# Planeación de la Producción en la Pequeña y Mediana Empresa Mexicana

**Dr. Federico González Santoyo**

**M. en A. Gerardo P. Morelos**

## RESUMEN

El propósito de la presente investigación es aplicar la Técnica de Descomposición de Benders a la planeación de la producción del sector industrial forestal. La planeación y calendarización de la producción de productos forestales es de fundamental importancia para la empresa, pues le permite operar de manera más eficiente desde el punto de vista técnico-económico, además de satisfacer adecuadamente las necesidades del mercado en que se desarrollan sus transacciones comerciales de venta del producto.

Desde el punto de vista de la empresa mexicana, se encuentra inmersa en una competencia de alcance internacional ante el TLC en la producción y distribución de sus productos, por lo que es de interés optimizar dicho proceso.

En el presente trabajo se presenta un algoritmo para la planeación y calendarización de la producción multiproducto, modelado como un problema lineal entero mixto.

**Palabras clave: optimización, sistemas de producción, Técnicas de Descomposición de Benders, calendarización**.

## 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El criterio de agrupamiento de productos (Bitran, 1981) empleado, es hecho en familias y éstas a su vez en tipos, definidos como:

Artículos: bienes de consumo final (productos finales), demandados por los consumidores en unidad de tiempo.

Tipos de Productos: grupo de artículos (colección) de productos finales que tienen costos directos similares (excluyendo el trabajo), costos de almacenamiento por unidad por período, productividad y presentan el mismo modelo de demanda estacional, así como el mismo rango de producción (número de unidades que pueden producirse por unidad de tiempo).

Familia de Productos: representada por un conjunto de artículos dentro de un tipo tal que éstos, comparten una característica común; esto implica además que son grupos de artículos de productos finales que tienen un mejor costo inicial y requieren un número idéntico de las mismas partes.

En general, los tipos de artículos incluyen un mismo modelo de demanda y todos los artículos pertenecen al mismo tipo, tal que un tipo puede formar una agregación de familias; para problemas de la misma naturaleza, los costos iniciales son tomados por familias y los costos de tiempo extra y de almacenamiento por tipos.

El problema en estudio es modelado dentro de la Programación Entera - Mixta (PEM) como un problema de gran escala; el problema presenta la siguiente estructura.

$$
\begin{aligned}
&\min_{X \in S(Y)} C'X + F'Y \\
&\text{s. a.} \quad GX + HY \geq B \\
&\qquad\quad X, Y \geq 0 \\
&\qquad\quad Y \text{ entera}
\end{aligned}
$$

Donde S (Y) es un conjunto de restricciones en (Y), incluyendo las restricciones de integrabilidad; si Y es fijada, el problema se convierte en uno lineal de variables continúas. La solución de éste problema puede obtenerse empleando diversos enfoques y técnicas matemáticas; uno de los usos prácticas de este tipo de modelado es aplicado en la solución del problema de planeación y calendarización de la producción.

En el modelo de planeación de la producción, un horizonte de planeación apropiado para tomar decisiones, es definido como un ciclo completo estacional que captura las fluctuaciones de la demanda. Es recomendable tomar ciclos anuales.

En este trabajo se trata una aproximación híbrida la cual es aplicada al modelo de Programación Entera -Mixta considerado por Graves (1982), en vez de usar Relajación Lagrangeana con respecto a un cierto grupo de restricciones en el modelo original; el modelo será particionado acorde con la Teoría de Descomposición de Benders. Los cortes de Benders son evaluados externamente por medio de un conjunto de multiplicadores de Lagrange los cuales son actualizados por optimización subgradiente, el subproblema que se requiere resolver en esta aproximación en el caso general, es un subproblema del tamaño de lote económico sin restricción de capacidad.

## 2. EL PROBLEMA DE PLANEACION DE LA PRODUCCION

La planeación y calendarización de la producción mantiene dos objetivos. La función de planeación, determina las fuentes de requerimientos y el punto en el tiempo que estos ocurren, en orden de satisfacción de la demanda agregada sobre el horizonte de planeación.

