





## Deuda externa y crecimiento económico. Una calibración para México

Enrique R. Casares  - Universidad Autónoma Metropolitana, México  
María Guadalupe García-Salazar  - Universidad Autónoma Metropolitana, México  
Leobardo Plata-Pérez<sup>1</sup>  - Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México  
José Manuel Ramos-Varela  - Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México

### Resumen

Objetivo: Se aplica el modelo de Blanchard (1983) para México. Se analiza la acumulación de la deuda externa y su sostenibilidad. Metodología: Se calibra el modelo para el año 2019. Utilizando el método de eliminación del tiempo, se determinan los brazos estables del modelo. Resultados: Se realizan tres simulaciones que promueven la producción. Primero, un aumento en la productividad produce que la Proporción Deuda Externa/PIB (PDEPIB) aumente al 26.9%. Segundo, una disminución de la tasa de crecimiento de la población produce que la PDEPIB se incremente ligeramente. Tercera, una disminución de la Tasa de Interés Internacional (TII) produce un gran aumento en PDEPIB, al 44.01%, nivel sostenible. Se muestra que PDEPIB es muy sensible a la TII, que puede producir sobreendeudamiento. Recomendaciones: La sensibilidad de PDPIB a la TII, nos pone en aviso de tener políticas macroeconómicas prudentes. Limitaciones: los hogares carecen de restricciones al crédito internacional. Originalidad: Esta metodología no ha sido aplicada a México. Conclusiones: Los ciclos económicos por los cuales transita la producción y la deuda externa de México, van aparejados con la variación de la TII, sobreendeudamiento siempre estará presente.

Clasificación JEL: C51, C53, F41, O47.

Palabras clave: Economía Abierta, Crecimiento Económico, Cuenta Corriente, Deuda Externa.

## External Debt and Economic Growth. A Calibration for Mexico

### Abstract

Objective: we apply Blanchard's model (1983) to Mexico. We analyze the accumulation of external debt and its sustainability. Methodology: We calibrate the model for the year 2019. Using the time elimination method, we determine the stable arms of the model. Results: we present three simulations that promote production. First, an increase in productivity causes the Proportion of External Debt/GDP (PEDGDP) to rise to 26.9%. Second, a decrease in the population growth rate causes the PEDGDP to increase slightly. Third, a decrease in the International Interest Rate (IIR) produces a large increase in PEDGDP, to 44.01%, sustainable level. We show that PEDGDP is very sensitive to IIR, which can produce over-indebtedness. Recommendations: the sensitivity of PDPIB to the IIR puts us on notice to have prudent macroeconomic policies. Limitations: the households lack restrictions on international credit. Originality: This methodology has not been applied to Mexico. Conclusions: The economic cycles through which production and external debt of Mexico, pass go hand in hand with the variation of the IIR, over-indebtedness will always be present.

JEL Classification: C51, C53, F41, O47.

Keywords: Open Economy, Economic Growth, Current Account, External Debt.

<sup>1</sup> Autor de correspondencia. Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Facultad de Economía. Email: [iplata@uaslp.mx](mailto:iplata@uaslp.mx)

\* Se reconoce el apoyo financiero del CONACYT, proyecto número A1-S-25426, "Perturbaciones en los términos de intercambio, la política comercial y la política fiscal y su impacto en la economía mexicana: el corto y largo plazo".

## 1. Introducción

En los últimos años la economía mundial se ha reestructurado. El tema del ritmo de crecimiento siempre está presente, el futuro siempre genera preocupación por los nuevos problemas macroeconómicos en el entorno de la globalización. Para un gobierno, no solo importa conocer las variables que influyen directamente en el crecimiento del PIB per cápita, sino más importante aún, analizar el comportamiento de estas variables a largo del tiempo. Ello le permite diseñar e implementar las estrategias necesarias para conseguir los objetivos previstos en sus metas de crecimiento económico. El tema central del presente trabajo es analizar la dinámica de transición del crecimiento del PIB per cápita de México y su relación con la deuda externa per cápita, vista a través de un modelo macroeconómico de crecimiento para una economía abierta. Los modelos realizados por Blanchard son piedra angular en esta teoría y se analizan para llevar a cabo esta investigación. Se analiza y proyecta el crecimiento económico de México en el largo plazo, considerando los flujos externos de capital, de bienes y servicios, reflejados a través de la deuda externa y el déficit en la cuenta corriente.

Blanchard (1983) estudia la sustentabilidad del déficit de la cuenta corriente y por ende de la deuda externa de la economía brasileña. Utilizando un modelo intertemporal de ahorro e inversión calibrado para la economía brasileña, Blanchard (1983) realiza varias simulaciones y concluye que el déficit de la cuenta corriente es sostenible. Sin embargo, si un país desea reducir su déficit en su cuenta corriente es preferible disminuir el gasto en consumo que el de la inversión.<sup>2</sup> Asimismo, de Carvalho y Salomão (2007) actualizan la aplicación para Brasil del modelo de Blanchard (1983). Esta metodología se ha aplicado a varios países, sin embargo, no ha sido aplicada a la economía mexicana. Por tanto, en este artículo se calibra el modelo de Blanchard (1983) y Blanchard y Fischer (1989) para el caso de México y se realizan simulaciones de como la economía responde a cambios en sus parámetros.

Los datos utilizados en la calibración del modelo son obtenidos del Penn World, versión 10.0, Banco Mundial e INEGI. Primero, se calibra el modelo intertemporal de ahorro e inversión para el año base de 2019. Se determinan los auténticos brazos estables no lineales del modelo por medio del método de eliminación del tiempo (Mulligan y Sala-i-Martin, 1991 y 1993). Así como los brazos estables lineales. Se realizan varias simulaciones, moviendo parámetros, como un aumento en la productividad, una disminución en la tasa de crecimiento de la población y una disminución en la tasa de interés internacional. Se analiza como la economía responde a estos cambios en los parámetros y se observa la trayectoria en el tiempo del precio de mercado por unidad del capital instalado, de la relación capital-trabajo, del consumo per cápita, del ingreso per cápita, de la cuenta

---

<sup>2</sup> El modelo y aplicación de Blanchard (1983) realiza un análisis sobre el endeudamiento externo de Brasil en los años ochenta y realiza una proyección para esta hasta el 2020. En esa década la deuda/PIB de Brasil rondaba el 35% y su déficit en la cuenta corriente como proporción del PIB del 5%. El objetivo de su investigación era conocer si estos valores eran sostenibles a largo plazo. Los resultados sugieren que el porcentaje de la deuda adquirida para consumo se debe reducir y el porcentaje utilizado en inversión aumentar, con el fin de evitar una reducción en el consumo futuro. Otro resultado importante es respecto a la fortaleza en la solvencia en el déficit de la cuenta corriente, acorde al análisis, Brasil no presenta una proyección problemática en este rubro, es sostenible el déficit mencionado.

corriente y de la deuda externa per cápita. Como no se considera el progreso técnico exógeno, que es arbitrario, se analizan solamente los efectos nivel sobre las variables endógenas.

