RIF MM
Mutatis Mutandis: Revista Internacional de Filosofía
Vol. 12 (1), pp. 1-13, Art. 2.

El debate sobre la capacidad expresiva del operador N en el Tractatus de Wittgenstein

The debate on the expressive capacity of the N-operator in Wittgenstein´s Tractatus

Martín Gutiérrez Benardos
Universidad de Santiago de Chile
Región Metropolitana, Chile
martingutierrezbenardos@gmail.com

Recibido: 16/01/2024 **Aceptado**: 20/02/2025
DOI: https://doi.org/10.69967/07194773.v12i.475

Resumen

A fines de la década de 1970 y principios de la década de 1980, coincidiendo con la publicación de la primera edición del libro *Wittgenstein* de Robert Fogelin, surgió una controversia en torno al operador N y la forma general de la proposición, centrándose especialmente en su capacidad expresiva. El presente trabajo busca exponer, en primer lugar, el funcionamiento del operador N en el contexto del *Tractatus*, para luego presentar una reconstrucción y análisis detallado del debate sobre la capacidad expresiva en dos niveles: 1) con respecto a la interpretación sobre el cuantificador universal y, por ello, el problema de las funciones proposicionales negativas, y 2) con respecto a las proposiciones con cuantificadores mixtos. En este texto presentamos una crítica a la interpretación de Fogelin del operador N, usando como base la notación propuesta por Geach, para recuperar la capacidad expresiva del operador N, sin embargo, en el último apartado se presenta una revisión del estado actual del debate considerando algunas de las propuestas divergentes que han aparecido en los últimos años.

Palabras clave: Operador N, Función Proposicional, debate Fogelin-Geach, capacidad expresiva

Abstract

At the end of the 1970s and the beginning of the 1980s, coinciding with the publication of the first edition of Robert Fogelin's book "Wittgenstein," a controversy arose regarding the N-operator and the general form of the proposition, focusing particularly on its expressive capacity. This paper seeks first, to elucidate how the N-operator works in the context of the *Tractatus*, and then to present a reconstruction and detailed analysis of the debate on two levels: 1) concerning the interpretation of the universal quantifier and, therefore, the problem with the possibility of negative propositional functions, and 2) regarding propositions with mixed quantifiers. In this text, we offer a critique of Fogelin's interpretation of the N-operator, using Geach's proposed notation as a basis to recover the expressive capacity of the N-operator, nonetheless, in the last part review of the actual state of the debate is provided to show some of the latest proposals on the debate in the last few years.

Keywords: N-operator, Propositional Function, Fogelin-Geach debate, Expressive Capacity

1. Introducción: la forma general de la proposición y el operador N

En este trabajo se busca responder a la pregunta: ¿Podemos, a través del operador N, construir cualquier proposición de un lenguaje lógico de primer orden? La postura que defiendo es afirmativa. A continuación, se presenta el debate sobre la capacidad expresiva de este operador lógico, protagonizado por Robert Fogelin y Peter Geach. Fogelin acusa a Wittgenstein de cometer un error fundamental que impediría a N expresar todas las proposiciones. Geach, en respuesta, amplía la notación tractariana para rescatarla de esta acusación.

Para comenzar, debemos examinar la concepción de Wittgenstein sobre las proposiciones. De aquí en adelante, todas las citas del *Tractatus* (1923), provienen de la traducción al castellano de Luis Valdés Villanueva (Wittgenstein, 2013). En el *Tractatus*, se dividen en dos grupos: proposiciones cotidianas y proposiciones elementales. Estas últimas son conjuntos de nombres coordinados de un modo específico, que representan objetos en los estados de cosas y se relacionan entre sí. Las proposiciones cotidianas se construyen a partir de proposiciones elementales, y es en este proceso donde el operador N adquiere relevancia. La base de esta idea se encuentra en los siguientes pasajes del *Tractatus*:

> 5 Una proposición es una función de verdad de proposiciones elementales. (Una proposición elemental es una función de verdad de sí misma).

Más adelante agrega:

> 5.3 Todas las proposiciones son resultados de operaciones veritativas con proposiciones elementales.

Aquí se enuncia una de las tesis principales del *Tractatus*: toda proposición deriva de proposiciones elementales, que constituyen su base en las operaciones veritativas. Una operación veritativa, al igual que las matemáticas, transforma una base en un resultado: si tomamos los números 4 y 6, podemos combinarlos mediante distintas operaciones, como la multiplicación, obteniendo 24. De manera análoga, una operación veritativa parte de una proposición y genera otra distinta.

En su tratamiento de la generalidad lógica, Wittgenstein introduce una única operación que, aplicada sucesivamente, permite derivar todas las proposiciones a partir de proposiciones elementales. Esta operación es N, mencionada por primera vez en el siguiente pasaje:

> 5.502 Por ello escribo “$N(\xi)$”, en lugar de “$(-----V)(\xi, \dots)$”.
>
> $N(\xi)$ es la negación de todos los valores de la variable proposicional ξ.

El uso del operador, se nos muestra más claramente al revisar uno de los grandes temas del *Tractatus*, la forma general de la proposición:

> 6 La forma general de una función de verdad es $[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$.
>
> Esta es la forma general de la proposición.
>
> 6.001 Esto no dice sino que toda proposición es un resultado de aplicaciones sucesivas de la operación $N(\overline{\xi})$ a proposiciones elementales.

La forma general de la proposición es aquella estructura que nos permite decir que tal o cual cosa es el caso (4.5), por lo que a través de ella trazamos un límite a aquello que puede ser dicho en un lenguaje con sentido. En la expresión de la forma general de la proposición, “$\overline{p}$” es una variable para el conjunto de todas las proposiciones elementales; “$\overline{\xi}$” corresponde a una selección arbitraria de proposiciones, que puede contener tanto proposiciones elementales como proposiciones ordinarias; y “$N(\overline{\xi})$” corresponde a la aplicación de la operación N al conjunto previamente seleccionado. El operador N corresponde a la negación conjunta de un conjunto base de proposiciones. Es decir, si tomamos (p, q), N genera $(\neg p \wedge \neg q)$. Aplicado a un conjunto de proposiciones, el resultado es verdadero solo si todas las proposiciones base son falsas; en caso contrario, es falso. En la notación alternativa de Wittgenstein, N se expresa como "$(-----V)(\xi, \ldots)$", una generalización de (FFFV) (p, q), que indica que todas las columnas de la tabla de verdad, excepto la última, son falsas para un conjunto de proposiciones determinado (Rogers & Wehmeier, 2012, p. 555). La expresión de la forma general de la proposición nos muestra así la regla general para construir cualquier proposición.