Como se citó anteriormente para propósitos de planeación el producto a manufacturar es dividido en dos niveles de agregación.

El producto final es entregado a los consumidores en agregación de familias, por lo que la necesidad de artículos es considerada en conjunto de familias cuando se hace la calendarización de la producción.

En este tipo de modelado el problema es decidir sobre una calendarización de la producción en el nivel de familia, la cual en el turno determina al inventario en el nivel tipo, al final de cada período.

Esta decisión deberá ser hecha en orden que minimice la suma de costo de tiempo extra, costos de inventario y actualización de costo sujeto a las restricciones de capacidad y requerimientos de demanda, pero es distinguida para la aproximación jerárquica tradicional; ambas decisiones de familias y tipos son incluidas en una formulación general del problema.

El problema matemáticamente es escrito como se muestra a continuación.

$$(PS) \quad Z_{PS} = \mathrm{Min} \sum_{t} (C_t O_t + \sum_{i} h_{it} I_{it} + \sum_{j} \sum_{t} s_{jt} x_{jt}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j \in T(i)} FP_{jt} - P_{it} = 0, \forall\, i, t, \qquad (1)$$

$$\sum_{i} K_i P_{it} - O_t \leq r_t, \forall\, t, \qquad (2)$$

$$\sum_{j \in T(i)} FI_{jt} - I_{it} = 0, \forall\, i, t, \qquad (3)$$

$$FP_{jt} + FI_{j,t-1} - FI_{jt} = d_{jt}, \forall\, j, t, \qquad (4)$$

$$FP_{jt} - m_{jt} X_{jt} \leq 0, \forall\, j, t, \qquad (5)$$

$$O_t, P_{it}, I_{it}, FP_{jt}, FI_{jt}, \geq 0, \forall\, i, j, t, \qquad (6)$$

$$X_{jt} \in \{0,1\}, \forall\, j, t, \qquad (7)$$

Dónde:

T = Número de períodos de tiempo.

C = Costo de una hora de tiempo extra en el período t.

h = Unidad de costo de almacenamiento de inventario para el tipo i, durante el período de tiempo t.

S = Costo de preparación por familia j en el período de tiempo t.

$S_{jt}$ = Costo de preparación por familia j en el período de tiempo t.

$d_{it}(d_{it})$ = Demanda del tipo i (familia j) durante el período de tiempo t.

T(i) = Conjunto de familias pertenecientes al tipo i.

$m_{jt}$ = Una cota superior de la cantidad de producción para la familia j durante el período de tiempo t.

$$m_{jt} = \sum_{k \geq t} d_{jk}$$

$r_t$ = Tiempo de producción regular disponible en el período de tiempo t.

Las Variables de Decisión del Modelo son:

$O_t$ = Horas de tiempo extra de la producción en el período de tiempo t.

$I_{it}(FI_{jt})$ = Inventario de tipo i (familia j) durante el período de tiempo t.

$P_{it}(FP_{jt})$ = Cantidad de producción del tipo i (familia j) durante el período de tiempo t.

$X_{jt}$= Variable cero -uno, indica la actualización de la familia j en el período de tiempo t.

En lugar de la presente restricción del conjunto puesta en (1), (Graves, 1982), originalmente se construye el modelo usando una restricción de balance de inventarios en el nivel tipo, es decir:

$$P_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it}, \forall\, i, t.$$

Este cambio puede ser hecho desde que:

$$\sum_{j\in T(i)} d_{jt} = d_{it} \qquad \sum_{j\in T(i)} FI_{jt} = I_{it},\ \forall i,\ t.$$

La restricción (2) del conjunto asegura la factibilidad de la capacidad; la restricción (3) del conjunto enlaza los inventarios de familias y tipos juntos, y la restricción (4) del conjunto es una restricción de balance de inventarios. La restricción (5) del conjunto asegura que $FP_{jt}$ es cero cuando X es cero; en otro caso es redundante.

