

UMA NOVA HEURÍSTICA PARA O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO-LOCALIZAÇÃO DE
FACILIDADES E MÁXIMA COBERTURA

Maurício Rodrigues Silva^A



ARTICLE INFO	RESUMO
Article history: Received: December, 2nd 2023 Accepted: February, 15th 2024	Objetivo: Este trabalho tem como objetivo a apresentação de um algoritmo heurístico por meio de otimização combinatória, buscando soluções viáveis para o problema da alocação-localização de facilidades. Neste caso, o algoritmo será aplicado na cobertura de uma região plana através de círculos com raio de alcance definido.
Palavras-chave: Heurística; Pesquisa Operacional; Problema de Localização; Otimização Combinatória.	Referencial Teórico: Existem exemplos clássicos de problemas que podem ser solucionados por otimização combinatória, destacando o problema da cobertura mínima por conjuntos e o problema de localização de máxima cobertura, associados a métodos heurísticos e suas técnicas estocásticas para soluções otimizadas.
	Método: Técnicas de otimização combinatória na busca da solução ótima utilizando métodos heurísticos e estocásticos aplicados em problemas de alocação-localização e cobertura de centros de facilidades.
	Resultados e Discussão: No fim do processo, o algoritmo define um conjunto de coordenadas cartesianas dos centros dos círculos de cobertura da região plana, que cobrirá os demais pontos que recebem os serviços resultando em uma área ampla de forma maximizada.
	Implicações da Pesquisa: Devido a sua versatilidade e baixo custo computacional, este algoritmo demonstrou desempenho na busca de facilidades para determinação de centros cobrindo o máximo de uma região plana. Como futuros trabalhos, este algoritmo pode ser aplicado em pesquisas de outras áreas e problemas clássicos da literatura.
	Originalidade/Valor: Este algoritmo poderá ser aplicado a diversas áreas na busca de localização e mapeamento geográfico, pois uma característica importante deste algoritmo, além de sua resposta numérica, está na geração de gráficos, facilitou a visualização da localização da cobertura das facilidades.
	Doi: https://doi.org/10.26668/businessreview/2024.v9i3.5499

UMA NOVA HEURÍSTICA PARA O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO-LOCALIZAÇÃO DE
FACILIDADES E MÁXIMA COBERTURA

ABSTRACT

Objective: This work aims to present a heuristic algorithm through combinatorial optimization, seeking viable solutions to the problem of allocation-location of facilities. In this case, the algorithm will be applied to the coverage of a flat region through circles with a defined radius.

Theoretical Framework: There are classic examples of problems that can be solved by combinatorial optimization, highlighting the problem of minimum coverage by sets and the problem of location of maximum coverage, associated with heuristic methods and their stochastic techniques for optimized solutions.

Method: Combinatorial optimization techniques in the search for the optimal solution using heuristic and stochastic methods applied to problems of allocation-location and coverage of centers of facilities.

^A Doutor em Modelagem Computacional. Instituto do Noroeste Fluminense de Educação Superior da Universidade Federal Fluminense ((INFES - UFF). Santo Antônio de Pádua, Rio de Janeiro, Brasil.
E-mail: dscmauricio@gmail.com Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-5364-1096>

Results and Discussion: At the end of the process, the algorithm defines a set of Cartesian coordinates of the centers of the coverage circles of the flat region, which will cover the other points that receive the services resulting in a large area in a maximized way.

Research Implications: Due to its versatility and low computational cost, this algorithm demonstrated performance in the search for facilities to determine centers covering the maximum of a flat region. As future work, this algorithm can be applied in research in other areas and classic problems in the literature.

Originality/Value: This algorithm can be applied to several areas in the search for location and geographic mapping, since an important characteristic of this algorithm, in addition to its numerical response, is the generation of graphs, facilitating the visualization of the location of the coverage of the facilities.

Keywords: Heuristics, Operations Research, Localization Problem, Combinatorial Optimization.

UNA NUEVA HEURÍSTICA PARA EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN-UBICACIÓN DE INSTALACIONES Y COBERTURA MÁXIMA

RESUMEN

Objetivo: Este trabajo pretende presentar un algoritmo heurístico a través de optimización combinatoria, buscando soluciones viables para el problema de asignación-ubicación de instalaciones. En este caso, el algoritmo se aplicará para cubrir una región plana utilizando círculos con un radio definido.