La clave está en cómo el operador N permite construir proposiciones cuantificadas. En una función, el argumento representa un conjunto de valores que puede tomar una variable. Por ejemplo, la función "Fx" representa todas las proposiciones obtenidas al reemplazar x por un argumento, es decir, Fa, Fb, Fc, etc. Para derivar proposiciones cuantificadas, en lugar de operar sobre un conjunto arbitrario de proposiciones, tomamos como base la función Fx, obteniendo $N(Fx)$. Como se explicó, N niega conjuntamente las proposiciones base, en este caso, Fa, Fb, Fc, etc. Así, se obtiene: $\neg Fa \wedge \neg Fb \wedge \neg Fc \wedge \neg Fd$, etc. La proposición obtenida antes es lógicamente equivalente, es decir, tiene los mismos valores de verdad de la proposición cuantificada $(\forall x)\neg Fx$.

> 5.52 Si los valores de ξ son todos los valores de la función fx para todos los valores de x, entonces $N(\xi) = \neg(\exists x)Fx$.

Una vez hemos dado cuenta del cuantificador universal, veamos ahora cómo podemos analizar el cuantificador existencial. Para continuar, tomamos ahora el resultado de la operación anterior, $(\forall x)\neg \underline{Fx}\, N(Fx)$, como la base de la operación N, lo que nos queda $N(N(Fx))$, lo que como negación conjunta es lógicamente equivalente a $\neg(\forall x)\neg Fx$, la negación de la cuantificación universal, que obviamente es lógicamente equivalente a la cuantificación existencial $(\exists x)\, Fx$.

El rol del operador N en este punto es el de mostrar cómo cualquier proposición de la lógica proposicional o de la lógica de predicados puede ser traducida en términos tractarianos.

En la forma general de la proposición, N se aplica a una variable proposicional, cuyos valores son proposiciones. Para justificar cómo N puede construir cualquier proposición, Wittgenstein especifica tres métodos de descripción:

> 5.501 Podemos distinguir tres géneros de descripción:
>
> 1. La enumeración directa. En este caso podemos colocar simplemente en el lugar de la variable sus valores constantes.
>
> 2. La indicación de una función Fx cuyos valores de x son las proposiciones que se han de describir.
>
> 3. La indicación de una ley formal de acuerdo con la cual se forman esas proposiciones. En este caso, los términos de la expresión que va entre paréntesis son, todos ellos, los términos de una serie de formas.

El primer genero de descripción se refiere a entender la especificación de las proposiciones base como la enumeración de todos los valores de Fx, es decir, algo como esto: $Fa, Fb, Fc, Fd, ...Fn$. En el segundo método, Wittgenstein explica cómo es posible, a través de la mera aplicación del operador, construir proposiciones cuantificadas, a saber, a través de definir la variable proposicional como una función proposicional del estilo Fx que representa el conjunto de todas las proposiciones que se obtienen al reemplazar "x" en la función proposicional por nombres de objetos.

Habiendo revisado ya lo básico del texto, lo que Wittgenstein nos da, damos paso a estudiar en concreto el debate Fogelin – Geach en sus dos dimensiones.

2. El problema sobre el cuantificador universal

Como vimos anteriormente, Wittgenstein afirma que a través de la aplicación de *un* operador veritativo N a proposiciones elementales, podemos construir todas las proposiciones del lenguaje (5.3, 5.5). También revisamos cómo se construyen proposiciones con N, tanto cuando aplicamos N a una enumeración de proposiciones, como cuando lo aplicamos a una función proposicional para generar proposiciones generales (5.501).

Para introducir la discusión, es necesario recordar cómo se construyen proposiciones cuantificadas mediante funciones proposicionales. En 5.52 Wittgenstein dice que $N(fx)$ es lógicamente equivalente a la proposición $\neg(\exists x)fx$, o lo que es lo mismo,$(\forall x)\neg fx$. Fogelin (1987) continúa derivando proposiciones equivalentes a proposiciones cuantificadas, en notación tractariana, de esta manera, como las operaciones son iterativas, es decir, pueden aplicarse sucesivamente, usando el resultado como su base (5.2521), aplicamos N a la proposición anterior y obtenemos la proposición $N(N(fx))$, que es equivalente a$(\exists x)fx$. Así obtenemos, en un lenguaje tractariano, proposiciones equivalentes a algunas proposiciones generales.

El problema que da pie al debate es el siguiente. Según la interpretación de Fogelin, nuevas aplicaciones de N a la proposición obtenida en 5.52, es decir, $N(fx)$, no logran construir de ningún modo una proposición cuantificada universalmente como $(\forall x)fx$. Según Fogelin, para obtener una proposición equivalente, primero deberíamos tomar no la función proposicional fx, sino su negación $\neg fx$ y así obtener la proposición $N(\neg fx)$, que sí sería lógicamente equivalente a $(\forall x)fx$. Pero aquí, creo, Fogelin ha cometido un pequeño error. De haber notado esto, se habría dado cuenta de que el error que encuentra en la lógica del Tractatus es más amplio. Wittgenstein pretende con el operador N construir una lógica que tenga a este operador como su *única* constante lógica (cf. Cheung, 2000, p. 247). En un sentido estricto, por tanto, no podemos tener una proposición como $N(\neg fx)$ porque si empezáramos con la función $\neg fx$ estaríamos usando más constantes de las necesarias, pues, un sistema lógico que tiene a N como su única constante no puede utilizar otras, como por ejemplo, la negación, la conjunción, la disyunción, etc. Es importante recordar que toda proposición puede ser construida a partir de aplicaciones sucesivas de operadores veritativos a proposiciones elementales. Cuando aplicamos N a una proposición, obtenemos su negación (5.51). Solo en ese caso, N funcionaría como la negación común de una proposición "$\neg$"; en cualquier otro, el resultado obtenido sería equivalente a la negación conjunta de un conjunto de proposiciones. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, con $N(fx)$, que sería la negación conjunta de todas las proposiciones que son valores de fx. De este modo, en la interpretación de Fogelin, no podríamos dar cuenta de $(\forall x)fx$, pues, para ello, sería necesario comenzar desde una función proposicional en conjunto con una negación, que no puede crearse dentro de los límites tractarianos.