## 3. METODOLOGIA EMPLEADA EN LA SOLUCION

El procedimiento de solución es basado en las Técnicas de Descomposición de Benders, donde algunas variables son clasificadas como complicadas en (PS), las variables escogidas como unas de las variables complicadas son $X_{jt}$, $FI_{jt}$, $FT_{jt}$ que producen un problema en el nivel tipo y un problema en el nivel de familia.

Esta descomposición puede parecer peculiar en conexión con la estructura jerárquica de (PS), esto muestra que puede tener muchas ventajas no solamente cuando aparece la estructura de subproblemas maestros sino también cuando aparece la posibilidad de interpretación de la información dual para el subproblema.

Para esta partición de las variables, el subproblema de Benders mostrado, que es separado por períodos de tiempo, es obtenido como:

(PSUBt)

$$Z_{PSUB}(t) = \text{Min. } C_t O_t + \sum_i h_{it} I_{it}$$

$$P_{it} = \sum_{j\in T(i)} FP_{jt},\ \forall i,$$

$$\sum_i K_i P_{it} - O_t \le r_t,$$

$$I_{it} = \sum_{j\in T(i)} FI_{it},\ \forall i,$$

$$O_t,\ I_{it},\ P_{it} \ge 0,\ \forall i.$$

Una cota superior en el valor óptimo es proporcionada por el subproblema, cuando la constante, $\sum_j \sum_t s_{jt} X_{jt}$ es adicionada a $\sum_t Z_{PSUB}(t)$ entonces ésta es restricción de (PS). Este es el hecho de que algunas de las variables son fijadas -probablemente- en los valores no óptimos. El subproblema tuvo solución primal factible única, que es fácilmente encontrada por inspección.

$$P_{it} = \sum_{j \in T(i)} FP_{jt}, \quad \forall\, i,t,$$

$$I_{it} = \sum_{j \in T(i)} FI_{jt}, \quad \forall\, i,t,$$

$$O_t = \max.\{0, \sum_i K_i \, (\sum_{j \in T(i)} FP_{jt}) - r_t\}, \ \forall\, t.$$

Sean $U_{it}$, $V_t$, $W_{it}$ las variables duales correspondientes a las restricciones del primal ordenadas en la formulación de ($PSUB_t$). El problema dual de ($PSUB_t$) es entonces formulado como:

(DPSUB)

$$Z_{DPSUB}(t) = \text{Max} \ \sum_i U_{it}(\sum_{j \in T(i)} FP_{jt}) + V_t r_t + \sum_i W_{it}(\sum_{j \in T(i)} FI_{jt})$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & U_{it} + K_i V_t \leq 0, \ \forall i, \\ & -V_t \leq C_t, \\ & W_{it} \leq h_{it}, \ \forall i, \\ & V_t \leq 0, \\ & U_{it}, W_{it}, \text{ irrestrictas } \forall i. \end{aligned}$$

El problema dual, al ser resuelto por inspección, tiene la siguiente solución:

$$W_{it} = h_{it}, \quad \forall\, i,\, t,$$

$$V_t = \left\{ \begin{array}{ll} -C_t & \text{si} \quad O_t > 0 \\ & \qquad\qquad (\forall\, t). \\ 0 & \text{si} \quad O_t = 0, \end{array} \right\}$$

$$U_{it} = -K_i V_t, \quad \forall\, i,\, t.$$

En efecto, (DPSUB) tuvo soluciones múltiples dado que la solución de (PSUB) es degenerada. Una alternativa puede ser que $U_{it}$ $W_{it}$ sean iguales a cero si $\sum_{j \in T(i)} FP_{jt}$ y $\sum_{j \in T(i)} FI_{jt}$ respectivamente son iguales a cero. Tal posibilidad parece tener menor atractivo, ambos en términos de tener cortes fuertes de Benders posibles. Note que el caso $O_t = 0$ puede obtenerse el corte de Benders.

$$z_t \geq \sum_i h_{it} (\sum_{j \in T(i)} FI_{jt}),$$

Donde $z_t$ es una variable auxiliar del problema maestro de Benders. Los cortes de este tipo salen favorables permitiendo ser incluidos en el problema maestro. Más aún, sea $U^*_{it}$ y $V^*_t$ la solución dual correspondiente en el caso $O_t > 0$.