En particular, en el estado estacionario, cuando la productividad aumenta un 1%, el ingreso per cápita aumenta un 1.61% y la proporción deuda externa a PIB aumenta del 19.3% (nivel del año base) al 26.9%. Así, los incrementos de la productividad dan un aumento aceptable del ingreso per cápita y la proporción deuda externa a PIB se mantiene a un nivel sostenible, como se verá en la próxima sección, en el resumen de la literatura. Ahora, cuando la tasa de crecimiento de la población disminuye del 1% (año base 2019) al 0.5% anual (debido a la transición demográfica), el ingreso per cápita aumenta ligeramente en un 0.08% y la proporción deuda externa a PIB aumenta ligeramente a un 20.6%, nivel sostenible.

También, cuando la tasa de interés mundial disminuye del 3% (nivel del año base) al 2.75%, se da un aumento del ingreso per cápita del 1.98%, pero la proporción deuda externa a PIB aumenta a un 44.01% (un incremento del 128% respecto al año base), todavía un nivel sostenible. Sin embargo, la deuda externa per cápita es extremadamente sensible a variaciones en la tasa de interés internacional y la tasa de depreciación del capital (véase de Carvalho y Salomão, 2007). Así, la proporción deuda externa a PIB fácilmente puede situarse en el nivel de sobreendeudamiento y perjudicar el funcionamiento de la economía. Por ejemplo, cuando la tasa de interés internacional disminuye del 3 al 2%, la proporción deuda externa a PIB aumenta a un 118.4%, nivel claramente insostenible para países en desarrollo. En términos generales, la dinámica de transición consiste en un cambio instantáneo del precio de mercado de una unidad de capital, estimulando la inversión y la acumulación del capital. Mientras, que la cuenta corriente y la dinámica de la deuda per cápita están definidos por el consumo per cápita y el movimiento en el tiempo del ingreso neto.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2, se presenta un breve resumen de la literatura. En la sección 3, se presenta y se soluciona el modelo. En sección 4 se deduce analíticamente el estado estacionario. En la sección 5, se presenta la calibración y la solución numérica en el estado estacionario. En la sección 6, se estudia las propiedades dinámicas del modelo. En la sección 7, se presentan las simulaciones. Mostrando la dinámica de transición del precio de mercado por unidad del capital instalado y del capital per cápita. Además, el nivel del consumo per cápita en el estado estacionario y la dinámica de transición del producto neto y de la deuda externa per cápita. Finalmente, en la sección 8, se dan las conclusiones.

## 2. Resumen de la literatura

Wright y Grenade (2014) introducen una adhesión al modelo de Blanchard (1983). Ellos introducen el gasto público que es exógeno. Estiman la proporción óptima deuda/PIB para un conjunto de 13 países caribeños. Región que posee algunos de los países más endeudados del mundo, con una proporción promedio deuda/PIB de 114%. Analizan la proporción óptima deuda/PIB con la finalidad de identificar el umbral donde el endeudamiento perjudica el crecimiento económico. Estos autores toman como punto de partida el trabajo de Greenidge, Craigwell, Thomas y Drakes (2012) que señalan que un nivel deuda/PIB menor al 30% no perjudica el crecimiento económico, mientras que un porcentaje mayor al 55% empieza a ser problemático para el crecimiento. Uno de los hallazgos más significativos de Wright y Grenade (2014) es que determinan una relación no lineal entre deuda y crecimiento. La proporción óptima deuda/PIB encontrada en la investigación es del 61% para los

países analizados; más allá de este valor, la deuda tiene un impacto negativo sobre la economía. Para el caso latinoamericano, Gil-León, Rosso-Murillo y Ramírez-Hernández (2019) muestran que cuando la proporción deuda pública a PIB pasa del 75% produce una desaceleración en el crecimiento. También, Eberhardt y Presbitero (2015) encuentran evidencia para una relación negativa entre la deuda y el crecimiento para 118 países, pero no hay un umbral común de la deuda.

El tema de sobreendeudamiento, en presencia de desinflación e incluso deflación, ha sido estudiado para países de la zona europea a partir de la crisis 2008-2009 en el trabajo de Ekkehard, Semmler y Haider (2017). Ellos afirman que el sobreendeudamiento crea tensión en los mercados financieros, produciendo que se eleven las tasas de interés real, debido a la desinflación y deflación, mientras que el crecimiento y el ingreso disminuyen, se agraven los problemas de apalancamiento y que una economía pueda caer en la insolvencia con un alto estrés financiero. Los autores exponen la posibilidad de efectos adversos debido a la presencia de dinámicas con circuitos de retroalimentación cada vez mayores. Se observan dinámicas inestables y espirales descendentes en presencia de los bucles de retroalimentación. El análisis teórico es acompañado de un análisis econométrico a través de un modelo VAR de múltiples regímenes, lo que les permite examinar los factores de riesgo deflacionario y financiero.

También, las consecuencias del endeudamiento, en países abundantes en materias primas, es analizada en Nyambu y Semmler (2017). Cuando hay un auge en el precio de los recursos naturales, los países pueden expandir su sector real y acceder a créditos que permiten endeudamientos excesivos. Cuando hay una caída en el precio de los recursos naturales, disminuyen los ingresos por exportaciones y aparece el riesgo de incumplimiento e inestabilidad macroeconómica. Estos autores, a través de un modelo de crecimiento dinámico, descubren que cuando la razón deuda externa/capital se eleva de cierto umbral, la dinámica cambia de estable a inestable. Además, encuentran primas de riesgo específicas asociadas con auges y caídas. Encuentran que los países exportadores de petróleo tienen un mayor peligro de sufrir crisis de deuda externa.

