Efectos del tipo de cambio en las decisiones de consumo y portafolio

Un enfoque monetarista estocástico

Isela Elizabeth Téllez León*
Francisco Venegas-Martínez**

RESUMEN

La crisis mundial 2007-2009 ha puesto en evidencia la vulnerabilidad de los modelos deterministas. Por ello, dichos modelos deberán reevaluarse a la luz de los acontecimientos recientes y considerar ambientes estocásticos que incorporen la forma de introducir el riesgo en los mercados financieros, particularmente en el mercado cambiario. En el presente artículo se desarrolla un modelo estocástico para una economía monetaria, pequeña y abierta, en donde el movimiento geométrico browniano es utilizado para modelar el comportamiento del tipo de cambio y el proceso de Poisson es aplicado para especificar la probabilidad de un salto repentino en la tasa de depreciación.

Fecha de recepción:
14 de marzo de 2011
Fecha de aprobación:
13 de mayo de 2011

* Escuela Superior de Economía, IPN: tellezelizabeth_ipn@yahoo.com.mx
** Escuela Superior de Economía, IPN: fvenegas1111@yahoo.com.mx

Nota: Los autores agradecen los valiosos comentarios y sugerencias de dos árbitros. Cualquier opinión o error en el trabajo es sólo responsabilidad de los autores.

Clasificación JEL: E10, F31, G11.
Palabras Clave: Economía monetaria, tipo de cambio, decisiones de consumo y portafolio.

1. Introducción

El presente trabajo desarrolla un modelo para una economía monetaria, pequeña y abierta, con agentes adversos al riesgo y con expectativas racionales, para examinar las decisiones de consumo y portafolio en un ambiente de riesgo e incertidumbre en el mercado cambiario. La literatura que estudia la dinámica del tipo de cambio en una economía monetaria es muy amplia, véanse, por ejemplo: Goodfriend y McCallum (2007); Mishkin (2007); Bernanke (2006); Bettsa y Devereux (2000); Chari, Kehoe, y McGrattan (2002); Clarida, Galí y Gertler (2000); Devereux y Engel (2002); Galí y Gertler (1999); Kollmann (2003); Obstfeld y Rogoff (1995) y (1999), entre muchos otros. No obstante, la gran mayoría de estas propuestas son deterministas y se hace necesario extender el marco teórico a un ambiente estocástico a fin de capturar el comportamiento aleatorio del tipo de cambio y sus efectos en una economía monetaria.

La idea central detrás del enfoque monetario utiliza la estrecha relación que existe entre la balanza de pagos de un país y su oferta monetaria, dicha relación sugiere que las variaciones de las reservas del banco central pueden ser interpretadas como el resultado de cambios en el mercado de dinero. En este sentido, el enfoque monetario es frecuentemente explicado con modelos que relacionan la balanza de transacciones oficiales con la evolución del mercado de dinero. Una versión del enfoque monetario que involucra el tipo de cambio es el efecto Fisher. En este caso, se supone que los precios de los bienes son flexibles, esto implica que la moneda de un país se deprecia cuando su tasa de interés nominal aumenta debido a la mayor inflación esperada en el futuro. El modelo propuesto en este trabajo está basado en el enfoque monetario con precios flexibles e incorpora un entorno estocástico en donde el movimiento geométrico browniano modela la tasa de depreciación del tipo de cambio y el proceso de Poisson especifica la probabilidad de un salto en la tasa de depreciación.

La organización del presente trabajo tiene el siguiente orden. En la siguiente sección se realiza una breve revisión de la literatura especializada sobre el tema para resaltar la necesidad de un enfoque monetario en un ambiente estocástico. Aquí mismo se discute el enfoque monetario con dinero y tipo de cambio bajo precios flexibles. En la sección 3 se plantea y resuelve un modelo monetario, en tiempo discreto, de tipo de cambio con individuos racionales, maximizadores de utilidad, y se discuten sus alcances y limitaciones. En el transcurso de la sección 4 se desarrolla un modelo estocástico, en tiempo continuo, para una economía monetaria con tipo de cambio flexible, poblada por agentes adversos al riesgo. Por último, en la sección 5, se establecen las conclusiones.

2. El enfoque monetario con precios flexibles

Una versión relevante del enfoque monetario que involucra el tipo de cambio es el efecto Fisher. En este caso, se supone que los precios de los bienes son flexibles, esto implica que la moneda de un país se deprecia cuando su tasa de interés nominal aumenta debido a la mayor inflación esperada en el futuro. Cuando los precios de los bienes son perfectamente flexibles, el equilibrio del mercado de dinero tiene dos efectos ante un incremento de la tasa de crecimiento de la oferta monetaria por un incremento en la inflación, dichos efectos son: un aumento la tasa de interés, de acuerdo con el efecto Fisher , y el nivel de precios domésticos tiene un salto.

Un modelo monetario, sencillo, de tipo de cambio con dinero y precios flexibles se puede establecer con una especificación de dinero a la Cagan (útil para estudiar la dinámica inflacionaria y el señoreaje), lo cual permite estudiar determinantes del tipo de cambio nominal y regímenes cambiarios. Los supuestos del modelo son: a) economía pequeña y abierta, b) precios perfectamente flexibles, c) régimen de tipo de cambio flexible y d) producción exógena.