Marco Teórico: Existen ejemplos clásicos de problemas que pueden ser resueltos mediante optimización combinatoria, destacando el problema de cobertura de conjuntos mínimos y el problema de búsqueda de cobertura máxima, asociados a métodos heurísticos y sus técnicas estocásticas para soluciones optimizadas.

Método: Técnicas de optimización combinatoria en la búsqueda de la solución óptima mediante métodos heurísticos y estocásticos aplicados a problemas de asignación-ubicación y cobertura de centros de instalaciones.

Resultados y Discusión: Al final del proceso, el algoritmo define un conjunto de coordenadas cartesianas de los centros de los círculos de cobertura de la región plana, las cuales cubrirán los demás puntos que reciben los servicios, resultando un área amplia de forma maximizada.

Implicaciones de la investigación: Debido a su versatilidad y bajo costo computacional, este algoritmo demostró desempeño en la búsqueda de facilidades para determinar centros que cubran el máximo de una región plana. Como trabajo futuro, este algoritmo puede aplicarse en investigaciones en otras áreas y problemas clásicos en la literatura.

Originalidad/Valor: Este algoritmo puede ser aplicado a diversas áreas en la búsqueda de ubicación y mapeo geográfico, ya que una característica importante de este algoritmo, además de su respuesta numérica, es la generación de gráficos, facilitando la visualización de la ubicación de la cobertura de las instalaciones.

Palabras clave: Heurística, Investigación de Operaciones, Problema de Localización, Optimización Combinatoria.

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma metodologia eficaz baseada em heurística, para determinar a alocação-localização de centros de facilidades, cobrindo ao máximo os pontos de uma área específica (Xiao, 2003). Para isso, o método será descrito e seu mecanismo de busca demonstrando através de testes utilizando algumas instâncias como prova de seu desempenho, e finalizando com os resultados numéricos e gráficos para conclusão de sua eficiência. Esta heurística tem como estrutura principal, um algoritmo de busca através de otimização combinatória que produz soluções eficientes, com tempo de processamento relativamente curto e baixo esforço computacional. Técnicas de otimização combinatória

(Goldbarg e Luna, 2000), são alternativas eficazes, que através de testes sucessivos, buscam resultados mais próximos da solução ótima, sendo que na maioria das vezes atingem seus objetivos. Metodologias empregadas neste trabalho e na maioria dos casos, utilizam rotinas recorrentes, que através de tentativas, consomem um número grande de execuções, que com uma plataforma computacional favorável, permitem que os resultados convirjam a valores satisfatórios. Existem exemplos clássicos de problemas que podem ser solucionados por otimização combinatória, como o problema do caixeiro viajante, o problema da mochila, o problema da cobertura mínima por conjuntos, o problema do corte, incluindo o problema de localização de máxima cobertura, objeto deste trabalho, dentre outros (Goldbarg e Luna, 2000). Apesar do grande esforço requerido do sistema, os códigos são compostos por operações modestas, porém estratégicas.

Por fim, uma metodologia heurística associada à otimização combinatória pode resultar em um tempo razoável de processamento, com uma qualidade próxima à solução ótima, que dentro das tolerâncias impostas, satisfaz aos objetivos. Por essas razões, neste trabalho foi utilizado um método heurístico para seleção dos centros de facilidades para solução do Problema de Localização de Máxima Cobertura (PLMC) (Church e Reville, 1974). Além da localização, este método deve também cobrir a região por círculos de forma maximizada em uma região plana. Problemas de localização e cobertura são na maioria das vezes úteis na escolha de centros de facilidades para serem instalados atendendo ao máximo possível suas demandas (Arakaki, R. G. I, 2003). Pode-se considerar como exemplos de centros de facilidades, torres de comunicação de telefonia celular, postos de saúde, armazéns, portos, ou quaisquer centros de distribuição bens ou serviços, seja público ou privado, que atenda a uma determinada demanda.