En Semmler y Tahri (2017) se analiza el efecto de la deuda en la dinámica inversión-consumo para el caso de la deuda externa de Italia, España y Alemania. Para estudiar la dinámica de la sostenibilidad de la deuda utilizan el cociente deuda externa/activos en lugar de la medida tradicional deuda externa/PIB. Utilizando un modelo intertemporal de tiempo finito, encuentran que Italia y España se dirigieron lentamente hacia una crisis de deuda, mientras que Alemania se movió hacia un entorno de estabilidad.

Recientemente, utilizando en parte el modelo de Blanchard y Fischer (1989), Alogoskoufis (2021) analiza la dinámica de la cuenta corriente en su transición hacia el crecimiento equilibrado. La apertura financiera, con compromiso para asegurar el pago de la deuda externa, permite que países pobres y ricos aprovechen la apertura al comercio internacional mutuamente beneficioso. Sin embargo, aparecen asimetrías, los países pobres presentan un menor consumo en el estado estacionario, debido al pago de la deuda externa acumulada en la transición, que los países ricos. Con ausencia de compromiso para asegurar el pago, pueden aparecer inconsistencias intertemporales.

### 3. Un modelo de crecimiento económico para una economía abierta

El modelo que se desarrolla en este trabajo se encuentra basado en Blanchard y Fischer (1989), en donde se añaden dos parámetros: la tasa de crecimiento de la población,  $n$ , y la tasa de depreciación del capital físico,  $\delta$ . Como suponer cualquier tasa de crecimiento exógena del progreso técnico nos daría una senda de crecimiento arbitraria, se optó por suponer que la tasa de crecimiento del progreso tecnológico es cero. Por tanto, a cambios en los parámetros, se analiza solamente el efecto nivel de las variables endógenas. El modelo refleja una pequeña economía abierta. Las variables se encuentran en términos per cápita y se considera que la fuerza de trabajo es igual a la población. Tanto el modelo original de Blanchard y Fischer (1989) como el desarrollado aquí son con horizonte infinito y en tiempo continuo.

El modelo se desarrolla con el concepto de economía centralizada o la de un planificador benevolente; cuyo objetivo es maximizar el valor presente de las utilidades  $u[c(t)]$ , donde  $c(t)$  es el consumo per cápita correspondientes al periodo  $t$  (se omitirá el índice  $t$  por legibilidad). La utilidad se descuenta a una tasa subjetiva,  $\rho$ , esto debido al egoísmo de los individuos por consumir en su periodo de vida, en vez de heredar riqueza a sus hijos. A diferencia de una economía cerrada, se permite un déficit en la cuenta corriente financiado por deuda externa, a la tasa de interés mundial. El déficit en la cuenta corriente se refleja en un incremento de la deuda externa per cápita. Es decir, los individuos pueden tener un consumo per cápita mayor que en una economía cerrada endeudándose con el exterior. También, la inversión total per cápita,  $i$ , puede ser costada por el ahorro externo. El nivel de  $i$  es igual a la inversión neta más la depreciación. La inversión neta per cápita es el nuevo capital neto, añadido al acervo existente de capital en un periodo de tiempo determinado y se define como  $\dot{k} = dk/dt$ , donde  $k$  es el capital por trabajador. El capital se deprecia a la tasa  $\delta + n$ . La inversión total  $i$  incurre en costos de instalación  $\Phi(i/k)$ .

Para fines de simulación usaremos una función de utilidad logarítmica,  $u(c) = \ln c$  y una función de producción per cápita Cobb-Douglas,  $y = Ak^\alpha$ , donde  $y$  es el ingreso per cápita,  $A$  es la productividad,  $k$  es el capital per cápita y  $\alpha$  son pagos al capital respecto al PIB. El costo de instalación es  $\Phi = (\varepsilon/2)(i/k)$ , donde  $\varepsilon$  es un parámetro positivo. En el problema de maximización, las variables de decisión son el consumo per cápita,  $c$ , y la inversión total per cápita,  $i$ . Las variables de estado son la deuda externa per cápita,  $b$ , y la relación capital-trabajo,  $k$ . Por tanto, el problema de optimización del hogar-productor es:

$$\max U(0) = \int_0^{\infty} (\ln c) e^{-(\rho-n)t} dt \quad (1)$$

sujeto a la ecuación de recursos de la economía y a la ecuación de acumulación de  $k$ .

$$\dot{b} = (r^w - n)b + c + i \left[ 1 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{i}{k}\right) \right] - Ak^\alpha \quad (2)$$

$$\dot{k} = i - (\delta + n)k \quad (3)$$

donde  $\dot{b} = db/dt$  es el incremento en la deuda externa per cápita en el tiempo y  $r^w$  es la tasa de interés internacional. La economía parte con un capital per cápita positivo  $k(0) > 0$ . El hamiltoniano es:

$$H = \left\{ \ln c - \mu \left( (r^w - n)b + c + i + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{i^2}{k}\right) - Ak^\alpha \right) + \mu q [i - (\delta + n)k] \right\} e^{-(\rho-n)t}$$

donde  $-\mu e^{-(\rho-n)t}$  es la variable de coestado de  $b$  y  $\mu q e^{-(\rho-n)t}$  de  $k$ . Primero se determina la ecuación de Euler para el consumo per cápita. Las condiciones de primer orden son  $\partial H/\partial c = 0$  y  $d(-\mu e^{-(\rho-n)t})/dt = -\partial H/\partial b$  más la condición de transversalidad sobre  $b$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} -\mu b e^{-(\rho-n)t} = 0$ .