En el contexto anterior, el equilibrio del mercado de dinero está dado por:

$$m_t^s = m_t^d = m_t \tag{1}$$

y la demanda por dinero satisface:

$$m_t - p_t = \eta i_{t+1} + \varphi\, y_t \tag{2}$$

donde

$$m_t = \log(m_t) \tag{3}$$

y

$$p_t = \log P_t. \tag{4}$$

Las cantidades φ y η son constantes. Sea e_t el tipo de cambio nominal, si suponemos que se cumple la PPP (Paridad de Poder de Compra), se tendría que:

$$P_t = e_t + p_t^* \tag{5}$$

Si además suponemos que se cumple la paridad de tasas de interés descubierta (UIP), en términos logarítmicos, ésta se puede escribir como:

$$I_{t+1} = i^*_{t+1} + E_t e_{t+1} - e_t \tag{6}$$

Insertando la PPP y la UIP en la demanda de dinero (4), se llega a:

$$m_t - e_t - p_t^* = -\eta\,[i^*_{t+1} + E_t e_{t+1} - e_t] + \varphi y_t. \tag{7}$$

O bien, reacomodando

$$\underbrace{m_t - \varphi y_t + \eta\, i^*_{t+1} - p_t^*}_{\text{variables exógenas}} = -\eta E_t\,[e_{t+1} - e_t] \tag{8}$$

La ecuación (8) es similar al modelo estocástico de Cagan, salvo que tenemos e_t en lugar de p_t. Por analogía, la solución para e_t toma la forma:

$$e_t = \frac{1}{1+\eta}\sum_{s=t}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{s-t} E_t\left\{m_s - \varphi\, y_s + \eta\, i^*_{s+1} - p^*_s\right\}. \tag{9}$$

De la ecuación (9), un aumento de m_s incrementa e_s porque aumenta p_s dada la PPP. Similarmente, un aumento de y_s ocasiona una apreciación, porque aumenta la demanda de dinero doméstica y p_s debe caer y, dada la PPP, e_s también debe disminuir.

Si bien, el modelo monetario del tipo de cambio es de mayor utilidad para entender la evolución de esta variable en el largo plazo, surge un asunto esencial, el tipo de cambio nominal debe verse como el precio de un activo, su precio depende de las expectativas. Formalmente se puede expresar esta idea como

$$\eta i^* - \varphi y - p^* = 0 \tag{10}$$

y la oferta monetaria sigue el proceso:

$$m_t - m_{t-1} = \rho\,(m_{t-1} - m_{t-2}) + \varepsilon_t \tag{11}$$

donde $0 \leq \rho \leq 1$ y ε_t es ruido blanco (variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza constante). Note que para $\rho > 0$, las innovaciones implican choques en la tasa de crecimiento de la oferta monetaria. La forma más sencilla de evaluar la solución (9) es adelantarla un periodo, tomar expectativas y sustraer la ecuación original, en cuyo caso obtendríamos:

$$E_t[e_{t+1}] = \frac{1}{1+\eta}\sum_{s=t}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{s-t} E_t[m_{s+1}] \tag{12}$$

ó

$$E_t[e_{t+1} - e_t] = \frac{1}{1+\eta}\sum_{s=t}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{s-t} E_t[m_{s+1} - m_s]$$

El siguiente paso consiste en insertar el proceso estocástico definido en (11) en la expresión anterior y simplificar, con lo cual se tiene:

$$E_t e_{t+1} - e_t = \frac{\rho}{1+\eta-\eta\rho}(m_t - m_{t-1}) \tag{13}$$

Finalmente, sustituyendo este resultado en la condición de equilibrio (8), llegamos a:

$$e_t = m_t + \frac{\eta\rho}{1+\eta-\eta\rho}(m_t - m_{t-1}) \tag{14}$$

Un choque positivo no anticipado a m_t puede tener dos impactos: incrementar m_t y si $\rho > 0$ se elevan las expectativas del crecimiento monetario futuro, aumentando aún más e_t.

Entre las conclusiones de este modelo se tiene que la inestabilidad de la oferta monetaria puede ocasionar una inestabilidad mayor en el tipo de cambio. Además detrás de un problema de hiperinflación se encuentra un problema de credibilidad en la autoridad monetaria y se puede tener inconsistencia dinámica, así bajo precios perfectamente flexibles, el tipo de cambio se determina fundamentalmente por factores monetarios. Al igual que el nivel de precios, el tipo de cambio depende crucialmente de las expectativas sobre la evolución de la oferta monetaria. Y, finalmente, cuando existe perfecta flexibilidad de precios, el tipo de cambio puede sobre-reaccionar ante los anuncios de política monetaria en la medida que éstos induzcan cambios futuros mayores.

Las limitaciones de este modelo son varias, entre ellas se destacan: 1) no involucra restricciones presupuestarias intertemporales, 2) no muestra cómo cambios en la riqueza afectan la demanda de dinero, 3) no proporciona las bases para descartar burbujas especulativas y 4) no modela el riesgo y la incertidumbre a la están expuestos los agentes económicos, por lo que necesitamos un modelo monetario de tipo de cambio con micro-fundamentos

3. Modelo monetario de tipo de cambio con individuos maximizadores de utilidad

Los modelos con micro-fundamentos en donde el tipo de cambio es una variable relevante son una opción para la introducción del dinero en la función de utilidad porque los agentes mantienen dinero en su función de utilidad, ya que el dinero permite ahorrar tiempo en las transacciones y, por lo tanto, se consigue más tiempo de ocio. Este modelo presenta varias limitaciones que serán destacadas en su oportunidad y que serán, posteriormente, enmendadas con un enfoque estocástico.