2 PROBLEMA DE COBERTURA

Considere um conjunto de pontos em R^2 de coordenadas (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, que devam ser atendidos em alguma demanda pela localização de P facilidades (pontos de suprimentos). Considere também que, a cada um destes pontos, está associada uma determinada distância euclidiana d_{ij} , representando o afastamento físico entre a localização do ponto de demanda i e o ponto de suprimento (facilidade) j . A função objetivo da cobertura máxima para o problema no plano R^2 pode ser expressa da seguinte forma:

$$\text{Maximizar} \quad Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \quad (1)$$

Sujeito a:

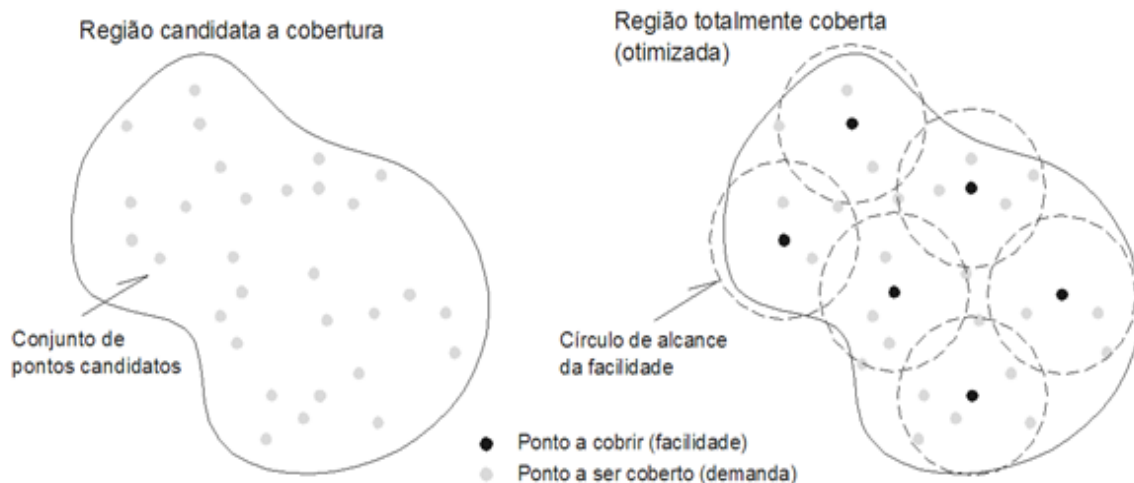
$$\sum_{j \in N} y_j = P \quad a_{ij}, y_j \in \{0,1\}, \forall_i, \forall_j$$

Onde:

n = número de pontos candidatos, e $N = \{1,2,...,n\}$ é o conjunto dos pontos candidatos a serem ocupados pela localização de uma posição de suprimento ou demanda, $a_{ij} = 1$ se a distância $d_{ij} \leq r$ e 0, caso contrário, e $y_j = 1$ se o ponto ocupado pela localização de uma facilidade, e 0, caso contrário. A figura a seguir ilustra uma área antes e após a cobertura por círculos de facilidades, atendendo aos pontos de demanda.

Figura 1

Região plana e conjunto de pontos candidatos.



Fonte: Silva (2006).

