, en *Lógica formal y lógica trascendental*, Husserl señala que toda proposición puede ser llevada a la evidencia de la claridad, al ser confrontada con los estados de cosas. A esto Heyting lo llama una *prueba por construcción* (Heyting, 1930, p. 959). Segundo. Para Husserl la claridad que se alcanza por medio de la evidencia no es únicamente verdadera mientras dure la actividad sintético-categorial actual, es verdadera en todo momento. A esto Heyting lo nombra como *cumplimiento perpetuo* o, simple y llanamente, "teorema". Así, cada teorema matemático es la expresión de un resultado de una construcción exitosa que se valida a sí misma de manera universal y de una vez por todas. Tercero. Para Husserl la tarea de la lógica es describir *cómo* alcanzamos la verdad. Para Heyting la tarea de la lógica es la de edificar construcciones más simples por medio de las constantes lógicas. Cuarto. Para Husserl la lógica tiene un valor preponderante en buena parte de su obra. Del mismo modo, Heyting señala que "La lógica no es el fundamento de las matemáticas, por el contrario, es conceptualmente una parte complicada y sofisticada de ellas" (1974, p. 87).

Conclusiones críticas

Al igual que la fenomenología, el intuicionismo estudia las propiedades esenciales y estructurales de la conciencia. Tanto Brouwer como Husserl (incluido Heyting) se interesaron por la "arquitectura interna" de la conciencia y por las preguntas *originarias* sobre las construcciones matemáticas. Asimismo, la fenomenología y el intuicionismo reconocen que la noción fundamental de sujeto no es psicológica, sino trascendental. En los casos particulares de Brouwer y Heyting no se presupone la construcción del mundo, antes bien la constitución de lo mundano *presupone lo matemático*. Por otro lado, Brouwer y Husserl están interesados en las posibilidades esenciales que tiene el sujeto y su relación con los objetos ideales, las posibilidades ideales, las necesidades ideales y la comunidad idealmente posible (van Atten, 2017, p. 286-290). Eso sin contar el desarrollo sobre la estructura de la conciencia interna del tiempo.

Con base en lo anterior, se puede afirmar que entre Husserl, Brouwer y Heyting existen importantes convergencias que permiten el pasaje teórico de una postura a otra. Sin embargo, apoyar al intuicionismo a través de la fenomenología exige una serie de modificaciones que no deben pasarse por alto. Mencionaré algunas de ellas sin entrar en detalle. Por un lado, mientras que la fenomenología sostiene que la evidencia es una garantía de la verdad, en el intuicionismo la evidencia se convierte en un criterio revisable (sin ser por ello un criterio adecuado de verdad). Además, en fenomenología se habla de grados de evidencia con respecto a un mismo objeto (la "x determinable"), algo que en el intuicionismo difícilmente podría ser aceptado. (Franchella, 2007, p. 13 y ss.) Lo anterior deriva en otro problema. En el caso particular de la negación *no es totalmente claro que exista una construcción que corresponda al objeto de la intención que no es completada*, esto significa que no existe un correlato objetivo a los juicios negativos. Así, contrario a lo que ocurre en los juicios positivos, un estado de cosas negativo nunca puede ser "traducido" de la realidad.

Referencias bibliográficas

Husserliana

[Hua XI] *Analysen zur passiven Synthesis. Aus Vorlesungs und Forschungs-manuskripten* (*1918-1926).* Kluwer Akademic Publishers, Holanda/Boston/ Londres.

Husserliana Dokumente

Schuhmann, K. (1977). *Husserl-Chronik (Denk- und Lebensweg Edmund Husserls)*, Husserliana Dokumente. Nijhoff, Den Haag.

Husserl, Edmund. 1994. *Briefwechsel*. Hrgs. Karl Schuhmann. The Hague, Netherlands: Band III/4: Die Freiburger Schüler.

Otras ediciones

Investigaciones lógicas (1999). Trad. José Gaos y Manuel García Morente, Alianza Madrid.

L.E.J. Brouwer

Brouwer, L.E.J. (2011). *Cambridge Lectures on Intuitionism*, Dirk van Dalen (Ed.) Cambridge/London/New York, Cambridge University Press

------------------- (1975). *Collected Works I. Philosophy and Foundations of Mathematics*, A. Heyting (Ed.), Amsterdam/Oxford American Elsevier Publishing Company, Inc. New York. North-Holland Publishing Company.

Arendt Heyting

Heyting, Arend (1930). Sur la logique intuitionniste, *Académie Royale de Belgique, Bullletin de la Classe des Sciences* 16: pp. 957–963.

------------------- (1931). Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik en Erkenntnis, vol. 2. pp. 106-115.

-------------------- (1955). *Les fondements des mathématiques. Intuitionisme, théorie de la démonstration*, Gauthier-Villars, Paris, Louvain.