En 1981, Peter Geach publicó una nota en la revista *Analysis*, en la que señala el problema en la interpretación de Fogelin sobre el uso de N para obtener la cuantificación universal y propone una adición a la notación del *Tractatus* para superar esta dificultad:

> Para mostrar en su total extensión cómo funciona el operador N, necesitamos (algo que él mismo [Wittgenstein] no provee) una notación explícita para una clase de proposiciones en la que sólo un constituyente varía. Usaré "$N(\ddot{x} : fx)$" para denominar la negación conjunta de la clase de proposiciones que se obtienen al sustituir nombres por la variable en la función proposicional (representada por) "fx". (Geach, 1981, p. 169)

A primera vista, podría parecer que la notación agregada por Geach $(\ddot{x} : fx)$ dice lo mismo que si usáramos simplemente la función proposicional fx. Sin embargo, la verdadera innovación surge al usar esta nueva notación para construir proposiciones cuantificadas. Más adelante en su texto, Geach explica que, en su notación, las proposiciones cuantificadas $(\exists x)fx$ y $(\forall x)fx$ deben escribirse como $N(N(\ddot{x} : fx))$ y $N(\ddot{x} : N(fx))$, respectivamente. En el caso de la cuantificación existencial $N(N(\ddot{x} : fx))$, el uso de N concuerda más o menos con el de Fogelin $(N(N(fx)))$, pero es al examinar el equivalente tractariano de $(\forall x)fx$ cuando se revela todo el potencial de la nueva notación. En la expresión que Geach propone para representar el equivalente a la cuantificación universal, $N(\ddot{x} : N(fx))$, vemos que N se aplica dos veces, como en el caso de la cuantificación existencial, pero la aplicación es diferente. En la cuantificación existencial, aplicamos N primero a la función proposicional fx, y la segunda vez, al tener solo una proposición en la base, N actúa como la negación común de una proposición. En cambio, en el caso de la notación al estilo Geach, la segunda N se aplica a un conjunto de proposiciones, es decir, como la negación conjunta de todos los valores de$\neg fx$ Esto se debe a que el rol de la expresión $(\ddot{x} : N(fx))$ es representar, en notación tractariana modificada, la función proposicional $\neg fx$ Lo que esta nueva notación nos permite es que N, como aparece en $(\ddot{x} : N(fx))$, introduzca una función proposicional. Este aspecto será revisado más adelante.

Al año siguiente de la publicación de la nota de Geach, defendiendo al Tractatus de las acusaciones de incompletitud expresiva, Fogelin publica, en la misma revista, una respuesta a Geach. El argumento de Fogelin ataca específicamente el equivalente lógico de la cuantificación universal $(\forall x)fx$, que, en la notación de Geach, es $N(\ddot{x} : N(fx))$. Como observamos anteriormente, cuando consideramos esta expresión, parece que solo se están realizando dos aplicaciones de N. Según Fogelin, esto es falso, pero para demostrarlo, es necesario un matiz: 'Para Geach, la expresión '$(\ddot{x} : N(fx))$' especifica un conjunto de proposiciones que resulta de una posiblemente infinita cantidad de aplicaciones de N a un conjunto de proposiciones' (Fogelin, 1982, p. 125). El autor nos invita a comparar la proposición anterior, $N(\ddot{x} : N(fx))$, con una proposición que usa la notación 'pura' de Wittgenstein, en la cual se aplica N dos veces, como en $N(N(fx))$. Esta última proposición sí contiene dos aplicaciones del operador N. Para mostrar claramente la diferencia, Fogelin analiza ambas proposiciones en conjunto, obteniendo lo siguiente:

1. $N(N(\overline{fx})) = N(N(fa, fb, fc, ...)) = (\exists x)fx$
2. $N(\ddot{x} : N(fx)) = N(N(fa), N(fb), N(fc), ...)) = (\forall x)fx$

Lo que Fogelin quiere demostrar aquí es que, aunque en ambos casos se observan dos aplicaciones y ambas notaciones manejan posiblemente infinitas proposiciones de la forma fx, la notación de Geach comete un error al proponer algo que el Tractatus (según la interpretación de Fogelin) no permite: la aplicación infinita de operaciones veritativas. La referencia de Fogelin para su crítica es la siguiente:

> 5.32 Todas las funciones de verdad son resultados de aplicaciones *sucesivas* de un número finito de operaciones veritativas a proposiciones elementales.

Fogelin apunta a que la propuesta de Geach entra en contradicción con esta "doctrina esencial del *Tractatus*", él acusa a la propuesta de Geach de "violar la demanda de *finitud* y *sucesión*" (Fogelin, 1982, p. 126) requeridas por 5.32.

En trabajos más recientes sobre este debate, se ha argumentado que la interpretación de Fogelin sobre el 5.32 es errónea, ya que él entiende que no es posible aplicar un operador veritativo de manera infinita: 'Wittgenstein nunca dice que la construcción de una proposición deba incorporar infinitas aplicaciones del operador N; de hecho, dice todo lo contrario' (Fogelin, 1976, p. 73). Rogers y Wehmeier (2012) argumentan que Fogelin malinterpretó el 5.32, ya que lo que Wittgenstein afirma no es que toda proposición sea el resultado de finitas aplicaciones de operadores veritativos a proposiciones elementales, sino que toda proposición es el resultado de aplicaciones sucesivas (finitas o infinitas) de un número finito de operaciones veritativas a proposiciones elementales. 'De hecho, Wittgenstein argumenta que son el resultado de una sola operación, a saber, N' (Rogers & Wehmeier, 2012, p. 562). Lo que Wittgenstein exige no es finitud en la aplicación, sino finitud en la cantidad de operadores veritativos que utilicemos en nuestra lógica.