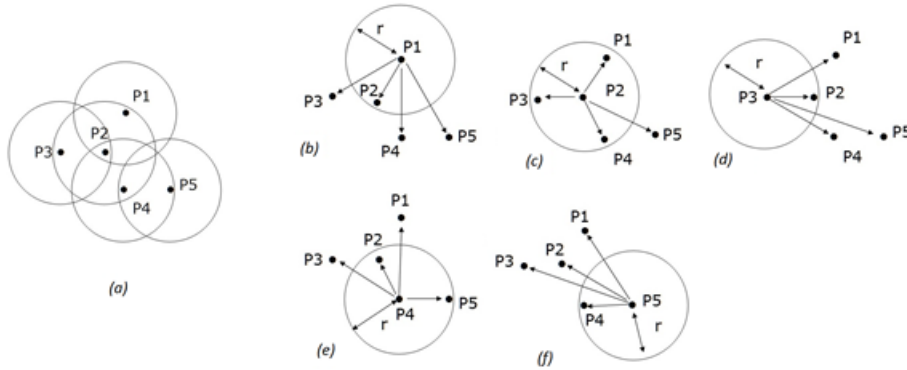
3 O ALGORITMO

Considere inicialmente um grafo $G(V,E)$ completo, onde $V = \{1,2,...,n\}$, é o conjunto dos pontos candidatos à instalação dos centros de P facilidades, onde P é um subconjunto de V e $E = \{1,2,...,m\}$, onde $m = \{n(n-1)/2\}$, é o conjunto das arestas representando todas as distâncias d_{ij} entre um vértice i para outro vértice j . Logo, para cada vértice i selecionado, existe $n-1$ distâncias entre os demais vértices. Porém, como há um raio de alcance de cobertura para cada ponto candidato a centro de facilidade, só pode existir aresta com valor menor que R (raio de alcance da facilidade). Desta forma, para cada vértice selecionado pode haver um ou mais pontos candidatos a receber o serviço dentro de um raio de cobertura, cujo centro do círculo é

definido pelas coordenadas do vértice i , ponto candidato a instalação de um centro de facilidade. A figura abaixo ilustra um caso contendo cinco pontos candidatos e dois centros de facilidades.

Figura 2

Conjunto de pontos candidatos e suas respectivas coberturas individuais.



Fonte: Autor (2018).

Observe que na Figura 2-a todos os cinco pontos estão com seus respectivos raios de cobertura destacados, porém, neste caso, somente os pontos P_2 e P_4 ou P_2 e P_5 são necessários para cobrir todos os cinco pontos, ou seja, dois pontos de demanda podem atender todos os demais pontos. Logo, recorrendo à formulação (1), e expandindo seus somatórios tem-se:

$$\begin{aligned}
 Z = & (a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}) y_1 + (a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25}) y_2 \\
 & + (a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{35}) y_3 + (a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44} + a_{45}) y_4 \\
 & + (a_{51} + a_{52} + a_{53} + a_{54} + a_{55}) y_5 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Aplicando as condições das variáveis a_{ij} e y_i na equação (2), isto é, quando a distância do ponto P_j é menor que o raio do círculo de centro no ponto P_i , $a_{ij} = 0$, caso contrário, $a_{ij} = 1$.

$$\begin{aligned}
 Z = & (0 + 1 + 0 + 0 + 0) y_1 + (1 + 0 + 1 + 1 + 0) y_2 + (0 + 1 + 0 + 0 + 0) y_3 \\
 & + (0 + 1 + 0 + 0 + 1) y_4 + (0 + 0 + 0 + 1 + 0) y_5 \quad (3)
 \end{aligned}$$

A equação (3) resulta em (4) onde cada variável y_i tem um coeficiente associado que indica o número de pontos internos que cada ponto candidato à facilidade pode cobrir.

$$Z = y_1 + 3 y_2 + y_3 + 2 y_4 + y_5 \quad (4)$$

A partir daí, basta identificar o ponto y_j de maior cobertura, que conforme a equação (4), é o coeficiente da variável y_2 , ou seja, o ponto P_2 é escolhido como primeiro ponto de facilidade. Uma vez definido o primeiro ponto de facilidade, ele e seus pontos interiores são eliminados da equação, visto que já foram definidos. Aplicando a mesma regra, resta apenas o P_5 , que será o próximo ponto a ser escolhido como a segunda e última facilidade deste exemplo. No caso de instâncias com mais pontos, esta rotina recorre até que se tenham todos os pontos cobertos com o número de P facilidades desejadas. Analisando o problema em termos do Grafo $G(V,E)$, a matriz de adjacência gerada pelo conjunto V , é então transformada numa matriz binária, onde o valor “um” representa a existência de uma distância (aresta) menor que o raio R , de um ponto i a um ponto j , e zero caso contrário. Em outras palavras, para um dado vértice i existe um ou mais vértices j adjacentes com arestas menores ou iguais a R , caso contrário, não há conexão entre eles. Assim, a matriz adjacência é uma matriz binária especial, denominada de matriz de alcances A , de ordem $n \times n$, onde n é o número de elementos de V . Na Figura 3 pode-se observar estas características, onde as variáveis y_1 a y_5 representam os centros de cada círculo, e as variáveis P_1 a P_5 , os pontos que pertencem a cada círculo, quando o valor é um, e zero quando não pertence, e à esquerda, o vetor coluna com o somatório do número de pontos internos de cada círculo.