Utilizando las anteriores condiciones, se obtiene:

$$\frac{\dot{c}}{c} = r^w - \rho \quad (4)$$

En los modelos dinámicos para economías abiertas basados en el modelo de Ramsey, existe una complicación en el comportamiento de  $\dot{c}/c$ . Dado que  $r^w$  y  $\rho$  son constantes dadas, se puede dar el caso que  $r^w > \rho$ , lo cual implicaría que  $c$  y los activos netos per cápita crezcan indefinidamente. Por tanto, la economía empezaría a influir a la tasa de interés mundial, dejando de ser una pequeña economía abierta. Por el contrario, si  $r^w < \rho$ , el consumo per cápita tiende a cero y los activos netos per cápita tienden a un nivel negativo. En resumen, si  $r^w > \rho$  o si  $r^w < \rho$  se darían comportamientos anómalos. Para evitar esto, se tiene que la tasa de descuento  $\rho$  es igual a la tasa de interés internacional  $r^w$ ,  $r^w = \rho$ . Por tanto, la tasa de crecimiento del consumo per cápita es cero,  $\dot{c}/c = 0$ . Así, en esta economía abierta el hogar-productor suaviza perfectamente su consumo. El nivel de  $c$  se sitúa siempre en un estado estacionario y será constante para todo  $t$  (véase Heijdra y Van Der Ploeg, 2002 y Barro y Sala-i-Martin, 2004). El nivel de  $c^*$  de estado estacionario será definido más adelante (los niveles de estado estacionario se denotan con un \*).

Ahora se determina la inversión. Las condiciones de primer orden son  $\partial H/\partial i = 0$  y  $d(\mu q e^{-(\rho-n)t})/dt = -\partial H/\partial k$  más la condición de transversalidad sobre  $k$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu q k e^{-(\rho-n)t} = 0$ .

Utilizando estas condiciones, se obtiene:

$$q = 1 + \varepsilon \frac{i}{k} \quad (5)$$

donde  $q$  es el precio de mercado de una unidad de capital. Despejando  $i$ , se obtiene la teoría  $q$  de la inversión

$$i = \frac{(q-1)}{\varepsilon} k \quad (6)$$

la ecuación (6) establece que, si el valor de mercado de una unidad de capital es mayor que el precio de reposición, la inversión es positiva. Por medio de las condiciones de primer orden, también se obtiene:

$$r^w = \frac{A\alpha k^{\alpha-1} + (\varepsilon/2)(i/k)^2}{q} - \delta + \frac{\dot{q}}{q} \quad (7)$$

la ecuación (7) dice que  $r^w$  es igual al producto marginal del capital,  $A\alpha k^{\alpha-1}$ , más la reducción marginal de los costos de instalación,  $(\varepsilon/2)(i/k)^2$ , todo deflactado por  $q$ , menos la depreciación más las ganancias de capital,  $\dot{q}/q$ .

Para estudiar la dinámica de la inversión, es posible obtener un subsistema de ecuaciones diferenciales en  $k$  y  $q$ . Sustituyendo  $i$ , ecuación (6), en la restricción  $\dot{k} = i - (\delta + n)k$ , se obtiene:

$$\dot{k} = \left[ \frac{(q-1)}{\varepsilon} - (\delta + n) \right] k \quad (8)$$

Ahora, sustituyendo  $i$ , ecuación (6), en ecuación (7) y despejando  $\dot{q}$ , se obtiene:

$$\dot{q} = (r^w + \delta)q - A\alpha k^{\alpha-1} - \frac{(q-1)^2}{2\varepsilon} \quad (9)$$

Con este subsistema, ecuaciones (8) y (9), se determinan las trayectorias de  $q$  y  $k$  en el tiempo. Conociendo los niveles de  $q$  y  $k$  en el tiempo, es posible conocer las trayectorias de  $y$ , del consumo per cápita de estado estacionario, de la cuenta corriente y de  $b$ . Por tanto, integrando la ecuación (2), es posible determinar el nivel de consumo per cápita de estado estacionario como:

$$c^* = (r^w - n) \left\{ \int_0^\infty [Ak^\alpha - [(q-1)k/\varepsilon] \cdot [1 + (q-1)/2]] e^{-(r^w-n)t} dt - b(0) \right\} \quad (10)$$

Para el análisis de resultados, se define el ingreso nacional per cápita como  $y - (r^w - n)b$ . Dado que el ahorro per cápita,  $s$ , es la diferencia entre el ingreso nacional menos consumo, se tiene:

$$s = y - (r^w - n)b - c \quad (11)$$

Ahora, despejando  $c$  de la ecuación (2) y sustituyendo el resultado en  $s$ , ecuación (11), se obtiene:

$$\dot{b} = i + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{i^2}{k}\right) - s \quad (12)$$

la ecuación (12) establece que  $\dot{b}$  es igual a la diferencia entre la inversión total (con costo de instalación) y ahorro per cápita. Finalmente, el déficit de la cuenta corriente es igual al incremento de  $b$  en el tiempo,

$$\dot{b} = (r^w - n)b - nx \quad (13)$$

donde  $nx$  son las exportaciones netas per cápita.

Una vez conocidas las trayectorias  $q$  y  $k$ , se puede determinar  $c^*$ . Si definimos el producto neto como  $y_{neto} = Ak^\alpha - i[1 + (\varepsilon/2)(i/k)]$ , donde  $i$  está dada por ecuación (6). La cuenta corriente y la evolución de la deuda per cápita están determinadas por  $c^*$  y la evolución en el tiempo del  $y_{neto}$ . En resumen, con todo lo anterior nos permite determinar el comportamiento de esta pequeña economía abierta.

## 4. El estado estacionario analítico

Con  $\dot{k} = 0$  en ecuación (8), se obtiene el valor de  $q$  en estado estacionario

$$q^* = 1 + (\delta + n)\varepsilon \quad (14)$$

cómo se ve en la ecuación (14),  $q^*$  solo depende de parámetros. Además, observe que  $q^*$  es mayor que uno, ya que, en el estado estacionario, la inversión tiene que cubrir la depreciación.