Ahora se asume que (PSUB) ha sido resuelto para una secuencia de variables proporcionadas y que el caso O>0 puede ocurrir al menos una vez para los períodos de tiempo. $T^* \subseteq \{1, \ldots T\}$.

El problema maestro puede escribirse como:

(PM1)

$$
\begin{aligned}
Z_{PM} &= \text{Min.} \sum_{j}\sum_{t} S_{jt} X_{jt} + \sum_{t} z_t \\
\text{s.a.} \quad & \sim \sum_{i} U^{*}_{it}\Big(\sum_{j\in T(i)} FP_{jt}\Big) + V^{*}_{t}\, r_t + \sum_{i} h_{it}\Big(\sum_{j\in T(i)} FI_{jt}\Big),\ t \in T^{*} \\
& z_t \geq \sum_{i} h_{it}\Big(\sum_{j\in T(i)} FI_{jt}\Big),\ \forall t, \\
& FP_{jt} + FI_{j,t-1} - FI_{jt} = d_{jt}\ ,\ \forall j,t \\
& FP_{jt} - m_{jt} X_{jt} \leq 0,\ \forall j,t \\
& O_t,\ P_{it},\ I_{it},\ FP_{jt},\ FI_{jt} \geq 0,\ \forall i,j,t \\
& X_{it} \in \{0,1\}.
\end{aligned}
$$

Por una simple sustitución de variable se obtiene el siguiente problema maestro reformulado.

(PM2)

$$
\begin{aligned}
Z_{PM} &= \text{Min.} \sum_{j}\sum_{t} S_{jt} X_{jt} + \sum_{i}\sum_{t} h_{it}\Big(\sum_{j\in T(i)} FI_{jt}\Big) + q_t \\
\text{s.a.} \quad & q_t \geq \sum_{i} U^{*}_{it}\Big(\sum_{j\in T(i)} FP_{jt}\Big) + V^{*}_{t}\ r_t\ ,\ t \in T^{*}, \\
& q_t \geq 0\ ,\ \forall t. \\
& FP_{jt} + FI_{j,t-1} - FI_{jt} = d_{jt},\ \forall j,t, \\
& FP_{jt} - m_{jt} X_{jt} \leq 0,\ \forall j,t \\
& O_t, P_{it}, I_{it}, FP_{jt}, FI_{jt} \geq 0,\ \forall i,j,t \\
& X_{jt} \in \{0,1\},\ \forall j,t.
\end{aligned}
$$

El problema maestro es una relajación de (PS) y entonces $Z_{PM}$ da una cota inferior de $Z_{PS}$.

(Cote y Laugthon, 1984) sugieren relajación lagrangeana como un método apto para resolver (PM2). Así de ésta manera, relajando los cortes no triviales de Benders con Multiplicadores de Lagrange $\lambda_t$ se fabrica la función objetivo:

$$
\text{Min.} \sum_{j}\sum_{t} s_{jt} X_{jt} + \sum_{i}\sum_{t} h_{it}\Big(\sum_{j\in T(i)} FI_{jt}\Big) + \sum_{t} q_t + \sum_{t\in T} \lambda_t (g_t FP,FI) - q_t),
$$

Dónde:

$$
g_t(FP,FI) = \sum_{i} U^{*}_{it}\Big(\sum_{j\in T(i)} FP_{jt}\Big) + V^{*}_{t} r_t
$$

Cada $q_t$ es una variable continúa no negativa que no aparece en el resto de las restricciones.