Figura 3

Matriz binária especial e vetor somatório dos valores de suas linhas.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Somatório dos pontos
y_1	0	1	0	0	0	1
y_2	1	0	1	1	0	3
y_3	0	1	0	0	0	1
y_4	0	1	0	0	1	2
y_5	0	0	0	1	0	1

Fonte: Autor (2018).

Conclui-se então que a soma dos elementos de suas linhas (para uma mesma linha) determina o número de pontos candidatos j para cada ponto i . Para isso, um vetor coluna S , foi definido como a lista de valores dos totais de pontos j cobertos por cada ponto i . Por exemplo, na Figura 3, a segunda linha informa que o ponto P_2 (em destaque) cobre outros três pontos dentro de seu raio de alcance, que são os pontos P_1 , P_3 e P_4 . Uma busca do maior valor deste vetor resulta na definição do primeiro ponto i candidato a receber o título de primeiro ponto de facilidade. Em seguida, os valores referentes a este ponto são excluídos da matriz A e nova busca é executada até a determinação do último ponto de facilidade, gerando o conjunto de pontos de facilidades.

Este processo é recorrente e termina quando atinge o número de P facilidades desejadas. A seguir é mostrado o pseudocódigo do algoritmo do método heurístico. Neste trabalho, os dados foram dispostos em uma estrutura de planilha, onde as colunas representam as coordenadas cartesianas de cada ponto (x_k, y_k) , $(k = 1, 2, \dots, n)$ candidato à facilidade. A princípio todo ponto é candidato à facilidade, caso não seja escolhido, o ponto é definido com ponto de demanda, e deve ser coberto por algum círculo de raio R de um ponto de facilidade. Inicialmente, o algoritmo lê o número de facilidades desejadas e seu raio de cobertura e, a partir das coordenadas dos n pontos candidatos, o algoritmo resulta em um conjunto das coordenadas das P facilidades desejadas, para cobrir a área total onde os n pontos estão localizados.

Figura 4

Pseudocódigo do algoritmo heurístico

```
Início Algoritmo
  Entrada de dados
  Ler raio  $R$ , nº de facilidades  $P$ 
  Ler vetor de dados das coordenadas  $x, y$  dos ponto candidatos
  Definir o vetor  $F$  (facilidades)
  Definir a matriz  $D$  (distâncias  $d_{ij}$ )
  Definir o vetor linha  $Y$  (variáveis referentes aos pontos candidatos)
  Definir matriz  $A$  binária onde:  $a_{ij} = 1$  para  $a_{ij} \leq \text{raio}$ ,  $a_{ij} = 0$  caso contrário
  Definir  $S$  = vetor coluna soma das linhas da matriz  $A$ 
  Faça  $Z = Y \times S$  (produto do vetor  $Y$  pelo vetor  $S$ )
  Para  $k = 1$  até  $P$  faça
    Escolha o maior coeficiente de  $y$  (variável referente ao ponto candidato a facilidade)
    Inclua  $y$  no vetor Facilidades
    Zerar todas as variáveis dos pontos cobertos por  $y$ 
    Se não existem mais pontos então Fim
  Fim Para
  Cálculo do valor de  $Z$  (função objetivo)
  Imprimir  $Z$ , Demanda, Facilidades
  Plotagem dos Gráficos
Fim Algoritmo
```

Fonte: Autor (2018).

4 APLICAÇÃO

Para determinar a localização adequada quando se pretende implantar um ou mais centros de fornecimento de bens e serviços (facilidades), existem diversas técnicas de alocação ótima que culmina em soluções viáveis, ou aproximadas, mas que atendem aos objetivos do problema. Na maioria das vezes, pretende-se localizar centros de facilidades a partir de um

conjunto de pontos candidatos, que podem representar as coordenadas geográficas ou endereço físico para futuras instalações destes centros.

Como exemplos, podemos citar o problema da localização de torres de telefonia móvel para cobrir uma região com seus sinais, a escolha de uma região para implantação de um centro de distribuição de serviços, shopping centers, depósitos de mercadorias, hospitais, pontos de ônibus, escolas, localização de fábricas, postos de saúde, lojas de franquias, ou outro tipo de centro que deve ser definido a partir de um número n de pontos candidatos, e que possuam um raio de alcance, totalizando a cobertura de uma região de forma maximizada.

Neste trabalho, para demonstrar o comportamento do algoritmo, testes foram executados a partir de instâncias contendo número de pontos variados, e raios diversos.