Aunque ese era el núcleo de la crítica de Fogelin a Geach, hay en la propia interpretación de Fogelin sobre la notación de Geach un problema que demuestra que Fogelin no ha comprendido a cabalidad el poder de esta notación. Como revisamos más arriba, Fogelin entiende la expresión '$N(\ddot{x} : N(fx))$' como '$N(N(fa), N(fb), N(fc), \ldots)$', y por tanto lo que está diciendo es que la primera expresión es una abreviación de la otra. Pero si esto fuera efectivamente el caso, entonces las variables o funciones proposicionales obtenidas por el segundo método de 5.501 serían meras abreviaturas de enumeraciones de proposiciones, del mismo estilo que en el primer método. Básicamente, según la interpretación de Fogelin, el primer y el segundo método serían idénticos. Lo que Wittgenstein dice es que cuando aplicamos N a una lista enumerada de Lo que Wittgenstein sostiene es que, cuando aplicamos N a una lista enumerada de proposiciones obtenida mediante el primer método de 5.501, obtenemos una proposición que es la negación conjunta de los miembros de la lista (5.51). Por el contrario, si aplicamos N a una función proposicional descrita por el segundo método, es decir, una función proposicional como fx, obtenemos una proposición lógicamente equivalente a$(\forall x)\neg fx$. Esta diferencia puede ser ejemplificada del siguiente modo: cuando describimos la variable Esta diferencia puede ejemplificarse de la siguiente manera: cuando describimos la variable proposicional 'ξ' en $N(\xi)$ mediante el primer método de 5.501, enumeramos una cantidad finita de proposiciones (cf. Ferreira, 2023, p. 350). Por ejemplo, si tenemos las proposiciones Hp, Hq, Hr y Hs, mediante la aplicación de N obtenemos la proposición: $\neg Hp \wedge \neg Hq \wedge \neg Hr \wedge \neg Hs$. En cambio, cuando describimos la variable proposicional "ξ" a través del segundo método, a saber, la estipulación de una función proposicional del estilo "fx", obtenemos, mediante la aplicación de N, una proposición lógicamente equivalente a $(\forall x)\neg fx$. Esta proposición define el concepto de suma lógica, que para Wittgenstein no exhibe generalidad. Por el contrario, si aplicamos N a la función proposicional fx, a saber, $N(fx)$, obtenemos proposiciones cuantificadas, ya que estamos generalizando al máximo nivel.

3. El error fundamental en la lógica del Tractatus

El debate Fogelin-Geach, tal como se trata en la literatura sobre el tema, no se centra principalmente en el debate sobre el cuantificador universal que revisamos en el apartado anterior, pero es precisamente en este contexto donde se ofrece una visión sobre este problema. Robert Fogelin, en el capítulo VI de su libro *The Naive Constructivism of the Tractatus*, plantea lo que él considera 'el error fundamental en la lógica del Tractatus', refiriéndose a la crítica de la incompletitud expresiva del operador N. Sin embargo, esta crítica está principalmente orientada a demostrar que, dado los procedimientos para construir proposiciones en el Tractatus, no es posible construir proposiciones que involucren cuantificaciones mixtas, con cuantificadores tanto existenciales como universales. Fogelin comienza presentando ocho ejemplos de proposiciones con cuantificaciones múltiples, con el fin de intentar construirlas a través de aplicaciones sucesivas de N:

1. $(\forall x)(\forall y)fxy$
2. $(\exists x)(\exists y)fxy$
3. $(\forall x)(\exists y)fxy$
4. $(\exists x)(\forall y)fxy$
5. $(\forall x)(\forall y)\neg fxy$
6. $(\exists x)(\exists y)\neg fxy$
7. $(\forall x)(\exists y)\neg fxy$
8. $(\exists x)(\forall y)\neg fxy$

Para comenzar a derivar estas fórmulas desde una notación tractariana, debemos en primer lugar describir el valor de la variable ξ, que en este caso es la función *fxy* que representa el subconjunto de las proposiciones elementales consistente en los valores de esa función para todos los valores de 'x' e 'y', es decir: $faa, fab, fba, fac, fbc, etc$. Así, la primera aplicación de N a esa función sería $N(fxy)$, lo que daría como resultado una proposición equivalente a $\neg(\exists x)(\exists y)fxy$, en esta proposición usamos la leyes de De Morgan para mover la negación hacia adentro y obtenemos la proposición 5: $(\forall x)(\forall y)\neg fxy$. Ahora apliquemos N a 5, usando un procedimiento similar al anterior y obtendremos como resultado una proposición equivalente a 2: $(\exists x)(\exists y)fxy$. El problema relevante aparece cuando intentamos aplicar N a 2 para obtener una nueva proposición, pues lo que resulta en realidad es otra vez una proposición equivalente a 5. Nos encontramos entonces con un muro que no nos permite avanzar en la construcción de proposiciones: si aplicamos N sucesivamente a estas proposiciones sólo obtendremos equivalentes de 2 y de 5.

Fogelin ahora intenta revisar un camino alternativo tal que, en vez de ocupar fxy como base de la operación, ocupemos su negación $\neg fxy$, con lo que el resultado de aplicar N a esta función, $N(\neg fxy)$, es una proposición equivalente a la proposición 1: $(\forall x)(\forall y)fxy$. Ahora, si como en el caso anterior, aplicamos N a 1 obtenemos algo equivalente a la proposición 6: $(\exists x)(\exists y)\neg fxy$, y luego de esto, como dice Fogelin, el camino se vuelve estéril una vez más sin que podemos llegar a producir las cuatro fórmulas cuantificadas restantes de la lista (3, 4, 7 y 8), que justamente son las cuantificaciones mixtas. El gran problema entonces es que no podemos, dados los procedimientos del *Tractatus*, construir proposiciones que contengan cuantificación mixta.

La razón por la cual Fogelin atribuye incompletitud expresiva al operador N tiene que ver con cómo (según él) el operador N se aplica a funciones proposicionales con más de una variable (cf. Rogers & Wehmeier, 2012, p. 559).

> Cuando aplicamos el operador N a las proposiciones que son los valores de función xy, ambos espacios para los argumentos bajo la función son tratados al mismo tiempo y de la misma manera, i.e., ambas variables son capturadas. De este modo cualquier cuantificador que aparezca actuando sobre una variable, ese mismo tipo de cuantificador debe aparecer actuando sobre la otra. (Fogelin, 1987, p. 79)

Recordemos que Fogelin (1987) en la misma página menciona que “dados los procedimientos notacionales dados explícitamente en el *Tractatus*, no es posible construir proposiciones con cuantificaciones mixtas” (79). Cheung reconoce que no hay, en el *Tractatus*, tal procedimiento explícito para tratar con funciones proposicionales con más de una variable, pero a continuación señala: “El problema con el argumento de Fogelin es que nunca prueba que no hay ninguna otra manera de aplicar N para proposiciones generales heterogéneas y múltiples” (Cheung, 2000, 248). La crítica de Cheung podría descartarse argumentando, como lo hace Fogelin, que el *Tractatus* establece explícitamente cuáles son los procedimientos para las aplicaciones de N (cf. Fogelin, 1987, 79). Pero lo único que dice Wittgenstein sobre las aplicaciones de N es que si lo aplicamos a una proposición obtenemos su negación, y si lo aplicamos a dos o más proposiciones obtenemos una conjunción de negaciones correspondientes a cada una de esas proposiciones (ej. $N(p, q, r) = \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$)). Y también dice, finalmente, que si aplicamos N a la función proposicional fx, obtenemos una proposición equivalente a $\neg(\exists x)fx$ (5.52). Pero lo relevante, en particular, es que Wittgenstein jamás habla de la aplicación de N a una función proposicional como fxy. Por esta razón, Fogelin se equivoca en el sentido de que, siguiendo a Cheung, no da razones tractarianas de por qué N no podría aplicarse de otra manera distinta a la que él propone, en el caso de aplicarlo a funciones proposicionales con dos variables.