Tomando $\lambda_t \leq 1, t \in T^{*}$, el coeficiente de $q_t$ llega a ser no negativo. Entonces, el valor óptimo de qt puede ser igual a cero en la medida que la función objetivo es minimizada.

La Relajación Lagrangeana de (PM2) es entonces formulada como:

(LRPM)

$$
\begin{aligned}
& Z_{LRPM}(\lambda) = \text{Min.} \sum_{j}\sum_{t} s_{jt} X_{jt} + \sum_{i}\sum_{t} h_{it}\Big(\sum_{j\in T(i)} FI_{jt}\Big) + \sum_{t\in T} \lambda_t\, g_t(FP,FI). \\
& FP_{jt} + FI_{j,t-1} - FI_{jt} = d_{jt},\ \forall j,t, \\
& FP_{jt} - mX_{jt} \leq 0,\ \forall j,t, \\
& 0_{jt},\ P_{it},\ I_{it},\ FP_{jt},\ FI_{it} \geq 0,\ \forall i,j,t, \\
& X_{jt} \in \{0,1\},\ \forall i,j,t
\end{aligned}
$$

La razón para escoger este camino de relajación de (PM), es que el problema resultante (LRPM) separado por familias dentro de un conjunto de problemas de tamaño de lote económico sin restricción de capacidad, es que presenta las características para ser resuelto por programación dinámica, empleando el algoritmo (Wagner y Whitin, 1958).

De la teoría de Dualidad Lagrangeana para Programación Entera, se tiene $\mathbf{Z_{LRMP}}$ es una cota inferior $Z_{MP}$. La cota inferior más grande disponible es obtenida por la solución de:

$$
\begin{aligned}
&(D)\\
&Z_D = \text{Max. } Z_{LRPM}(\lambda)\\
&\text{s.a.} \quad 0 \le \lambda \le 1,\ t \in T^*,
\end{aligned}
$$

que es el dual langrangeano con respecto a los cortes de Benders relajados. Esta denominación es usada porque el vector $\lambda = \{\lambda_t\}$ juega un rol similar en (LRPM) como los multiplicadores lagrangeanos usuales en el problema continuo.

La función objetivo dual $Z_{LRPM}(\lambda)$ es continua, cóncava y piezolineal. También es subdiferenciable.

## 4. DESCRIPCION DEL ALGORITMO

El algoritmo empleado en la solución es descrito como:

1.- Asúmase $|T^*|$ cortes de Benders son generados y que (PM2) es resuelto usando relajación lagrangeana y optimización subgradiente.

2.- El vector $\lambda_t$ es actualizado un predeterminado número de veces de acuerdo a la ecuación:

$\lambda_t^{L+1} = \lambda_t^L + \theta_L \gamma_t^L; \quad t \in T^*, L = 0,1,...,$

Para un valor particular de $\lambda, \gamma = \gamma_t$ es un subgradiente $Z_{LRPM}(\gamma)$ $\theta_L$ el tamaño de paso. En todo momento (LRPM) es resuelto y *una cota inferior* en $Z_{PS}$ es proporcionada.

Es importante hacer notar que la dirección del subgradiente no necesariamente es una dirección ascendente; esto no garantiza que el valor objetivo de (D) se incremente en cada etapa; el vector "$\lambda_t$" es actualizado, pero si el tamaño de paso es suficientemente pequeño, el nuevo punto es obtenido cercano al punto óptimo en el sentido euclidiano

3.- Los valores de las variables complicadas obtenidas para la solución de (LRPM) son usadas como entrada de (PSUB), mientras el conjunto de variables actualizadas es mejorado para el intercambio heurístico.