5 TESTES E RESULTADOS

Para atender aos requisitos do problema e testes do algoritmo, foi necessário um banco de dados com as coordenadas geográficas. Este algoritmo permite a conexão com este banco de dados, onde se realiza uma busca para determinar regiões específicas para implantação destes centros de facilidades.

A princípio supõe-se que existe a necessidade de instalação de centros de facilidades para cobrir uma determinada região. Utilizou-se de coordenadas geográficas de cidades do estado de Minas Gerais e do Rio de Janeiro, como simulação para implantação de algum tipo de serviço hipotético, onde se maximiza o número de pontos por círculo, conforme os exemplos citados anteriormente.

Neste caso, considerou-se como critério, a maior cobertura possível, de forma a atender, ou cobrir, o máximo possível dos pontos de demanda. É importante ressaltar que os testes foram executados no Matlab.

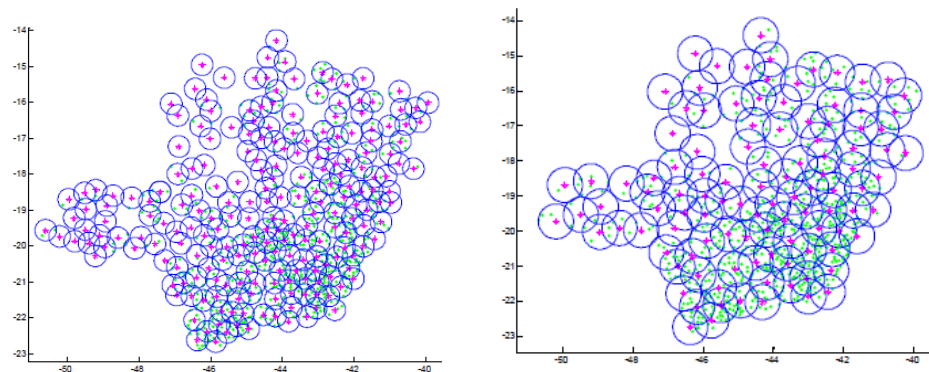
5.1 INSTÂNCIA 1

Esta instância envolve 854 cidades do Estado de Minas Gerais, onde as coordenadas geográficas representam o centro dos pontos candidatos, que por fim, o algoritmo definiu um grupo de pontos de facilidades com maior cobertura. A Figura 6 representa uma cobertura parcial com raios variados. Observando que a região sul/sudeste de Minas Gerais é mais urbana,

ou seja, existe uma concentração maior de cidades em relação ao norte e triângulo mineiro, justificando a ocorrência de uma maior cobertura.

Figura 5

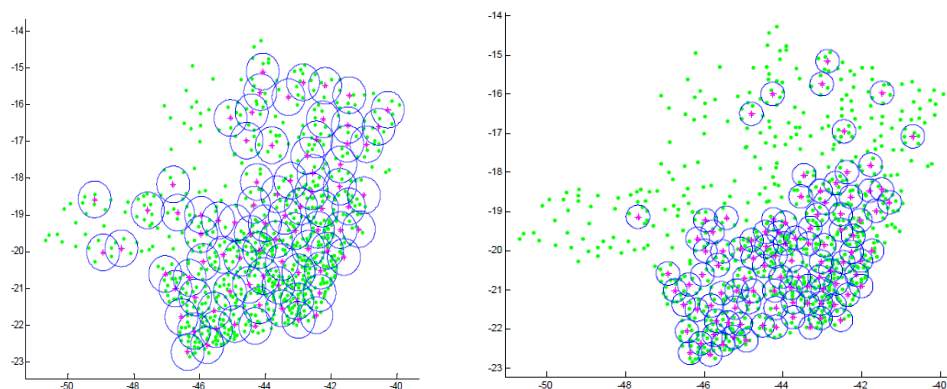
Cobertura total de 854 cidades com 220 facilidades de raio 30 Km (esquerda) cobrindo e 108 facilidades de raio 50 Km (direita).



Fonte: Silva (2006).

Figura 6

Cobertura parcial, com 80 facilidades de raio 50 Km (esquerda), cobrindo um número de 801 pontos e, com 100 facilidades de raio 30 Km, cobrindo um número de 644 pontos.