3.1 Planteamiento del problema del consumidor

Los supuestos del modelo son: la economía tiene dotaciones exógenas, es pequeña y abierta, produce y consume un sólo bien (perecedero), los agentes tienen previsión perfecta, sólo la moneda doméstica se puede emplear para realizar transacciones ("*no currency substitution*") y la función de utilidad total descontada del individuo representativo es:

$$U_t = \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} u\left(C_s, \frac{M_s}{P_s} \right) \tag{15}$$

Donde M_s es el acervo nominal de dinero que el individuo mantiene hasta el tiempo s. La función $u(C_t, M_t/P_t)$ proporciona utilidad marginal positiva y es estrictamente cóncava, es decir,

$$u_c > 0, \quad u_{cc} < 0, \tag{16}$$

y

$$u_m > 0, \quad u_{m,m} < 0 \tag{17}$$

donde $m = M/P$. Si se cumple la PPP y el nivel de precios del exterior se supone fijo, P^*, se sigue que P_t y ε_t se mueven conjuntamente.

Para establecer la restricción presupuestal, suponemos que el gobierno no emite deuda, ni mantiene activos que generan interés. El individuo representativo mantiene dinero y bonos extranjeros, entonces, para cualquier periodo t se cumple:

$$B_{t+1} + \frac{M_t}{P_t} = (1+r)B_t + \frac{M_{t-1}}{P_t} + Y_t - C_t - T_t \tag{18}$$

Donde M_t es el acervo de dinero acumulado en t y trasladados a $t+1$. Las decisiones financieras se toman al nivel de precios P_t. Los activos extranjeros netos están expresados en términos de la producción real.

3.2 Solución del modelo

Para derivar las Condiciones de Primer Orden (CPO), insertamos (18) en (15), de tal manera que

$$U_t = \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} u\left[- B_{s+t} - \frac{M_s}{P_s} + (1+r)B_s + \frac{M_{s-1}}{P_s} + Y_s - T_s, \frac{M_s}{P_s} \right] \tag{19}$$

y diferenciamos con respecto de B_{t+1} y M_t, de tal manera que

$$U_c\left(C_t, \frac{M_t}{P_t} \right) = (1+r)\beta\, U_c\left(C_{t+1}, \frac{M_{t+1}}{P_{t+1}} \right) \tag{20}$$

(21)

Podemos ver de las CPO que el dinero puede concebirse como un bien no comerciable (internacionalmente) y durable. Observe también que la ecuación (20) es una ecuación de Euler que incluye dinero. La ecuación (21) se interpreta como:

$$\underbrace{\frac{1}{P_t}U_c\left(C_t,\frac{M_t}{P_t}\right)}_{\substack{\text{Pérdida en utilidad}\\ \text{marginal en } t \text{ por}\\ \Delta M/P \;=1}} = \underbrace{\frac{1}{P_t}U_{M/P}\left(C_t,\frac{M_t}{P_t}\right)}_{\substack{\text{Ganancia en utilidad}\\ \text{marginal en } t \text{ por}\\ \Delta M/P \;=\;1}} + \underbrace{\frac{1}{P_{t+1}}\beta\, U_c\left(C_{t+1},\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}}\right)}_{\substack{\text{Ganancia en utilidad}\\ \text{marginal en } t+1 \text{ por}\\ \Delta M/P \;=1}}$$

Después de sustituir (20) en (21) podemos llegar a otra posible interpretación:

$$\underbrace{\frac{U_{M/P}\left(C_t,\dfrac{M_t}{P_t}\right)}{U_c\left(C_t,\dfrac{M_t}{P_t}\right)}}_{\substack{\text{TMS de consumo}\\ \text{por balances reales}}} = 1-\underbrace{\frac{P_t/P_{t+1}}{1+r}}_{\substack{\text{Costo (en}\\ \text{consumo) de}\\ \text{mantener una}\\ \text{unidad extra}\\ \text{de balances}\\ \text{reales}}}\underbrace{\left(=\frac{i_{t+1}}{1+i_{t+1}}\right)}_{\substack{\text{Por la}\\ \text{ecuación de}\\ \text{Fisher}}} \qquad (22)$$

Si adelantamos (18) un periodo y se dividen ambos lados entre 1 + r, se sigue que

$$\frac{B_{t+2}}{1+r}+\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}(1+r)} = B_{t+1}+\frac{M_t}{P_{t+1}(1+r)}+\frac{Y_{t+1}-C_{t+1}-T_{t+1}}{1+r} \qquad (23)$$

Sumando y restando M_t/P_t al término de la derecha:

$$\frac{B_{t+2}}{1+r}+\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}(1+r)} = \left(B_{t+1}+\frac{M_t}{P_t}\right)-\frac{M_t}{P_t}\left[1-\frac{P_t}{P_{t+1}(1+r)}\right]+\frac{Y_{t+1}-C_{t+1}-T_{t+1}}{1+r}$$

(24)

Si ahora se sustituye el resultado anterior en la restricción (18), repitiendo el proceso, y haciendo uso de la ecuación de Fisher, llegamos a:

$$\sum_{s=t}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t}\left[C_s+\frac{i_{s+t}}{i_{s+t}+1}\left(\frac{M_s}{P_s}\right)\right]=(1+r)B_t+\frac{M_{t-1}}{P_t}+\sum_{s=t}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t}(Y_s-T_s) \tag{25}$$

Para lo cual se supone que se cumple la condición de transversalidad:

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T}\left(B_{t+T+1}+\frac{M_{t+T}}{P_{t+T}}\right)=0 \tag{26}$$

Así, a partir de (25), el valor presente del gasto en consumo más el costo de mantener balances reales (“renta”) debe igualar la riqueza financiera inicial más el VP del flujo de ingresos disponibles.

La ecuación (21) nos permite encontrar la demanda de dinero del individuo representativo. Para ello, suponemos que la función de utilidad es isoelástica:

$$u\left(C,\frac{M}{P}\right)=\frac{\left[C\gamma\left(\frac{M}{P}\right)^{1-\gamma}\right]^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} \tag{27}$$

De la ecuación (27) y usando una ecuación (21), tenemos:

$$\frac{M_t^d}{P_t}=\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\left(1+\frac{1}{1+i_{t+1}}\right)C_t \tag{28}$$

Para analizar cómo se afecta la demanda de dinero ante cambios de *i* y *C*, debemos determinar el equilibrio general.