Algunos autores han comentado que la manera en la que Fogelin construye proposiciones con cuantificadores múltiples entra en contradicción con

> 3.315 Si convertimos una parte constituyente de una proposición en una variable, hay una clase de proposiciones que son todas ellas valores de la proposición variable resultante.

En primer lugar, debemos recordar que para Wittgenstein si convertimos un constituyente de una proposición en una variable, hay una clase de proposiciones que consta de todos los valores que resultan de reemplazar la variable por nombres. Para ilustrar este punto veamos el siguiente caso: si tenemos la proposición ‘fa’, podemos reemplazar el nombre ‘a’ por la variable x, para obtener la función proposicional fx, del mismo modo que si tenemos una proposición cualquiera como, por ejemplo, ‘Mark Gonzales jugó en Liverpool’, formalizada en lenguaje de predicados como Lm, podemos cambiar ‘Mark Gonzales’ por la variable x y obtenemos una variable proposicional como 'x jugó en Liverpool' tal que hay una clase de proposiciones que se obtienen a través de reemplazar x por un nombre en ella (o, equivalentemente, en la función proposicional Lx).

Ahora, volviendo al tema de las funciones con múltiples variables, intentemos construir la proposición $(\forall x)(\exists y)fxy$ con el operador N siendo fieles a 3.315, para lo cual sigo la argumentación de Rogers y Wehmeier (2012). Primero introduciremos una proposición cualquiera "a ama a b" (fay), luego transformamos esa proposición en una variable cambiando b por y, obteniendo "a ama a y" a continuación, obtenemos, por aplicación de N la proposición $N(fay)$ que es lógicamente equivalente a $\neg(\exists y)fay$. Sabemos que la proposición $(\forall x)(\exists y)fxy$ es equivalente a $\neg(\exists x)\neg(\exists y)fxy$, por lo que el camino a seguir para llegar a estas proposiciones es el de aplicar N a una proposición de la forma $\neg(\exists y)fxy$, una forma similar a la que ya obtuvimos, de este modo, si a través de $N(fay)$ obtuvimos una proposición equivalente a $\neg(\exists y)fay$, entonces al aplicar nuevamente N a esa proposición $N(N(fay))$, debemos reemplazar "a" por "x" para obtener $N(N(fxy))$. El problema aquí aparece cuando vemos que, según el procedimiento de Fogelin, $N(N(fxy))$ corresponde a $(\exists x)(\exists y)fxy$, no a la cuantificación mixta $(\forall x)(\exists y)fxy$. Lo que podemos ver aquí es que, como mínimo, la manera de Fogelin de trabajar con funciones proposicionales con más de una variable no es la única, ni necesariamente la correcta.

Dentro de los límites del *Tractatus*, es ciertamente permisible pasar de $N(fay) \equiv \neg(\exists y)fay$ a $N(fxy) \equiv \neg(\exists y)fxy$. Pues, según 3.315 podemos hacer de una parte constituyente de una proposición, una variable obteniendo una variable proposicional. Pero según la interpretación de Fogelin $N(fxy)$ es equivalente a $(\forall x)(\forall y)fxy$. El problema subyacente que quiero mostrar aquí es que, según la interpretación de Fogelin (interpretación estrecha) del operador N, no podemos distinguir entre el caso en que $N(fxy)$ es obtenido a través de reemplazar 'a' por x en $N(fay)$ y el caso en que $N(fxy)$ es obtenido a través de aplicar directamente N a fxy, pues, a pesar de obtener resultados distintos, ambas aplicaciones se simbolizan igual. Este es un ejemplo que muestra que la notación de Fogelin (notación que según él proviene de reglas explícitas del *Tractatus*) no es del todo satisfactoria.

Ahora es momento de volver al trabajo de Geach: una de las cosas importantes del dispositivo que agrega este filósofo es que, en los casos de funciones proposicionales con más de una variable, nos permite diferencia entre variables ligadas y variables libres, y estas serán una u otra cosa dependiendo de la variable que especifiquemos al lado izquierdo de la expresión. Recordemos que Geach presenta la expresión '$\ddot{x} : fx$' para representar "la clase de proposiciones que se obtienen al sustituir nombres por la variable en la función proposicional (representada por) 'fx'." (Geach, 1981, p. 169), entonces, en esta expresión, la $\ddot{x}$ representa que la variable ligada a reemplazar por un nombre es x en la función proposicional fx. De esta manera, Geach muestra cómo podemos representar proposiciones con cuantificadores mixtos usando una notación tractariana. McGray (2006) llama a este dispositivo agregado por Geach "class-specifying variable" (151), pues, cuando trabajamos con funciones proposicionales con más de una variable, este dispositivo nos permite seleccionar cuál es la variable ligada, y de este modo identificar una clase de proposiciones. Así, $\ddot{x} : fxy$ identifica una clase de proposiciones cuyos miembros son fay, fby, fcy, etc. En esta línea, Geach muestra cómo pueden representarse proposiciones con cuantificadores mixtos usando su notación, por ejemplo, el equivalente a $(\exists x)(\forall y)fxy$ en notación tractariana es $N(N(\ddot{x} : (N(\ddot{y} : N(fxy)))))$.

A continuación se expondrá cómo una proposición como $N(N(\ddot{x} : (N(\ddot{y} : N(fxy)))))$ es equivalente a una proposición con cuantificación mixta, y al mismo tiempo se verá cómo trabajar a través de especificar variables con la notación de Geach. Para comenzar a trabajar con la proposición $N(N(\ddot{x} : (N(\ddot{y} : N(fxy)))))$ debemos en primera instancia identificar la primera (más externa) *class-specifying variable*, que en este caso es $\ddot{x}$, luego de esto debemos reemplazarla por un nombre de un objeto, por ejemplo "a", así obtenemos $N(N(a : (N(\ddot{y} : N(fay)))))$, a continuación identificamos la última (más interna) *class-specifying variable*, que es este caso es $\ddot{y}$, y luego $\ddot{y} : N(fay)$ con todas las proposiciones que resultan de reemplazar "y" con todos sus valores, a continuación aplicamos N a lo que acabamos de obtener. Lo que debemos hacer a continuación es repetir los pasos anteriores, pero reemplazando $\ddot{x}$ por todos sus valores.