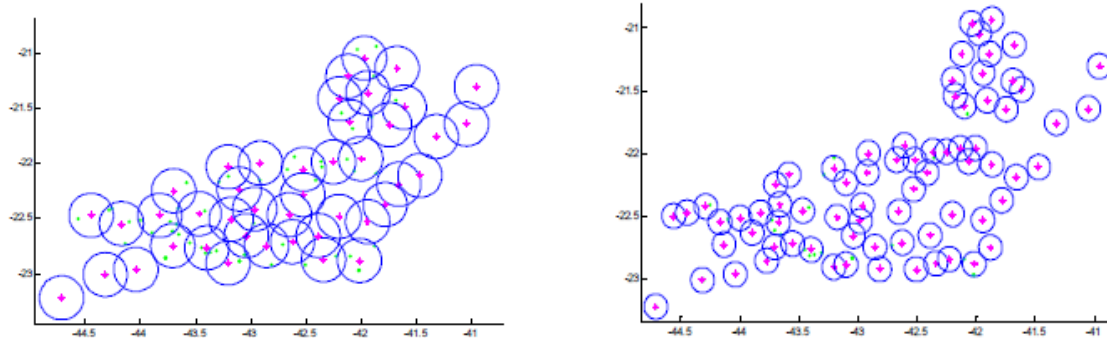
Fonte: Silva (2006).

5.2 INSTÂNCIA 2

Esta instância representa 92 cidades do Estado do Rio de Janeiro, onde foram testados raios distintos coma cobertura total do estado.

Figura 7

Cobertura total: 73 facilidades de raio 10 Km cobrindo 92 cidades (esquerda), e 43 facilidades de raio 20 Km cobrindo 92 cidades.



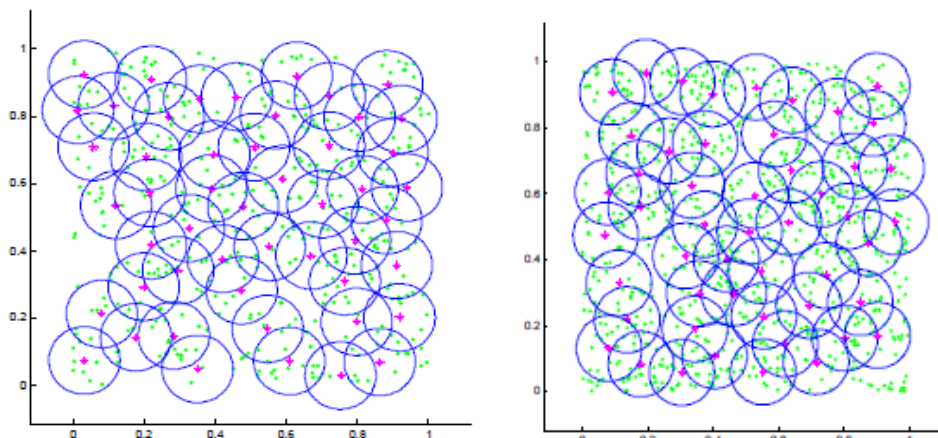
Fonte: Silva (2006).

5.3 INSTÂNCIA 3

Para testar o tempo de processamento, foi criada uma instância com pontos aleatórios em uma área, com 500, 1000, 2000 e 3000 pontos cada.

Figura 8

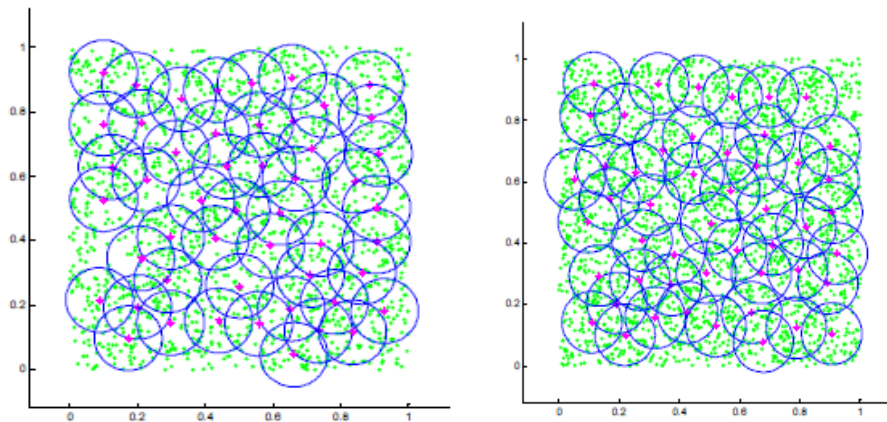
500 pontos aleatórios, 50 círculos de raio 10, tempo de 5,04 segundos, 1000 pontos aleatórios, 50 círculos de raio 10, tempo de 39,65 segundos.