3.3 Equilibrio general

El individuo representativo toma el nivel de precios como dado y elige la trayectoria deseada para sus saldos monetarios reales. En el mercado de dinero, la oferta monetaria nominal es exógena, y los precios se ajustan para equilibrar dicho mercado, a través de la demanda de dinero. Para cerrar el modelo, vamos a incluir la restricción presupuestal del gobierno. La restricción presupuestal del gobierno en cada periodo el gobierno balancea su presupuesto, de tal manera que:

$$G_t=T_t+\frac{M_t-M_{t-1}}{P_t} \tag{29}$$

La restricción intertemporal respectiva es:

$$\sum_{s=t}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t}\left(G_s - T_s\right) = \frac{M_{t-1}}{P_t} + \sum_{s=t}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t}\left(\frac{i_{s+1}}{1+i_{s+1}}\right)\frac{M_s}{P_s} \tag{30}$$

El valor actual del déficit público debe ser igual al valor actual del "arrendamiento" del dinero (menos el saldo inicial en poder de público).

La restricción presupuestaria de la economía se encuentra usando (29) para eliminar T en (18), de tal forma que se llega a:

$$B_{t+1} = (1+r)\,B_t + Y_t - G_t - C_t \tag{31}$$

El dinero no entra en la restricción presupuestal (consolidada) de la economía. Y si el gasto de gobierno es cero, su restricción presupuestaria se simplifica a:

$$-T_t = \frac{M_t - M_{t-1}}{P_t} \tag{32}$$

En este caso, el gobierno hace transferencias al público que financia mediante la impresión de dinero.

Veamos el caso en que $\beta = 1/(1+r)$ y el dinero crece a la tasa constante μ. Cuando $\beta = 1/(1+r)$, la CPO (20) implica que el consumo y los saldos monetarios reales son constantes, es decir:

$$C_s = C \tag{33}$$

y

$$\frac{M_s}{P_s} = \frac{\bar{M}}{P}, \quad s \geq t \tag{34}$$

y dado lo anterior, se tiene que:

$$\frac{P_{t+1}}{P_t} = 1+\mu \tag{35}$$

El consumo agregado $\bar{C}$ se obtiene integrando la restricción presupuestaria de la economía, tenemos:

$$\bar{C} = rB_t + \frac{r}{1+r}\sum_{s=t}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t}\left(Y_s - G_s\right) \tag{36}$$

Por último, el nivel de precios en cualquier fecha lo podemos conocer incorporando las condiciones:

$$C = \bar{C} \text{ y } \frac{P_{t+1}}{P_t} = 1+\mu$$

3.4 El estado estacionario

Para analizar la trayectoria al estado estacionario, seguimos suponiendo que β = 1 /(1+r), pero usaremos una función de utilidad de periodo aditiva:

$$u\left(C, \frac{M}{P}\right) = \log C + \nu\left(\frac{M}{P}\right) \tag{37}$$

Bajo esta forma funcional, la ecuación que define la demanda de dinero se vuelve:

$$\frac{\nu'\left(\frac{M_t}{P_t}\right)}{1/\bar{C}} = 1 - \frac{P_t / P_{t+1}}{1+r} \tag{38}$$

Insertando 1+r = 1 / β, y sustituyendo $M_{t+1} / M_t = Pt_{+1} / P_t = 1 + \mu$, llegamos a:

$$\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}}\left(\frac{\beta}{1+\mu}\right) = \frac{M_t}{P_t}\left[1 - \bar{C}\nu'\left(\frac{M_t}{P_t}\right)\right] \tag{39}$$

Un caso particular: surge cuando $v(M / P) = \log(M / P)$, en tal caso
$\acute{v}\,(M / P) = 1 / (M / P)$

Sustituyendo este resultado en (39), tenemos que:

$$\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}}\left(\frac{\beta}{1+\mu}\right) = \frac{M_t}{P_t}\left[1 - \bar{C}\left(\frac{P_t}{M_t}\right)\right], \text{ o bien}$$

$$\frac{M_{t+1}}{P_{t+1}}\left(\frac{\beta}{1+\mu}\right) = \frac{M_t}{P_t} - \bar{C} \tag{40}$$

Una posible interpretación de la ecuación anterior se tiene cuando se toma $\bar{M}/P$ como dada en un punto arbitrario. En ese punto, el beneficio marginal de mantener una unidad adicional del dinero es igual al costo marginal de hacerlo. Un M / P superior sería de equilibrio sólo si se espera una ganancia de capital por mantener dinero (deflación), pero ello aumenta M/P, y así sucesivamente. Un M/P inferior sería de equilibrio sólo si espera una pérdida de capital de mantener dinero (inflación), pero ello disminuye M/P, y así sucesivamente.

El dinero puede incorporarse como argumento de la función de utilidad por sus servicios de liquidez. De esta manera, el individuo determina su demanda de saldos reales de forma que la TMS entre consumo y dinero sea igual al costo de mantener una unidad adicional de dinero.

Mediante el uso de micro-fundamentos se ha determinado una demanda de dinero con la misma naturaleza que la demanda de dinero keynesiana. Bajo cierta condición ($\beta < 1 + \mu$) existe un equilibrio único para *M/P*; sin embargo, dicho equilibrio es inestable: un choque al sistema puede hacer que *M/P* tienda a cero o a infinito. Por lo que una condición para que exista equilibrio es que $\beta < 1 + \mu$, lo cual implica que $i > 0$ (si $i \leq 0$ siempre habría exceso de demanda de dinero, porque no tendría costo). En general, si el papel moneda no tiene valor intrínseco, y si la sociedad puede sobrevivir sin dinero fiduciario (como en el pasado) empleando metales preciosos. No existe nada que pueda descartar la presencia de burbujas hiperinflacionarias, lo cual implica una eliminación del valor del dinero.