Análogamente, sustituyendo la ecuación (14) en la ecuación (9), con  $\dot{q} = 0$ , se tiene

$$k^* = \left[ \frac{A\alpha}{(r^w + \delta)q^* - \frac{(q^* - 1)^2}{2\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (15)$$

Con  $\dot{k} = 0$  en ecuación (3), se obtiene el nivel de inversión total en el estado estacionario

$$i^* = (\delta + n)k^* \quad (16)$$

Considerando que, en el estado estacionario,  $\dot{b} = 0$ , de la ecuación (12), se obtiene

$$s^* = i^* + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{i^{*2}}{k^*}\right) \quad (17)$$

la ecuación (17) dice que en el estado estacionario el ahorro e inversión per cápita son iguales. Así mismo, con  $\dot{b} = 0$ , en  $\dot{b} = (r^w - n)b - nx$ , se tiene

$$(r^w - n)b = nx \quad (18)$$

es decir, en el estado estacionario el excedente comercial es igual al pago de intereses sobre la deuda externa. Por último, con  $\dot{b} = 0$  y la ecuación (2), se obtiene el nivel de la deuda externa per cápita en el estado estacionario



$$b^* = \frac{Ak^{*\alpha} - i^* - (\varepsilon/2)(i^*/k^*) - c^*}{(r^w - n)} \quad (19)$$

Sustituyendo la ecuación (16) en la expresión anterior, se tiene que

$$b^* = \frac{Ak^{*\alpha} - (\delta + n)k^* - (\varepsilon/2)(\delta + n)^2k^* - c^*}{(r^w - n)} \quad (20)$$

donde el nivel de consumo per cápita,  $c^*$ , está dado por la ecuación (10), la cual depende de las trayectorias de  $k$  y  $q$  en el tiempo y de parámetros.

## 5. Solución numérica y simulaciones en el estado estacionario

Con los datos del Penn Word versión 10.0 (2021), se establecieron los niveles del ingreso y el capital per cápita. Los datos del año 2019 fueron tomados como el año base, donde el ingreso per cápita es  $y_{2019} = 18,862.6$  (precios nacionales constantes 2017, US\$) y el capital per cápita de  $k_{2019} = 85,706.2$  (precios nacionales constantes 2017, US\$). Para la solución numérica del modelo, el nivel de los parámetros se tomó de la literatura empírica. Así, la tasa de depreciación varía entre 5 y 10% (véase INEGI, 2013). Se dio  $\delta = 0.05$ . La tasa de crecimiento de la población se estableció en  $n = 0.01$  (véase INEGI, 2021). Además, se fijo  $r^w = 0.03$ .

En particular, se determinó que  $\varepsilon = 1$ , para que el nivel de  $q$  no tomara valores irreales en la transición, ni en el estado estacionario. El nivel máximo empírico de  $q$  reportado es no mayor a 1.5 (véase Blanchard, Rhee, and Summers, 1993, y Barro y Sala-i-Martin, 2004). Con los parámetros anteriores, en el estado estacionario,  $q^* = 1.06$ . Ahora, utilizando datos del Banco Mundial (2022), se obtuvo la deuda externa per cápita para el año 2019,  $b_{2019} = 3,702.7$  (precios actuales, US\$). En el estado estacionario, con  $\dot{b} = 0$  y  $b_{2019} = 3,702.7$ , el nivel del consumo per cápita consistente con la restricción de recursos de la economía, ecuación (2), es:

$$c_{2019}^* = y_{2019} - (\delta + n)k_{2019} - (\varepsilon/2)(\delta + n)^2k_{2019} - (r^w - n)b_{2019}$$

Utilizando los niveles de  $y_{2019}$ ,  $k_{2019}$ ,  $b_{2019}$  y los parámetros determinados, se obtiene que  $c_{2019}^* = 13,491.9$ . Solamente, en el año base, conociendo  $b_{2019}$ , se puede determinar  $c_{2019}^*$  con la restricción de recursos de la economía. A continuación, se procedió a calibrar el modelo para que en el estado estacionario se reproduzcan los niveles auténticos de  $k_{2019}$  y  $y_{2019}$ , para ello se calibraron los valores de  $\alpha$  y  $A$ . Despejando  $A$  de la ecuación (15), se tiene que

$$A = \frac{k_{2019}^{1-\alpha}}{\alpha} \left[ (r^w + \delta)q^* - \frac{(q^* - 1)^2}{2\varepsilon} \right] \quad (21)$$

Sustituyendo la ecuación (21) en la función de producción,  $y_{2019} = Ak_{2019}^\alpha$ , y despejando  $\alpha$ , el valor de  $\alpha$  es

$$\alpha = \frac{k_{2019}}{y_{2019}} \left[ (r^w + \delta)q^* - \frac{(q^* - 1)^2}{2\varepsilon} \right] \quad (22)$$

Reemplazando el nivel de  $q^*$ ,  $r^w$ ,  $\delta$ ,  $\varepsilon$ ,  $k_{2019}$  y  $y_{2019}$  en la ecuación (22), se tiene que

$$\alpha = \frac{85,706.2}{18,862.6} \left[ (0.03 + 0.05)1.06 - \frac{(1.06 - 1)^2}{2} \right] = 0.3771$$

Es importante señalar que las estimaciones de la participación del trabajo para México varían entre 0.34 a 0.61, y considerando que  $\alpha$  es igual a 1 menos la participación del trabajo, daría un rango para  $\alpha$  entre 0.66 a 0.39 (véase Guerrero, 2019). Así, el nivel de  $\alpha$  calibrado es ligeramente bajo, pero consistente con la calibración. Finalmente, sustituyendo este valor de  $\alpha$ , el de  $q^*$ , el de los parámetros y el nivel real de  $k_{2019}$  en la ecuación (21), se obtiene

$$A = \frac{(85,706.2)^{1-0.3771}}{0.3771} \left[ (0.03 + 0.05)1.06 - \frac{(1.06 - 1)^2}{2} \right] = 260.15.$$

Para observar la consistencia del modelo numérico, se despeja  $b$  de la ecuación (11) y se obtiene  $b = (y - c - s)/(r^w - n)$ . Como efectivamente, en el estado estacionario, el ahorro per cápita numérico es igual a inversión per cápita con costo de ajuste numérico, se tiene que  $s_{2019} = i_{2019}$ , el nivel de  $i_{2019}$  generado por el modelo es 5,296.65. Por tanto,  $b_{2019}^* = (y_{2019}^* - c_{2019}^* - i_{2019})/(r^w - n) = 3,702.7$ , dando el mismo nivel de  $b_{2019}^*$ , proveniente de los datos.