4.- Las variables dual óptimas hacia (PSUB) son entonces fundadas en nuevos cortes de Benders así generados. Sin embargo, puede suceder que un corte que es ya incluido en (PM2) es generado otra vez como en dato apto; el hecho es que el problema maestro es resuelto usando una estrategia de relajación. [Un corte que ya ha sido generado, por supuesto no podrá ser incluido nuevamente en (PM2)].

5.- Una cota superior en $Z_{PS}$ es dada por el valor obtenido a través del intercambio heurístico para la solución de (PSUB), dependiendo de cuál es la inferior.

En la siguiente iteración, el procedimiento subgradiente para (PM2) es continuado de la última solución de (LRPM).

El procedimiento es inicializado al generar valores de las variables actualizadas $\{X_{ij}\}$ las cuales en turno, implican la cantidad de los períodos de tiempo de producción y almacenamiento del inventario al nivel de familias.

El plan de producción inicial puede ser determinado aleatoriamente o por instancia de un procedimiento heurístico.

El algoritmo procede hasta un determinado número de subproblemas de Benders que hayan sido investigados; o hasta que las cotas estén suficientemente cercanas.

En el presente algoritmo basado en la descomposición de Benders, las variables duales $U_{it}$, $W_{it}$, son necesarias como elementos de entrada para la función objetivo de (LRPM) que pueden ser interpretadas como variables de producción y costos de almacenamiento del inventario para las familias que pertenecen a un cierto tipo de producto.

## 5. INTRODUCCION AL PROBLEMA DE ASERRIO

Es clasificado como la primera etapa de industrialización de la madera desde el punto de vista mecánico; las fases que integran este proceso son: *recepción de materias primas, clasificación de materias primas, carro porta trozas, sierra principal, reaserradoras, desorilladotas, cabeceadora múltiple, mesa de clasificación, almacén.* Las variables representativas del sistema son: *materias primas, tiempo de maquinado, disponibilidad de tiempo del proceso, insumos, mano de obra, energía eléctrica, mantenimiento, mercado de productos.* La problemática de este tipo de procesos es referente a las materias primas; las trozas presentan diferentes rangos diamétricos, largos y uniformidad, para lo cual deberán de ser clasificadas de acuerdo a estas variables, lo que permite hacer más eficiente la operación del proceso en la operación y elección de la política de corte óptima en la sierra principal y demás etapas del proceso especificadas anteriormente por González Santoyo (1986).

El problema clásico de este tipo de procesos en el estado de Michoacán, México, es que se enfrenta con largos de 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 pies, así como diámetros de 12 hasta 30 pulgadas; las medidas comerciales son 1 , 2, 3 pulgadas en espesor (grueso), 8, 10, 12 pulgadas en ancho, en los largos especificados anteriormente, lo que lleva a un problema de Programación Lineal Entera Mixta en el que se tratan 8 tipos con 15 familias, lo que implicará 120 diferentes elementos manejados en madera aserrada.

Como vehículo de explicación del método, se tomará el caso de una empresa en la que la línea de productos cosiste de tres familias; A, B, C. El plan de producción especifica que el nivel de producción para el período t es tomado como P = 600; en la tabla 1, se muestra el orden de selección de familias. Artículo 1, familia A, y artículo 1, familia B; en ambos el stock de protección permanece bajo cero a menos de que sea reaprovisionado y, entonces, A y B se tiene en el MPS para el período t; la familia C, en este caso no se toma en consideración.

Los costos de acarreo, preparación y factores de unidad de conversión pueden ser usados en el cálculo de los ciclos de orden dela familia. En resumen, tentativamente en el ajuste final, las cantidades ordenadas ajustadas son presentadas en la tabla 2.

Las cantidades tentativas a ordenar son expresadas en las mismas unidades; en síntesis el plan de producción es de 864 unidades, que son 600 las unidades antes especificadas en el plan.

**Formula** es igual a (-0.8516) se tiene que las cantidades de orden tentativas son ajustadas por subcontratación de 0.856 tiempos, la tasa demandada para cada artículo, obtienen las cantidades ordenadas ajustadas convertidas en las mismas unidades, es en resumen el plan de producción de 600 por error de redondeo.