Entre las deficiencias del análisis anterior se destacan: 1) no se modela el riesgo del mercado cambiario, 2) no es posible examinar los efectos de saltos bruscos y repentinos del tipo de cambio nominal en la economía, 3) la aversión al riesgo de los agentes no se desempeña ningún papel en las decisiones de portafolio, 4) el consumo futuro es determinista, situación poco realista, 5) no se vincula la no credibilidad con la incertidumbre, 6) no analiza la posibilidad (o imposibilidad) de burbujas especulativas 7) el dinero fiduciario no se utiliza para financiar consumo y 8) las recomendaciones en materia de política económica no consideran la incertidumbre en variables financieras y económicas relevantes.

Por supuesto, la racionalidad económica que se establece en el modelo anterior requiere que el individuo tenga la habilidad de abstraer su problema de decisión a un modelo matemático de optimización y aún más se requiere que dicho individuo pueda resolverlo casi instantáneamente. Obviamente, en la realidad no ocurre así, los individuos revisan rápidamente (burdamente) alternativas cercanas al óptimo y toman alguna de ellas de tal forma que la racionalidad es limitada. Por otro lado, el asunto de que todos los individuos son idénticos en preferencias y dotaciones deja de lado la interacción social y, en consecuencia, no hay aprendizaje entre individuos, lo que limita la existencia de conductas sociales y factores institucionales.

Es también importante mencionar que a partir de los modelos deterministas de racionalidad económica el cambio en las políticas ocurre cuando los diseñadores de política consideran las decisiones mínimamente aceptables por los agentes, dejando fuera un número muy grande de alternativas que los agentes se plantean en caso de la ocurrencia de un evento riesgoso en el mercado cambiario. En este caso, la información asociada a dichas alternativas es tan extensa para los diseñadores que aún una aproximación racional al objetivo es inconcebible, por lo que es esencial considerar, desde el principio del modelado, la incertidumbre en la toma de decisiones. Después de haber analizado un modelo monetario sobre el tipo de cambio, en la siguiente sección planteamos y elaboramos un modelo con base en el enfoque monetario con riesgo no diversificable del tipo de cambio. El modelo que se propone captura la dinámica estocástica del tipo de cambio y sus posibles saltos con la finalidad de proporcionar una mejor herramienta de análisis de la política económica en las decisiones de los agentes económicos.

4. Un modelo estocástico para una economía con aversión al riesgo basado en el enfoque monetario

Como se mencionó antes, una limitación del modelo anterior es que no considera explícitamente el riesgo del mercado cambiario. Se desarrollará ahora un modelo para una economía pequeña y abierta que relaciona los niveles de equilibrio del tipo de cambio, el nivel de precios y la cantidad de dinero. Este modelo se empleará para inferir medidas de política económica bajo riesgo no diversificable del tipo de cambio con una probabilidad positiva de una depreciación abrupta e inesperada. La innovación del modelo, en el marco del enfoque monetario, que se propone es que el tipo de cambio es conducido por un proceso de difusión con saltos como en Venegas-Martínez (2000). A diferencia del trabajo del Venegas-Martínez (2000), en el modelo que se propone se toma otra especificación de la función de utilidad y también se incorpora un movimiento geométrico browniano que modela la tasa de depreciación en un régimen de tipo de cambio flexible, además se incluyen saltos de Poisson para modelar la probabilidad de una depreciación repentina en el tipo de cambio.

4.1 Supuestos del modelo

En esta sección se establecen los supuestos de la economía y las características de los agentes que la conforman.

4.1.1 Características de la economía

A continuación se enlistan las características de la economía en cuestión:

a) La economía es pequeña y abierta, lo cual implica que es tomadora de precios y existe un bien internacionalmente comerciable.
b) Pleno empleo, es decir, todos los recursos se utilizan.
c) Tiene perfecta movilidad de capitales, es decir, los individuos pueden comprar o vender activos internacionalmente comerciables.
d) La tasa de interés real internacional es r y se toma como dada.

e) No hay barreras para el libre comercio

f) La economía produce y consume un solo bien genérico, el cual es perecedero e comerciable internacionalmente.

g) Los activos disponibles en esta economía son: dinero y bonos (el individuo tienen acceso a un mercado internacional del crédito).

h) La condición de poder de paridad de compra, $P_t = e_t P^*_t$ se cumple.

Equivalentemente, $e_t = \frac{P_t}{P_t^*}$.

Se supone, por simplicidad, que $P^*_t = 1$

i) Se cumple la condición de arbitraje de tasas de interés, es decir,

$i_t = r + \varepsilon_t$

j) Se supone una restricción del tipo *cash-in-advance* $m_t \geq \alpha Ct$, donde α es una constante que representa tiempo promedio en que se mantienen saldos reales para realizar compras. Esta condición plantea la disposición de efectivo por adelantado para financiar el consumo.

4.1.2 Características del individuo representativo

a) Existe un individuo representativo (o familia) con vida infinita.

b) Los individuos poseen previsión perfecta: conocen el nivel general de precios en cada instante en el futuro. En cuyo caso se cumple:

$\frac{\dot{P}_t}{P_t} = \frac{dP_t}{P_t}\frac{1}{dt} = \pi = \pi^e$, lo cual implica que: $P_t = P_0 e^{\pi^e t}$

c) Los extranjeros no poseen dinero doméstico.

d) Se supone que los agentes tienen expectativas racionales, que tiene las siguientes características: 1) todos los individuos maximizan algo en su propio beneficio y 2) los agentes adivinan en el largo plazo las reglas monetarias que sigue el Banco Central aun cuando ocasionalmente se aleja de ellas de manera discrecional.