Es de este modo cómo podemos usar la notación de Geach para completar o para rescatar a N del ataque de Fogelin. La integración de una variable que especifica qué variable está libre y qué variable y cuál ligada. Un dispositivo como este nos permite usar el operador N para poder crear equivalentes de cualquier proposición de un lenguaje lógico de primer orden.

Actualmente en casi todos los libros de texto sobre el *Tractatus*, o en historias de la filosofía analítica que tratan el tema del operador N en el *Tractatus*, dan por hecho que la notación que se ha de utilizar para representar las equivalencias de las fórmulas cuantificadas en términos tractarianos es la notación de Geach (McGinn, 2006; Morris, 2008; Soames, 2018).

4. La actualidad del debate

El debate sobre la capacidad expresiva fue breve pero significativo. Pocos autores, en sus explicaciones del *Tractatus*, daban espacio a esta discusión. Sin embargo, con la llegada del siglo XX, apareció también un grupo de eruditos del *Tractatus* que comenzaron a retomar el debate, analizándolo desde diversas perspectivas: algunas más filosóficas, otras más formales (Connelly, 2017; Ferreira, 2023; Floyd, 2002; Frascolla, 2007; Landini, 2007, 2011; Potter, 2009; Rogers & Wehmeier, 2012; Weiss, 2017). En esta sección, se ofrece una breve revisión del estado actual del debate, presentando algunas de las propuestas más importantes.

En el apartado anterior, se presentó el llamado debate Fogelin-Geach. Esta discusión se centraba principalmente en si el operador N era capaz de generar equivalentes a cualquier proposición del lenguaje lógico de primer orden (el de Russell y Whitehead). Los últimos aportes se pueden dividir en dos grupos. Primero, aquellos que defienden la notación de Geach y la extienden, por ejemplo, generando métodos de decisión para una lógica tractariana (Ferreira, 2023; Floyd, 2002; McGinn, 2006; Rogers & Wehmeier, 2012; Weiss, 2017); y, en segundo lugar, aquellos que defienden que Geach se equivoca con su notación, pues introduce notaciones extra-tractarianas o malinterpreta algunas doctrinas importantes del *Tractatus* (Connelly, 2017; Fogelin, 1982, 1987; Jacquette, 2001; Landini, 2007, 2011).

Por ahora, centrémonos en el primer grupo. Como se dijo más arriba, la mayoría de los investigadores actuales del *Tractatus* han decidido basar su explicación de su sistema lógico en la notación del operador N al estilo de Geach. Las razones para esto pueden ser variadas: puede ser desconocimiento de la continuación del debate (los escritos de los 2000), o bien puede ser que la mayoría cree que las razones dadas para criticar esta notación no tienen peso o no son lo suficientemente sólidas. El principal argumento que esgrimía Fogelin (1982) para criticar esta pieza de notación era que Geach estaba usando un símbolo que no se encontraba en el *Tractatus* y que Wittgenstein nunca utilizó. Además, esta variable especificadora de clases representaba un método que iba más allá de los procedimientos explícitamente expuestos en el texto. (Recordemos que Fogelin asegura que en el texto se presenta una sola manera en la que el operador N puede trabajar con funciones proposicionales múltiples, cuestión que hemos demostrado falsa.) Por lo tanto, la introducción de esta variable está completamente imposibilitada según Wittgenstein (Fogelin, 1982, p. 126). Ver el punto de Fogelin no es difícil. Claramente, está intentando decir que se debe trabajar única y exclusivamente con aquello que se nos entrega en el libro. Lamentablemente, sabemos que Wittgenstein fue bastante ambiguo con algunos pasajes (de otro modo, seguramente no habría debate). Por lo tanto, hay que tomar el texto como un todo y entender el objetivo al que el autor quería llegar.

Si bien la notación de Geach introduce una variable a la fórmula que Wittegnstein no intrdujo, podemos derivar esta variable especificadora de clases de algunas herramientas que Wittgesntein sí utilizó en el texto, a saber, la barra superior, recordemos la fórmula general de la proposición es $[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$, la barra superior significa que se estan seleccionando todos los elementos del determinado conjunto, así $\overline{\xi}$ corresponde a la selección de todos los elementos del conjunto ξ. Hay otra pieza de notación, que Wittgenstein no utiliza, pero que unida a la barra lateral podría tener el mismo funcionamiento que la variable de Geach. Según Rogers y Wehmeier (2012), cuando Wittgenstein utiliza la fórmula fx para referir a la función proposicional lo que debería haber usado es en realidad $f\hat{x}$, el acento circunflejo utilizado aquí es un símbolo con funcionamiento similar a la $\ddot{x}$ de Geach, que fue utilizado por Russell y Withehead en su *Principia* (1963).

> si «x está herido» e «y está herido» ocurren en el mismo contexto, [. . .] entonces, de acuerdo con las determinaciones dadas a x e y, se puede establecer que son (posiblemente) la misma proposición o (posiblemente) proposiciones diferentes. Pero aparte de alguna determinación dada a x e y, mantienen en ese contexto su diferenciación ambigua. Así, «x está herido» es un «valor» ambiguo de una función proposicional. Cuando queramos hablar de la función proposicional correspondiente a «x está herido», escribiremos «$\hat{x}$ está herido». Así, «$\hat{x}$ está herido» es la función proposicional y «x está herido» es un valor anambiguo de esa función. Por consiguiente, aunque «x está herido» e «y está herido» en el mismo contexto pueden distinguirse, «$\hat{x}$ está herido» y «$\hat{y}$ está herido» no transmiten ninguna distinción de significado. En términos más generales, ϕx es un valor ambiguo de la función proposicional $\phi\hat{x}$, y cuando un significado definido a sustituye a x, ϕa es un valor no ambiguo de $\phi\hat{x}$. (Russell & Whitehead, 1963, pp. 14-15).