Resumiendo, los resultados numéricos de estado estacionario en el 2019 son:  $q_{2019}^* = 1.06$ ,  $k_{2019} = 85,706.2$ ,  $y_{2019} = 18,862.6$ ,  $c_{2019}^* = 13,491.9$ ,  $s_{2019} = i_{2019}^* = 5,296.65$  y  $b_{2019}^* = 3,702.7$ . Una vez definido el estado estacionario en el 2019, que serán las condiciones iniciales, se realizan tres simulaciones. En el Cuadro 1 se muestran los resultados del caso base. Asimismo, las simulaciones, cuando  $A$  aumenta un 1%, cuando  $n$  disminuye de 0.01 a 0.005, y cuando  $r^w$  disminuye de 0.03 a 0.0275. Todos los resultados son de un estado estacionario a otro. Obsérvese que consideramos solamente perturbaciones positivas que afectan a la economía. Recordamos que no hay progreso técnico exógeno, por considerarlo arbitrario. Por tanto, todos los resultados de las simulaciones mostrados en el cuadro 1, son efectos nivel (aunque en la transición la tasa de crecimiento de  $y$  es positiva).

**Cuadro 1.** Simulaciones en el estado estacionario

	Caso Base (2019)	Simulación 1 Aumento $A$ en 1%	Simulación 2 Disminución de $n$	Simulación 3 Disminución $r^w$
$n$	0.01	0.01	<b>0.01 a 0.005</b>	0.01
$A$	260.15	<b>260.1 a 262.7</b>	260.15	260.15
$r^w$	0.03	0.03	0.03	<b>0.03 a 0.0275</b>

$k^*$	85,706.2	87,086.4	85,893.1	90,289.5
$q^*$	1.06	1.06	1.055	1.06
$y^*$	18,862.6	19,166.4	18,878.1	19,236.9
$c^*$	13,491.9	13,681.2	13,926.6	13,508.8
$c^*/y^*$	0.715	0.713	0.737	0.702
$b^*$	3,702.7	5,156.9	3,899.6	8,467.3
$b^*/y^*$	0.193	0.269	0.206	0.4401
$s^* = i^*$	5,296.6	5,381.9	4,854.0	5,579.8
$i^*/y^*$	0.280	0.280	0.257	0.290

Como se observen el cuadro 1, cuando  $A$  aumenta un 1% (todas las comparaciones son respecto al caso base), se constata que  $y$  aumenta a 19,166.4 (un incremento del 1.61%), debido a que la productividad es un determinante fundamental del ingreso per cápita. En tanto,  $c^*/y^*$  y  $i^*/y^*$  se mantienen prácticamente en el mismo nivel que el caso base. Mientras que  $b^*/y^*$  aumenta a 0.269 (26.9% del PIB), un nivel perfectamente sostenible, según la reseña de la literatura presentada en la sección 2.

Ahora, cuando  $n$  disminuye, se observa que  $y$  aumenta a 18,878.1 (un incremento marginal del 0.08%). Entre tanto,  $c^*/y^*$  aumenta a 0.737, debido a una menor carga poblacional y  $i^*/y^*$  disminuye a 0.257, debido al trueque con  $c^*/y^*$ . Mientras que  $b^*/y^*$  aumenta a 0.206, un nivel sostenible.

Finalmente, cuando  $r^w$  disminuye, se tiene que  $y$  aumenta a 19,236.9 (un aumento del 1.98%), crecimiento semejante cuando  $A$  aumenta. Mientras que  $c^*/y^*$  disminuye a 0.702 y  $i^*/y^*$  aumenta a 0.290, la mayor  $i^*/y^*$  de las tres simulaciones. Así, una disminución en  $r^w$ , como es de esperarse, mejora la inversión. Mientras tanto,  $b^*/y^*$  aumenta a 0.4401 (un aumento del 128%). Este nivel  $b^*/y^*$  esta antes del posible umbral para economías en desarrollo, donde  $b^*/y^*$  es sostenible y no afecta negativamente el desempeño de la economía.

Sin embargo, como señalan de Carvalho y Salomão (2007), la deuda externa per cápita es muy sensible a cambios en  $r^w$  y  $\delta$ . Aunque estamos más interesados en los movimientos de  $r^w$ . Así, dada la sensibilidad de  $b^*/y^*$  con respecto a  $r^w$  y  $\delta$ , el nivel de  $b^*/y^*$  podría caer fácilmente en la zona de sobreendeudamiento y perjudicar el funcionamiento de la economía, tal como se muestra en los siguientes resultados. Por ejemplo, si  $r^w$  disminuye de 0.03 a 0.02, nos da un nivel de  $b^*/y^* = 1.184$  (118.4% del PIB), nivel claramente insostenible para economías en desarrollo. Mientras, que si  $\delta$  disminuye de 0.05 a 0.04, el nivel de  $b^*/y^*$  es del 1.191, también insostenible. Ahora, si combinamos las disminuciones de  $r^w$  y  $\delta$ , el nivel de  $b^*/y^*$  es del 2.222 (222.2% del PIB). Por tanto, el modelo puede fácilmente generar situaciones de sobreendeudamiento y dañar a la economía.

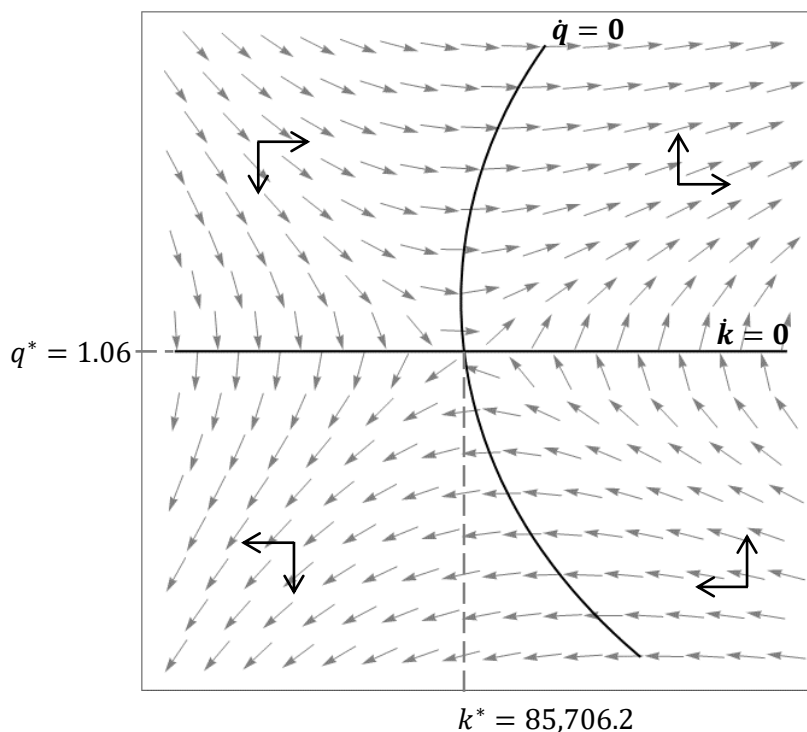
## 6. Dinámica de transición numérica del sistema de ecuaciones diferenciales y del modelo.