4.2 Planteamiento del modelo

La función de utilidad está dada $u(c_t) = c_t^\gamma / \gamma$, $\gamma \neq 0$, ya que esta función modela aversión al riesgo (para valores adecuados del parámetro γ) y el inverso del coeficiente de aversión al riesgo es la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo.

El problema que resuelve el consumidor (representativo) racional es:

Maximizar $\mathrm{E}\left[\int_0^\infty U(c_t)e^{-\rho t}\mathrm{d}t \middle| F_0\right]$

s. a. $\mathrm{d}a_t = F_t r \mathrm{d}t - m_t \pi \mathrm{d}t - c_t \mathrm{d}t$ (41)

en donde el cambio marginal en la riqueza[1], dαt, está dado por el rendimiento que ofrecen los bonos F_t (internacionalmente comerciables) por unidad de tiempo, los saldos monetarios reales definidos mediante

$$m_t = \frac{M_t}{P_t},$$

donde M_t es el acervo de dinero fiduciario y P_t es el nivel general de precios de la economía. Por último, c_t es el nivel de consumo del individuo representativo. Si se definen las variables auxiliares como:

$$\theta_t = \frac{m_t}{a_t} \quad \text{y} \quad 1-\theta_t = \frac{F_t}{a_t}$$

podemos reescribir (41), como sigue:

$$\mathrm{d}a_t = a_t(1-\theta_t)r\mathrm{d}t + a_t\theta_t \mathrm{d}R_m - a_t \frac{c_t}{a_t}\mathrm{d}t \quad (42)$$

Observe que θ_t y $1-\theta_t$ son las proporciones de la riqueza real que se destinan a las tenencias de saldos reales y bonos, respectivamente. Para obtener los intereses que pagan los bonos dF_t, se utiliza que

$\frac{\mathrm{d}F_t}{\mathrm{d}t} = rF_t$, por lo que:

$$\mathrm{d}F_t = rF_t \mathrm{d}t \quad (43)$$

Para obtener dR_m se supone que la inflación sigue un proceso de difusión con saltos, definido por la siguiente ecuación diferencial estocástica de difusión con saltos:

$$\mathrm{d}P_t = \pi Pt\, \mathrm{d}t + \sigma P_t\, \mathrm{d}W_t + \nu P_t\, \mathrm{d}N_t \quad (44)$$

Donde π es el parámetro de tendencia, σ es el parámetro de volatilidad, ν es el tamaño esperado del salto, dW_t sigue un movimiento browniano con media cero y varianza dt, y dN_t sigue un proceso de Poisson con media λdt, donde λ es el parámetro de intensidad (número de saltos por unidad de tiempo).

Así, con base en el lema de Itô se calcula

$$\mathrm{d}R_m = P_t \mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{d}t}\right)$$

[1] La riqueza real *at* está dada por: $a_t = F_t + m_t$ que es la suma de bonos en poder del individuo representativo y los saldos monetarios reales que tenga.

el resultado es (véase, por ejemplo, Venegas-Martínez, 2001):

$$\mathrm{d}R_m = \left(-\pi + \sigma^2\right)\mathrm{d}t - \sigma\,\mathrm{d}W_t - \left(\frac{v}{1+v}\right)\mathrm{d}N_t \qquad (45)$$

Sustituyendo (43) y (45) en (42), tenemos:

$$\mathrm{d}a_t = a_t\left[(1-\theta_t)r + \theta_t\left(-\pi + \sigma^2\right) - \frac{c_t}{a_t}\right]\mathrm{d}t - a_t\theta_t\sigma\,\mathrm{d}W_t - a_t\theta_t\left(\frac{v}{1+v}\right)\mathrm{d}N_t \qquad (46)$$

Introduciendo una restricción del tipo *cash-in-advance* en (46), obtenemos:

$$\mathrm{d}a_t = a_t(r-\theta_t\delta)\mathrm{d}t - a_t\theta_t\sigma\mathrm{d}W_t - a_t\theta_t\left(\frac{v}{1+v}\right)\mathrm{d}N_t \qquad (47)$$

con

$$\delta = r + \pi - \sigma^2 + \alpha^{-1}. \qquad (48)$$

4.3 Solución del modelo

Para resolver el modelo del consumidor racional se usa la técnica conocida como cálculo diferencial estocástico. Primero planteamos la función de valor

$$J(a_t, t) = \max_{c_t|[t,\infty)} E\left[\int_t^{\infty} \frac{c_t^{\gamma}}{\gamma} e^{-\rho s}\mathrm{d}s\right] \qquad (49)$$

Separando las integrales en los intervalos $[t,t+\mathrm{d}t]$ y $[t+\mathrm{d}t, \infty]$, y utilizando el teorema del valor medio del cálculo integral, podemos llegar a la siguiente ecuación:

$$0 = \max_{c_t|[t,t+dt)} E\left[\frac{c_t^{\gamma}}{\gamma} e^{-\rho t}\mathrm{d}t + o\mathrm{d}t + \mathrm{d}J(a_t, t)\right] \qquad (50)$$