---------------------(1958). Intuitionism in mathematics en Klibansky (Ed.) *Philosophy in the mid-century. A survey*, Firenze, La Nuova Italia, pp. 102-115.

--------------------(1974). Intuitionistic Views on the Nature of Mathematics *Bollettino dell'UMI* 9, pp. 122-134.

Bibliografía secundaria

Anton Mlinar, Ivana (2012). Un análisis de la evidencia en la *Lógica formal y trascendental* de Husserl. *Investigaciones Fenomenológicas*, UNED, Madrid, No. 9, 2012, pp. 195-220.

------------------------- (2013a). La evidencia en *Ideas I*: originariedad del cumplimiento. *Δαιμων. Revista Internacional de Filosofía*, nº 58, 2013, pp. 125-139.

-------------------------- (2013b). Sentido modal de la evidencia en Husserl: modalidad versus modalización. *Areté, Revista de Filosofía*, vol. XXV, N° 2, 2013. Pp. 199-200.

------------------------- (2014). La evidencia en los *Prolegómenos* y las *Investigaciones lógicas*. Primeros aportes para una comprensión modal de la evidencia en Husserl. *Investigaciones Fenomenológicas*, UNED, Madrid, No. 11, pp. 33-56.

Beyer, C. (1996). *Von Bolzano zu Husserl, Eine Untersuchung* über *den Ursprung der phänomenologischen Bedeutungslehre*, Dordrecht, Boston, London, Kluwer.

Canela Morales, Luis Alberto (2016). Aritmetización del análisis y construcción formal: Husserl como alumno de Weierstrass y Kronecker. *Eikasia. Revista de Filosofía*, No. 72, Editorial Eikasia S.L. Pp. 133-152.

Casari, Ettore (2017). Husserl and Bolzano en Centrone, S. (Ed.) *Essays on Husserl's Logic and Philosophy of Mathematics*, Springer Science+Business Media B.V.

da Silva, Jairo (2016). Husserl and Hilbert on completeness, still. *Synthese*, 193.

Dummett, Michael (2000), *Elements of Intuitionism*, Clarendon Press, Oxford.

Franchella, Miriam (2007). Arend Heyting and Phenomenology: Is the Meeting Feasible? *Bulletin d'analyse phénoménologique* III 2.

Frechétte, G. (2011). De la proposition à l'état de choses: Husserl lecteur de Bolzano en A. Dewalque, D. Seron, y B. Leclercq (Eds.) *Catégories ontologiques et catégories logiques*, Liège, Presses de l'Université de Liège, pp. 33-53.

Gerard, Vincent (2008). Husserl, élève de Kronecker et Weierstrass: Théorie de la signification, théorie des nombres et théorie des fonctions" en J. Benoist (Ed.) *Husserl*, Paris: Les Éditions du Cerf.

-------------------- (2010). Mathesis universalis et géométrie: Husserl et Grassmann en Ierna, Carlo *et al*. (Eds.) *Philosophy, Phenomenology, Sciences*, Springer Science+Business Media, pp. 255-300.

Gethmann, Carl Friedrich (2003). Hermeneutic Phenomenology and Logical Intuitionism: On Oskar Becker's Mathematical Existence. *The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy* III, pp. 143–60.

Grattan-Guinness, I. (1982). Psychology in the Foundations of Logic and Mathematics: the Cases of Boole, Cantor and Brouwer en *History and Philosophy of Logic*, Taylor & Francis, 3:1.

Hartimo, Mirja (2011). Grassmann's influence on Husserl en H.-J. Petsche *et* al. (Eds.), *From Past to Future: Graßmann's Work in Context*, Springer, Basel. Pp. 149-159.

Heidegger, M. (2006). *Prolegómenos para una historia del concepto de tiempo*, Alianza, Madrid.

Hernández Marcelo Jimmy (2015) El puesto de Husserl en el conflicto entre Weierstrass y Kronecker, *El Mirador*, Nº. 16, pp. 29-47

Ierna, Carlo (2012). La notion husserlienne de multiplicité: au-delà de Cantor et Riemann en Methodos [En línea], 12. URL: http://methodos.revues.org/2943.

Legris, Javier (2008). Intención y conflicto: sobre la interpretación de la negación en el intuicionismo matemático en *O que os faz pensar*. Cadernos do Departamento de Filosofia da PUC-Rio.

Martin-Löf, Per (1985/1996). On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws en *Nordic Journal of Philosophical Logic* 1, pp. 11–60.

------------------- (1987). Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof. *Synthese*, 73, p. 407–420.