Recordemos que el primer paso es resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (8) y (9) para obtener la trayectoria óptima de  $k$  y  $q$ . Se determina la trayectoria verdadera o brazo estable no lineal por medio del método de eliminación del tiempo (time *elimination method*) desarrollado por Mulligan y Sala-i-Martin (1991 y 1993) a través del programa MATLAB R2020b. También, se obtiene el brazo estable lineal por medio de una linealización del sistema  $\dot{q}$  y  $\dot{k}$ . Una vez conocidos  $k$  y  $q$ , el segundo paso consiste en determinar  $c^*$ , ecuación (10). El nivel de  $c^*$  es encontrado a través del programa Wolfram Mathematica 12.2. Así, conocidos  $k$ ,  $q$ ,  $c^*$ ,  $i^*$  y  $y_{neto}$  es posible hablar de la dinámica de la cuenta corriente o de la deuda externa por cápita.

Para visualizar la dinámica de transición del modelo es conveniente deducir el diagrama de fase del sistema. Por tanto, en la gráfica 1, se presenta el diagrama fase del sistema  $\dot{k} = 0$  y  $\dot{q} = 0$  para los niveles del año base 2019, donde

$$\begin{aligned}\dot{k} &= k(q - 1.06) = 0 \\ \dot{q} &= -\frac{98.11}{k^{0.6228}} - \frac{1}{2}(q - 1)^2 + 0.08q = 0\end{aligned}$$

en el cual el punto de estado estacionario está en  $(k^*, q^*) = (85,706.3, 1.06)$ . El diagrama de fase efectivamente nos indica la existencia de un brazo estable.



**Gráfica 1.** Diagrama de fase

Fuente: Elaboración propia, con base en Mathematica 12.2.

A continuación, se deduce el auténtico brazo estable no lineal utilizando el método de eliminación del tiempo y también el brazo estable lineal en donde se utiliza el método de linealización de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales a través de planos tangentes en el punto de estado estacionario.

## 6.1 Método de eliminación del tiempo

Este método consiste en utilizar el sistema de ecuaciones diferenciales  $\dot{q}$  y  $\dot{k}$  para derivar una ecuación diferencial que nos de una *policy function*. La *policy function* consiste en una relación funcional entre la variable de control  $q$  y la variable de estado  $k$ , en donde el tiempo ha sido eliminado. En nuestro caso, se divide  $\dot{q}$  entre  $\dot{k}$ , ecuaciones (8) y (9), obteniéndose una sola ecuación diferencial, cuya solución es una función  $q$  que depende de  $k$ ,  $q(k)$ , esta es la *policy function* del modelo. Por tanto, se obtiene:

$$\frac{dq(k)}{dk} = q'(k) = \frac{\dot{q}}{\dot{k}} = \frac{(r^w + \delta)q - \alpha Ak^{\alpha-1} - \frac{(q-1)^2}{2\varepsilon}}{k \left[ \frac{(q-1)}{\varepsilon} - (n + \delta) \right]} \quad (23)$$

La ecuación anterior nos da la pendiente de la *policy function* para todos los valores de  $k$ , excepto en el estado estacionario, ya que la pendiente en el estado estacionario esta indeterminada,  $q'(k^*) = \dot{q}/\dot{k} = 0/0$ . Es posible calcular la pendiente de la *policy function* en el estado estacionario a través del vector propio negativo del brazo estable de la linealización del sistema de las ecuaciones (8) y (9). Conocida la pendiente en el estado estacionario, se resuelve numéricamente la ecuación (23) sujeto a la pendiente de estado estacionario como un problema de valor inicial, donde los valores iniciales son los valores de estado estacionario de la *policy function*. Es importante mencionar, que a partir del punto de estado estacionario, se determina el auténtico brazo optimo yendo hacia atrás.

**Pendiente de la función  $q = q(k)$  en el estado estacionario.** Para linealizar el sistema de ecuaciones (8) y (9), se emplea la aproximación de Taylor de grado uno. Considerando que  $\tilde{k} = k - k^*$  y  $\tilde{q} = q - q^*$ , se obtiene el sistema linealizado en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{k}} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{k}}{\partial q} \\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial k} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \end{bmatrix}_{k^*, q^*} \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ \tilde{q} \end{bmatrix}$$

donde la matriz de derivadas parciales es la matriz Jacobiana  $A$  del sistema.