Si se emplea el lema de Itô para calcular $\mathrm{d}J(a_t, t)$ y, posteriormente, se aplica el operador esperanza y se divide entre $\mathrm{d}t$, tomando el límite cuando $\mathrm{d}t \to 0$, se obtiene una ecuación diferencial parcial de segundo orden en J cuya solución nos permitirá determinar las decisiones óptimas (consumo y portafolio):

$$0 = \frac{c_t^{\gamma}}{\gamma} e^{-\rho t} + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial a_t} a_t(r-\theta_t\delta) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2} a_t^2\theta_t^2\sigma^2 + \left\{J\left[a_t\left(1-\theta_t\left(\frac{v}{1+v}\right)\right), t\right] - J(a_t, t)\right\}\lambda \qquad (51)$$

Se propone un candidato para resolver la ecuación diferencial parcial de segundo orden anterior de la forma:

$$J(a_t, t) = V(a_t)e^{-\rho t} \text{ y } V(a_t) = \beta_1 \frac{a_t^{\gamma}}{\gamma}. \tag{52}$$

Reemplazamos las respectivas derivadas parciales en (51) y derivamos con respecto de Θt, para posteriormente obtener las proporciones óptimas de la riqueza que se destinan a la tenencia de bonos y saldos reales:

$$0 = \alpha^{-\gamma}\theta_t^{\gamma-1} - \beta_1\delta - \beta_1(\gamma-1)\theta_t\sigma^2 - \beta_1\lambda\left(1-\theta_t\left(\frac{v}{1+v}\right)\right)^{\gamma-1}\left(\frac{v}{1+v}\right) \tag{53}$$

De la ecuación anterior se observa que el valor de Θt depende del parámetro de preferencias γ. Se analizan los siguientes casos para (53):

Si $\gamma = -1$, el θ^* óptimo, se obtiene como sigue:

$$0 = \frac{\alpha}{\theta_t^2} - \beta_1\delta + 2\beta_1\theta_t\sigma^2 - \frac{\beta_1\lambda\left(\frac{v}{1+v}\right)}{1 + 2\theta_t^2\left(\frac{v}{1+v}\right) + \theta_t^2\left(\frac{v}{1+v}\right)^2}$$

Obviamente, cuando $\gamma = 0$, la función de utilidad no está definida. Y cuando $\gamma = 1$, el consumo es una constante. Por otro lado, si $\gamma = 2$ y si $\sigma^2 << 1$, entonces $\delta > 0$ y obtenemos el Θ^* óptimo como sigue:

$$\theta_t = \frac{\beta_1\delta + \lambda\beta_1\left(\frac{v}{1+v}\right)}{\alpha^{-2} + \beta_1\sigma^2 + \beta_1\lambda\left(\frac{v}{1+v}\right)^2}$$

Si $\gamma = 3$, tenemos que el Θ^* se obtiene de una ecuación de segundo orden, por lo que existen dos raíces:

$$\theta_{1,2} = \frac{-2\beta_1\left[\lambda\left(\frac{v}{1+v}\right)^2 - \sigma^2\right] \pm \sqrt[2]{(2\beta_1)^2\left[\lambda\left(\frac{v}{1+v}\right)^2 - \sigma^2\right]^2 + 4\beta_1\left(\delta + \lambda\left(\frac{v}{1+v}\right)\right)\Omega}}{2\alpha^{-3} - 2\beta_1\lambda\left(\frac{v}{1+v}\right)^3}$$

donde

$$\Omega = \alpha^{-3} - \beta_1 \lambda \left(\frac{V}{1+V} \right)^3$$

Al determinar los valores de Θ_t de la ecuación anterior, se eligió el que está entre cero y uno. En cuanto al valor óptimo Θ^* para el caso $\gamma = 2$, los procesos estocásticos que conducen a la riqueza, el consumo y los saldos monetarios reales se determinan a continuación. Observe, primero, que

$$\mathrm{d}a_t = a_t \left(r - \left(\frac{\beta_1\delta + \lambda\beta_1\left(\frac{V}{1+V}\right)}{\alpha^{-2} + \beta_1\sigma^2 + \beta_1\lambda\left(\frac{V}{1+V}\right)^2} \right)\delta \right)\mathrm{d}t - a_t \left(\frac{\beta_1\delta + \lambda\beta_1\left(\frac{V}{1+V}\right)}{\alpha^{-2} + \beta_1\sigma^2 + \beta_1\lambda\left(\frac{V}{1+V}\right)^2} \right)\sigma \mathrm{d}W_t$$
$$- a_t \left(\frac{\beta_1\delta + \lambda\beta_1\left(\frac{V}{1+V}\right)}{\alpha^{-2} + \beta_1\sigma^2 + \beta_1\lambda\left(\frac{V}{1+V}\right)^2} \right)\left(\frac{V}{1+V}\right)\mathrm{d}N_t$$

Ahora bien, si se denota

$$\mu_a = r - \left(\frac{\beta_1\delta + \lambda\beta_1\left(\frac{V}{1+V}\right)}{\alpha^{-2} + \beta_1\sigma^2 + \beta_1\lambda\left(\frac{V}{1+V}\right)^2} \right)\delta$$

y

$$\sigma_a = \left(\frac{\beta_1\delta + \lambda\beta_1\left(\frac{V}{1+V}\right)}{\alpha^{-2} + \beta_1\sigma^2 + \beta_1\lambda\left(\frac{V}{1+V}\right)^2} \right)\sigma$$

En consecuencia, el proceso estocástico que conduce a la riqueza real está dado por

$$a_t = a_0 e^{\left(\mu_a - \frac{1}{2}\sigma_a^2\right) + \sigma_a W_t + \lambda N_t}$$

Para el proceso estocástico que conduce al consumo se cumple que:

$$C_t = \delta_{\square} \square_t \qquad (54)$$

con

$$\delta_a = \alpha^{-1} \frac{\delta}{\alpha^{-2} + \sigma^2} \tag{55}$$

Por último, para el proceso estocástico que conduce a los saldos monetarios reales, se obtiene que

$$m_t = \alpha\delta_{\square}\alpha_t. \tag{56}$$

Lo anterior permite analizar los efectos de la política monetaria, por ejemplo, si se aplica una política monetaria restrictiva tal que aprecie el tipo de cambio, ecuación (54), se observaría una disminución de la riqueza del individuo, *ceteris paribus*, lo que ocasionaría que el agente representativo demandara menos saldos monetarios reales para financiar el consumo. Observe que en este modelo el uso del dinero se basa en una convención social, el mercado por sí mismo no garantiza un equilibrio monetario. Por ello, el gobierno tiene un rol fundamental como proveedor de dinero fiduciario, garantizando su valor.