Con esta cita es posible ver cómo el rol de una variable especificadora ya existía en los trabajos con los que Wittgenstein estaba claramente interiorizado, la razón por la cual este símbolo no es utilizado en el *Tractatus* posiblemente es que en el texto nunca aparece una función proposicional múltiple, notemos que la introducción de este símbolo en el caso del *Tractatus* sería necesaria sólo en ese caso. De este modo el uso del acento circunflejo que selecciona tanto la variable a utilizar como el rol que cumple una variable sumada a la barra superior que selecciona todos los miembros de un conjunto generan un método para utilizar N, que probablemente Wittgenstein no habría estado disgustado en utilizar, de este modo tenemos que $N(\ddot{x} : fx) = N(\overline{f\hat{x}})$ (cf. Rogers & Wehmeier, 2012, pp. 563-564).

Algunas de las críticas a Geach han sido atenuadas, pero varios de los autores mencionados anteriormente, específicamente Dale Jacquette (2001) y James Connelly (2017), han criticado a Geach por las mismas razones que Fogelin. Además, ambos han encontrado formas de hacer que N sea expresivamente completo, sin la necesidad de apelar a algo más allá del texto. A continuación, se presentan sus interpretaciones.

En el caso de Jacquette (2001), según él mismo dice, está de acuerdo con la conclusión de Fogelin de que, si comenzamos con la construcción a partir de la función proposicional fab o $\neg fab$, entonces solo se pueden obtener las equivalentes para las proposiciones 1, 2, 5 y 6 mencionadas anteriormente (Jacquette, 2001, p. 197). El error que comete Fogelin es, como ya se vio más arriba, restringir injustificadamente tanto el alcance del operador como el conjunto de proposiciones con los que puede comenzar. Para Jacquette, al igual que luego para Connelly, el operador N trabaja virtualmente como todos los valores posibles de la función proposicional fxy, al mismo tiempo. El procedimiento de Jacquette es el siguiente: tomemos el conjunto de todos los valores de la función proposicional $f\underline{xy}$, es decir, fab, fbb, fcb, faa, fac, etc. Al ordenar convenientemente este conjunto de valores, obtenemos el siguiente diagrama.

$faa, fab, fac, ...; fba, fbb, fbc, ...; fca, fcb, fcc, ...; ....$

Como se puede observar, en los primeros tres valores se mantiene fijo el nombre '*a*' y se toma el segundo espacio como variable. En el segundo conjunto se hace lo mismo, pero cambiamos el nombre que antes estaba fijo por "b". Es fácil ver cómo este método se va replicando hasta completar el recorrido de todos los valores de la variable fxy. El segundo paso es transcribir lo anterior en formato de proposiciones parcialmente cuantificadas, basándonos en la regla para la creación de funciones proposicionales proporcionada por Wittgenstein en 3.15:

$\neg(y)\neg fay, \neg(y)\neg fby, \neg(y)\neg fcy, ...$

el mismo modo, transformamos todo esto en una proposición con cuantificación múltiple al hacer variable el primer lugar de la función. De este modo, obtenemos: $\neg(\exists x)\neg(\exists y)\neg fxy$, que, al aplicar la ley de intercambio de cuantificadores (cuestión que Fogelin permite), se obtiene $(\forall x)(\exists y)\neg fxy$, que es justamente la proposición 7 en la lista de Fogelin.

Lo que demuestra Jacquette (2001) es que la crítica de Fogelin es errónea y solo surge de limitaciones que él mismo impone a N (Jacquette, 2001, p. 198). Lamentablemente, la solución de Jacquette es un mero esbozo, pues aún falta desarrollo técnico y filosófico para dar fe de la validez de su propuesta.

Pasemos ahora a la propuesta de James Connelly (2017). Como se mencionó anteriormente, las propuestas de Connelly y Jacquette son, en el aspecto formal, idénticas. La gran diferencia entre ambas radica en que la motivación de Connelly es filosófica, mientras que la de Jacquette es lógica. En su artículo, Connelly describe cuatro vicios que, a su juicio, han marcado el debate entre Fogelin y Geach. Estos son:

> 1) la concepción de Wittgenstein del infinito como actual en vez de potencial; 2) La introducción del operador N por motivos puramente filosóficos antes que prácticos; 3) La caracterización de Wittgenstein de la proposiciones elementales como dotadas con estructura pero de todos modos lógicamente independientes; 4) La caracterización del operador N como un operador sentencial antes que cuantificacional. (Connelly, 2017, p. 1)

Los aspectos más importantes para el funcionamiento de N en la propuesta de Connelly, en mi opinión, son los puntos 3) y 4). Una de las diferencias entre la propuesta de Connelly y la de Jacquette radica en el fundamento que el primero da para la construcción de proposiciones mediante N. Lo que hace Connelly es reemplazar cada función proposicional, como por ejemplo fab o fcc, por una letra proposicional. Esto está permitido, pues estas funciones son proposiciones elementales. De este modo, si quisiéramos construir una proposición con cuantificación mixta a partir de la función fxy, ordenaríamos sus valores de la siguiente manera (cf. Connelly, 2017, p. 20):

$p : faa$ $q : fab$ $r : fac$ $\ldots$ $p^i : fai$	$p^1 : fba$ $q^1 : fbb$ $r^1 : fbc$ $\ldots$ $p^{1i} : fbi$	$p^2 : fca$ $q^2 : fcb$ $r^2 : fcc$ $\ldots$ $p^{2i} : fci$	$p^{i1} : fia$ $\ldots$	$p^{ii} : fii$

La i que aparece en esta formulación es importante, ella representa el último término de dominio, por supuesto, no sabemos qué es ni cuán lejos esta del primero, es un orden parcial, por lo cual es importante notar que i está por este valor desconocido. La construcción de Connelly cobra pleno sentido cuando nos damos cuenta de que, de hecho, las proposiciones elementales tienen una estructura similar y, al mismo tiempo, son lógicamente independientes. Además, traducir las funciones en proposiciones elementales nos permite luego aplicar N directamente a proposiciones elementales, quedándonos con el método 1 de los tres descritos en 5.501, lo que no ofrece grandes ventajas a la hora de construir proposiciones. Por esta razón, Connelly argumenta que N fue pensado por Wittgenstein como un operador eminentemente sentencial.