Molina, Jorge Alberto (2007). Cálculo y lenguaje en el intuicionismo matemático. Simposio 100 años de intuicionismo matemático. *El Centenario de la tesis doctoral de L. E. J. Brouwer*. Buenos Aires, Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires

---------------------- (2008). Negación y Doble Negación en el Intuicionismo de Brouwer, *O que nos faz pensar* nº23, junho.

Okada, M. (2013). Husserl and Hilbert on Completeness and Husserl's Term Rewrite-based Theory of Multiplicity. Invited paper, 24th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA'13) (pp. 4–19). Edited por Femke van Raamsdonk. The Netherlands.

Ortiz Hill, Claire (1994). Frege's Attack on Husserl and Cantor, *The Monist*, vol. 77, No. 3, pp. 345-357.

Palau, Gladys (2002). *Introducción filosófica a las lógicas no-clásicas*, Gedisa, Barcelona.

Paredes Martín, María del Carmen (2002). *Teorías de la intencionalidad*, Síntesis, Madrid.

Prawitz, Dag (2012). Truth and Proof in Intuitionism en Peter Dybjer *et. al*. (Eds.) *Epistemology versus Ontology. Essays on the Philosophy and Foundations of Mathematics in Honour of Per Martin-Löf*, Springer, Dordrecht/Heidelberg/New York/London.

Rosado Haddock, Guillermo (2017). Husserl and Riemann en *Essays on Husserl's Logic and Philosophy of Mathematics*, Centrone, S. (Ed.), Springer, Dordrecht, The Netherlands.

Sebestik J. (2003). Husserl Reader of Bolzano en *Husserl's Logical Investigations Reconsidered*. Contributions to Phenomenology, vol 48. Springer, Dordrecht

Sundholm, Göran (1983). Constructions, Proofs and the Meaning of Logical Constants, *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 12, No. 2, pp. 151-172.

Tieszen, Richard (1989). *Mathematical Intuition. Phenomenology and Mathematical Knowledge*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

------------------------ (2008). The intersection of intuitionism (Brouwer) and phenomenology (Husserl) en van Atten Mark, Pascal Boldini, Michel Bourdeau y Gerhard Heinzmann (Eds.) *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007),* Birkhäuser, Basel/Boston/Berlín.

Troelstra, A.S. (1977). *Choise Secuences. A chapter of intuitionistic mathematics*, Oxford University Press.

---------------- (1982). On the Origin and Development of Brouwer's Concept of Choice Sequence en Troelstra A.S. y D. van Dalen (Eds.), *The L.E.J. Brower Centenary Symposium*, North-HoNand Publishing Company.

van Atten, Mark, Dirk van Dalen y Richard Tieszen (2002). Brouwer and Weyl: The Phenomenology and Mathematics of the Intuitive Continuum en *Philosophia Mathematica* (3) Vol. 10.

van Atten, Mark, (2004). Brouwer and the Hypothetical Judgement. Second Thoughts on John Kuiper´s Ideas and Explorations. Brouwer´s Road to Intutionism. *Revue Internationale de Philosophie* 58, 4, pp. 501-516.

---------------------- (2005). The Correspondence between Oskar Becker and Arendt Heyting en Peckhaus, V. (Comp.) *Oskar becker und die Philosophie der Mathematik*, Múnich, Wilhelm Fink, Verlag.

--------------------- (2007). *Brouwer meets Husserl. On the phenomenology of choice sequences*, Springer, Netherlands.

--------------------- (2015). *Essays on Gödel's Reception of Leibniz, Husserl, and Brouwer*, Springer, Heidelberg/New.

-----------------------(2017)- Construction and Constitution in Mathematics en Centrone, S. (Ed.) *Essays on Husserl's Logic and Philosophy of Mathematics*, Springer, Science+Business Media B.V, Dordrecht, The Netherlands.

van Dalen, Dirk (1978). Brouwer: The Genesis of his Intuitionism" en *Dialéctica* Vol. 32, No 34.

------------------ (1998). From a Brouwerian Point of View, *Philosophia Mathematica* (3) Vol. 6.

--------------------- (1999). *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer*. Vol. I, Oxford, Clarendon Press.

-------------------- (2008). Another look at Brouwer's dissertation en van Atten, Mark Pascal Boldini, Michel Bourdeau y Gerhard Heinzmann (Eds.) *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007),* Birkhäuser, Basel/Boston/Berlín.

-------------------- (2011). *Companion to The Selected Correspondence of L.E.J. Brouwer*, Springer, London Dordrecht Heidelberg New York.

------------------- (2013). *L.E.J. Brouwer. Topologist, Intuitionist, Philosopher. How Mathematics Is Rooted in Life.* Springer London/Heidelberg/New York/ Dordrecht.

van Stigt, Walter P. (1979). The Rejected Parts of Brouwer's Dissertation on the Foundations of Mathematics, *Historia Mathematics* 6, pp. 385-404.