Asimismo, es importante destacar que en el modelo estocástico propuesto la trayectoria de consumo no puede ser determinada con certeza porque el consumo se convierte en variable aleatoria (más precisamente se convierte en un proceso estocástico), situación que es más acorde con la realidad (¡nadie conoce con toda certeza su nivel de consumo futuro!). Así pues, la consideración del riesgo en el mercado cambiario condujo a cambios cualitativos y cuantitativos importantes en las decisiones de consumo y portafolio de los agentes.

5. Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo teórico para explicar cómo los movimientos en el tipo de cambio afectan las decisiones de un individuo representativo que vive en una economía monetaria, pequeña y abierta. El movimiento browniano, o componente de difusión, se ha empleado para modelar las pequeñas fluctuaciones que se observan todos los días en el tipo de cambio y el proceso de Poisson se ha utilizado para modelar los saltos bruscos e inesperados que se observan ocasionalmente en la tasa de depreciación. Así, en el marco del enfoque monetario, se han examinado cómo una dinámica estocástica en el tipo de cambio nominal afecta las decisiones óptimas de consumo y portafolio de un agente adverso al riesgo.

Entre las características distintivas del modelo propuesto se tienen las siguientes: se considera el riesgo del mercado cambiario, se permiten saltos bruscos y repentinos en el tipo de cambio, se considera la aversión al riesgo de los agentes en las decisiones de portafolio, el consumo futuro es estocástico y el dinero fiduciario se utiliza para financiar consumo.

Por último, es importante destacar que aunque en este trabajo se examinó una forma funcional particular del índice de utilidad, el análisis podría extenderse hacia otras especificaciones alternativas. Asimismo, la generalización hacia una tasa de interés estocástica ya está en la agenda de trabajo.

Bibliografía

Bernanke, B. (2006). Monetary Aggregates and Monetary Policy at the Federal Reserve: A Historical Perspective. Federal Reserve.

Bettsa, C, and M. B. Devereux (2000). Exchange Rate Dynamics in a Model of Pricing-to-Market. *Journal of International Economics*, Vol. 50, No. 1, pp. 215-244.

Chari, V. V., P. Kehoe, and E. McGrattan (2002). Monetary Shocks and Real Exchange Rates in Sticky Price Models of International Business Cycles. *Review of Economic Studies*. Vol. 69, No. 3, pp. 533-563.

Clarida, R., J. Galí, and M. Gertler (2000). Monetary Policy Rules and Macroeconomic Stability: Evidence and Some Theory. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 105, No. 1, pp. 147-180.

Devereux, M. B. and C. Engel (2002). Exchange Rate Pass-Through, Exchange Rate Volatility, and Exchange Rate Disconnect. *Journal of Monetary Economics*, Vol. 49, No. 5, pp. 913-940.

Dornbusch, R. (1973). Devaluation, Money and Non Traded Goods. *The American Economic Review*. Vol. 63, No. 5. pp. 871-880.

Galí, J. and M. Gertler (1999). Inflation Dynamics: A Structural Econometric Analysis. *Journal of Monetary Economics*, Vol. 44, No. 2, pp. 195-222.

Goodfriend, M. and B. T. McCallum (2007). Banking and Interest Rates in Monetary Policy Analysis: A Quantitative Exploration. Carnegie Mellon University. Research Paper. Tepper School of Business. 4-1-2007

Johnson, H. G. (1977). The Monetary Approach to the Balance of Payments. *Journal of International Economics*, Vol. 7, No. 3. pp. 231-249.

Kollmann, R. (2003). Monetary Policy Rules in the Open Economy: Effects on Welfare and Business Cycles. *Journal of Monetary Economics*, Vol.49, No. 5, pp.989-1015.

Krugman, P. R. y M. Obstfeld (2001), Economía internacional: teoría y política. 5ª ed. McGraw Hill.

Mishkin, F. S. (2007). Will Monetary Policy Become More of a Science? NBER Working Paper Series 13566.

Mundell, R. A. (1962), The Appropiate Use of Monetary and Fiscal Policy under Fixed Exchange Rates. Staff Papers I.M.F, No. 9.

Mundell, R. A. (1971). Croissance et Inflation, des Relations entre Développement, Monnaie et Balance des Paiements. Dunod, Paris.

Obstfeld, M. and K. Rogoff (1995). Exchange Rate Dynamics Redux. *Journal of Political Economy*, Vol. 103, No. 3, pp. 624-660.

Obstfeld, M. and K. Rogoff (1999). New Directions for Stochastic Open Economy Models. *Journal of International Economics*, Vol. 50, No. 1, pp. 117-153.

Polak, J. (1957). Monetary Analysis of Income Formation and Payments Problems. Staff Papers I.M.F, No. 6.
Obstfeld, M. and K. Rogoff (1996). Foundations of International Economics, MIT Press.
Venegas-Martínez, F. (2000). On Consumption, Investment, and Risk. Economía Mexicana, Nueva Época, Vol. 9, No. 2, pp. 227-244.
Venegas-Martínez, F. (2001). Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis. Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.