Al contar con este método de 'traducción y ordenación' de funciones proposicionales, evitamos al mismo tiempo las limitaciones impuestas por Fogelin y la introducción de nuevos elementos en la forma general de la proposición. Connelly presenta un ejemplo de construcción con la siguiente equivalencia:

$(\forall x)(\exists y)fxy = N(N(N(Np, Nq, Nr, ..., Np^i), N(Np^1, Nq^1, Nr^1, ..., Np^{1i}),$

$N(Np^2, Nq^2, Nr^2, ..., Np^{2i}), ..., N(Np^{i1}, ..., Np^{i,i})))$

Si bien no es intuitivo, parece que Connelly ha dado con un punto importante. Es posible construir proposiciones con cuantificación múltiple usando el operador N, sin salir de los límites del *Tractatus*. La diferencia entre los métodos de Connelly y Jacquette con el de Geach, es que los primeros no usan una variable especificadora de clases ni la consideran necesaria Según su interpretación, el operador N trabaja virtualmente con todos los miembros del conjunto al mismo tiempo; basta con un orden para demostrar la completitud expresiva del operador.

A pesar del desarrollo actual de este debate, parece ser que la alternativa favorita sigue siendo la de Geach. Esto se debe seguramente a su simplicidad y al hecho de que las críticas que se le han presentado no parecen ser tan sólidas como se esperaba, como se ha mostrado aquí.

5. Conclusión

En esta investigación se ha presentado el debate sobre la capacidad expresiva del operador N en el *Tractatus*. Para ello, se comenzó revisando cómo surge la generalidad en el marco tractariano, diferenciando entre generalidad y cuantificación, y explicando la función de la variable proposicional dentro de la forma general de la proposición. Posteriormente, se expuso la crítica de Fogelin, quien argumenta que el operador N es incapaz de generar proposiciones con cuantificación mixta. Sin embargo, su postura resultó demasiado restrictiva, pues presupone que cualquier cuantificación sobre una variable debe extenderse simétricamente a la otra, lo que impide la construcción de proposiciones con cuantificación heterogénea.

Ante esta objeción, Geach propuso una notación alternativa que introduce una variable especificadora de clases $(\ddot{x} : fx)$, lo que permite representar de manera más precisa el rol de las variables ligadas y libres dentro del sistema tractariano. En este trabajo se argumenta que esta propuesta es la mejor alternativa para rescatar la capacidad expresiva del operador N, ya que no solo permite representar correctamente proposiciones con cuantificación mixta, sino que también se alinea con el espíritu del *Tractatus*.

El análisis del estado actual del debate incorpora desarrollos recientes que han refinado esta propuesta, como el uso de la barra superior y el acento circunflejo, que pueden derivarse de herramientas ya presentes en el contexto de Wittgenstein. Además, se revisaron las contribuciones de Jacquette y Connelly, quienes, sin necesidad de recurrir a notaciones externas al *Tractatus*, lograron construir proposiciones con cuantificación mixta mediante una reordenación sistemática de los valores de la función proposicional. Aunque sus enfoques difieren del de Geach en términos formales, comparten la idea central de que Fogelin impuso restricciones innecesarias al operador N.

A pesar de estas alternativas, la notación de Geach sigue siendo la más utilizada en la literatura contemporánea debido a su claridad y practicidad. Aunque han surgido críticas en su contra, los intentos por refutar su validez no han logrado desplazarla como el estándar interpretativo dominante. En última instancia, la revisión de este debate demuestra que el operador N no solo es capaz de expresar cualquier proposición de un lenguaje lógico de primer orden, sino que sigue siendo un punto clave para la comprensión de la lógica tractariana y sus límites expresivos.

Referencias

Cheung, L. (2000). The Tractarian operation N and expressive completeness. *Synthese*, *123*(2), 247-261. https://doi.org/10.1023/A:1005286219444

Connelly, J. (2017). On operator N and Wittgenstein's logical philosophy. *Journal for the History of Analytical Philosophy*, *5*(4). https://doi.org/10.15173/jhap.v5i4.2963

Ferreira, R. (2023). The expressive power of the N-operator and the decidability of logic in Wittgenstein's Tractatus. *History and Philosophy of Logic*, *44*, 33-53. https://doi.org/10.1080/01445340.2022.2056687
Floyd, J. (2002). Number and ascriptions of number in Wittgenstein's Tractatus. En E. H. Reck (Ed.), *From Frege to Wittgenstein: Perspectives on early analytic philosophy*. Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oso/9780195133265.003.0013
Fogelin, R. (1976). *Wittgenstein* (1st. ed.). Routledge.
Fogelin, R. (1982). Wittgenstein's operator N. *Analysis*, *42*, 124-127. https://doi.org/10.1093/analys/42.3.124
Fogelin, R. (1987). *Wittgenstein* (2nd ed.). Routledge.
Frascolla, P. (2007). *Understanding Wittgenstein's Tractatus*. Routledge.
Geach, P. (1981). Wittgenstein's operator N. *Analysis*, *41*, 168-171. https://doi.org/10.1093/analys/41.4.168
Jacquette, D. (2001). Analysis of quantifiers in Wittgenstein's Tractatus: A critical survey. *History of Philosophy and Logical Analysis*, *4*, 191-202. https://doi.org/10.30965/26664275-00401011
Landini, G. (2007). *Wittgenstein's Apprenticeship with Russell*. Cambridge University Press.
Landini, G. (2011). Wittgenstein reads Russell. En O. Kuusela & M. McGinn (Eds.), *The Oxford Handbook of Wittgenstein*. Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199287506.003.0020
McGinn, M. (2006). *Elucidating the Tractatus: Wittgenstein's Early Philosophy of Logic and Language*. Oxford University Press.
Morris, M. (2008). *Wittgenstein and the Tractatus Logico-Philosophicus*. Routledge.
Potter, M. (2009). The logic of the Tractatus. En D. M. Gabbay & J. Woods (Eds.), *Handbook of the History of Logic: Logic from Russell to Church* (Vol. 5). Elsevier. https://doi.org/10.1016/S1874-5857(09)70010-8
Rogers, B., & Wehmeier, K. (2012). Tractarian first-order logic: Identity and the N-operator. *The Review of Symbolic Logic*, *5*(4), 538-573. https://doi.org/10.1017/s1755020312000032
Russell, B., & Whitehead, A. N. (1963). *Principia Mathematica*. Cambridge University Press.
Soames, S. (2018). *The Analytic Tradition in Philosophy (Volume II): A New Vision*. Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400887930
Weiss, M. (2017). Logic in the Tractatus. *Review of Symbolic Logic*, *10*(1), 1-50. https://doi.org/10.1017/S1755020316000496
Wittgenstein, L. (2013). *Tractatus Logico-Philosophicus* (L. Valdés Villanueva, Trad.; 4th ed.) [Originalmente publicado en 1923]. Tecnos.