**Tabla 1. Selección de familias para el (MPS)**

| Familias (1) | Artículo (2) | Inv. Inicial $I_{ij-1}$ (3) | Demanda $r_{ij}$ (4) | Stock de Protección $S_{ij}$ (5) | Inv. Final Esperado $I_{ij}$ (6) | (6)-(5) $d_{ij}$ (7) | Stock de Protecc. Inferior (8) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 20 | 12 | 10 | 8 | -2 | * |
| A | 2 | 46 | 16 | 15 | 30 | 15 | |
| A | 3 | 32 | 20 | 6 | 12 | 6 | |
| B | 1 | 28 | 18 | 12 | 10 | -2 | * |
| B | 2 | 19 | 6 | 10 | 13 | 3 | |
| C | 1 | 35 | 20 | 10 | 15 | 5 | |
| C | 2 | 16 | 2 | 8 | 14 | 6 | |

Tabla 2. Costos, Fact. de Conversión, Orden de Ciclos y Cantidades a Ordenar

| Familias | $k_i$ | Artículo | $h_{ij}$ | $T^*_i$ | $q^*_{ij}$ | $m_{ij}$ | $q^*_i m_{ij}$ | $q^*_{ij}$(adj) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 500 | 1 | 1 | 4 | 50 | 3 | 150 | 40 |
| A | | 2 | 2 | | 49 | 2 | 98 | 35 |
| A | | 3 | 1 | | 74 | 4 | 296 | 57 |
| B | | 1 | 4 | 2 | 38 | 7 | 266 | 23 |
| B | | 2 | 5 | | 9 | 6 | 54 | 6 |
| Total | | | | | | | 864** | |

** $q^*_{total} = 864$

## 6. BIBLIOGRAFIA


Bitran G.R., amd A.C. Hax, 1977, **on the Disign of Hierarchical Production Panning Systems**. Decisión Sci. 8, 28-55.

Marshall L. Fisher 1981, **The Langrangian Relaxation Method for Solving Interger Programming Problems**, Management Sci. 27, 431-441.

M.A.H. Dempster, M.L. Fisher, A.H.G. Rinnooy Kan (1981),**Analytical Evaluation of Hierarchical Planning System**, Op. Res. 29, 707-716.

Graves Stephen C. (1982), **Using Lagrangean Techniques to Solve Hierarchical Production Planning Problems**, Magement Sci. 28, 260-274.

San-Jin Nam and Rasaratnam Logendran, 1992, **Aggregate Production Planning � A Survey of Models and Metodologies**, Eur. Jou. of Op.Res. 61, 255-272.

William W. Trigeiro, L. Joshep Thomas, Jhon O. McClain (1989),**Capacited lot Sozing with times**, management, Sci., 353-366.

González Santoyo F. (1986). **Evaluación de un Sistema de Producción de Aserrío**, Facultad de Ingeniería de la UAEM, Toluca, México.

Harvey M. Wagner and Thompson M. Whitin, (1958), **Dynamic version of economic lot size model operations,** res. 89-96.

Cote y Laughton (1984), **Large Sacale Mixed Integer Programing: Benders � Type heuristics,** E.J. of operational, res. 16. 327-333.

Jefe del Departamento de Investigación y Desarrollo de la Facultad de Contabilidad y Administración de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. email: fsantoyo@zeus.ccu.umich.mx

Director de la Facultad de Contabilidad y Administración de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Agradezco el apoyo brindado por CONACyT México, al programa PADEP-UNAM, por el apoyo económico parcial en el desarrollo del presente trabajo: a la UMSNH; a los doctores Sergio Fuentes Maya, José Jesús Acosta Flores, Miguel Angel Gutierrez A., así como al M. en C. Pablo M. Chauca Malásquez por sus observaciones al presente trabajo.