Fonte: Silva (2006).

Figura 9

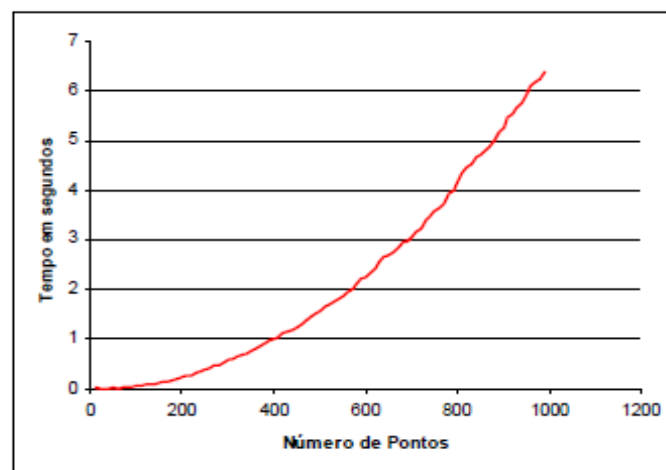
2000 pontos aleatórios, 50 círculos de raio 10, tempo de 339,63 segundos, 3000 pontos aleatórios, 50 círculos de raio 10, tempo de 1042,60 segundos.



Fonte: Silva (2006).

Figura 10

Curva de resposta do tempo de processamento.



Fonte: Silva (2006).

6 CONCLUSÃO

Conclui-se que o presente algoritmo demonstrou desempenho na busca de facilidades para determinação de centros destinados a prover serviços e bens. O algoritmo utilizou de técnicas heurísticas resultando em soluções viáveis satisfatórias, e com um tempo de computação razoável. Em instâncias maiores, o algoritmo também se comportou de forma eficiente, podendo ser expandido para maiores aplicações.

A estrutura de dados é flexível, pois permite a conexão com planilhas para leitura de dados, como no caso das coordenadas geográficas das cidades utilizadas nas instâncias. É também possível incorporar a esta planilha valores ou pesos associados a cada ponto candidato, como população, ou outro fator que se queira mapear (Guedes, 2000). Portanto, para próximos trabalhos, este algoritmo poderá ser aplicado a diversas áreas na busca de localização e mapeamento geográfico. Por fim, uma característica importante deste algoritmo, além de sua resposta numérica, está nos relatórios gráficos, que com o auxílio de uma interface gráfica, no caso o Matlab, facilitou a visualização da localização da cobertura das facilidades.

REFERÊNCIAS

- Arakaki, R. G. I. (2003) Heurística de localização-alocação para problemas de localização de facilidades. Tese (Doutorado em Computação Aplicada) São José dos Campos: INPE.
- Goldbarg, M. C., Luna, H. P. L. (2000), Otimização Combinatória e Programação Linear, Modelos e Algoritmos, Rio de Janeiro, Campus.
- Guedes, L. B. Uma Proposta de Análise para Informações de Mercado e Demanda através de Mapeamento Temático; 2000; 50 f; Monografia; Universidade Federal de Minas Gerais.
- Silva, M. R. (2006) O problema da cobertura máxima por círculos numa região plana: uma abordagem heurística aplicada à telefonia celular. Tese (Mestrado em Engenharia de Produção) Campos dos Goytacazes: UENF.
- Church e C. Reville, R. The maximal covering location problem. Papers of the Regional Science Association, 32:101–118, 1974.
- Xiao B., Zhuge Q., He Y., Shao Z., Sha E. (2003). Algorithms for Disk Covering Problems with the Most Points, Department of Computing. The International Association of Science and Technology for Development (IASTED), International Conference of Parallel and Distributed Computing and Systems (PDCS)