La solución del sistema linealizado es:

$$\begin{bmatrix} \tilde{k} \\ \tilde{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

la cual tiene los siguientes valores y vectores propios

$$\begin{aligned}\lambda_1 &> 0, & V_{\lambda_1} &= \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \\ \lambda_2 &< 0, & V_{\lambda_2} &= \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dado que  $\lambda_2$  está asociada al brazo estable (valor propio negativo), se ignora la solución del brazo inestable y se establece que  $E_1 = 0$ , con lo que el sistema se reduce a

$$\begin{aligned}\tilde{k} &= E_2 v_{12} e^{\lambda_2 t} \\ \tilde{q} &= E_2 v_{22} e^{\lambda_2 t}\end{aligned}$$

Sustituyendo  $\tilde{k} = k - k^*$ ,  $\tilde{q} = q - q^*$  y despejando  $k$  y  $q$  se obtienen las soluciones del sistema en el tiempo  $t$

$$k(t) = k^* + E_2 v_{12} e^{\lambda_2 t} \quad (24)$$

$$q(t) = q^* + E_2 v_{22} e^{\lambda_2 t} \quad (25)$$

Derivando las ecuaciones anteriores con respecto al tiempo y sustituyendo en  $q'(k)$  se obtiene la pendiente en el punto de estado estacionario,

$$\begin{aligned}\dot{k} &= E_2 v_{12} \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \\ \dot{q} &= E_2 v_{22} \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \\ q'(k) &= \frac{\dot{q}}{\dot{k}} = \frac{v_{22}}{v_{12}}.\end{aligned}$$

Por tanto, para el caso base 2019 la matriz Jacobiana  $\mathbf{A}$  del sistema es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4.85 \times 10^{-17} & 85706.2 \\ 6.03 \times 10^{-7} & 0.02 \end{bmatrix}$$

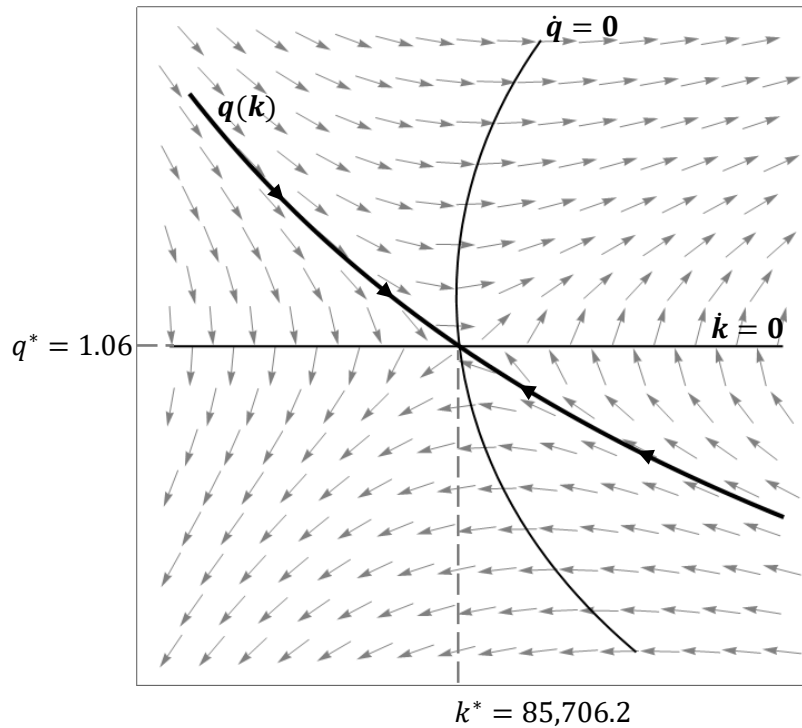
la cual tiene los siguientes valores y vectores propios

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.2375, & V_{\lambda_1} &= \begin{bmatrix} -1 \\ -2.77217 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \\ \lambda_2 &= -0.2175, & V_{\lambda_2} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2.53882 \times 10^{-6} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

donde

$$q'(k) = \frac{2.53882 \times 10^{-6}}{-1} = -2.53882 \times 10^{-6}$$

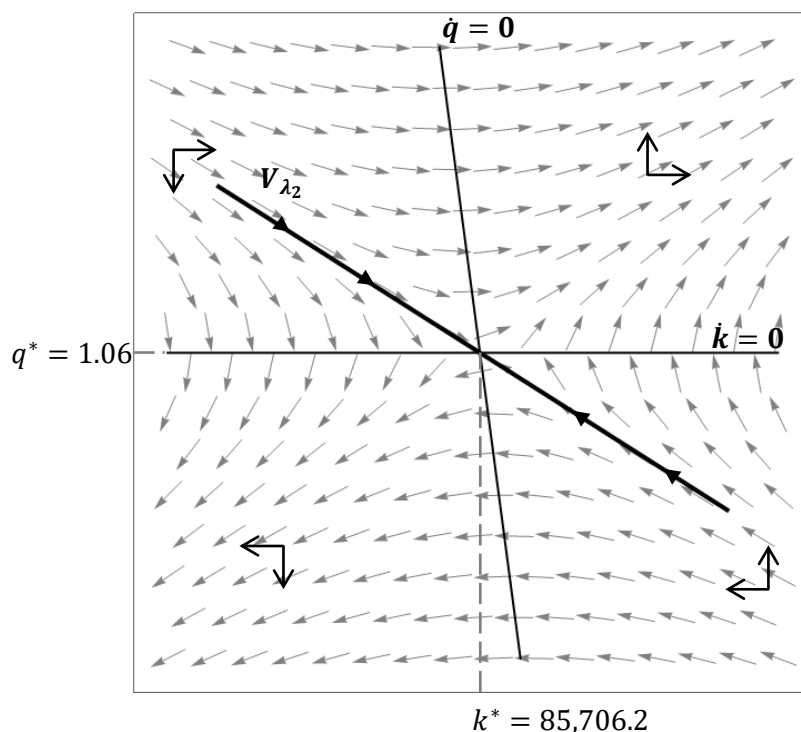
A continuación, se procedió a aplicar el algoritmo desarrollado por Mulligan y Sala-i-Martin a las ecuaciones diferenciales (8) y (9), tomando el valor de la pendiente en el estado estacionario. La aplicación para este modelo se puede consultar en el apéndice A1. En la gráfica 2, se muestra la trayectoria verdadera no lineal de la *policy function*,  $q(k)$ . Fácilmente, se observa que la *policy function* se acerca al punto de estado estacionario en la dirección del campo de vectores del sistema de ecuaciones diferenciales.



**Gráfica 2.** Diagrama de fase con *policy function*  
Fuente: Elaboración propia, con base en Mathematica 12.2.

## 6.2 Método lineal

Como se observó en la sección anterior, los valores propios del sistema linealizado son números reales con signos opuestos, por ende, el punto de estado estacionario es un punto silla, donde el valor propio negativo representa una solución estable y el valor propio positivo una solución inestable. Como se observa en la gráfica 3, la trayectoria del brazo estable lineal es la única solución factible hacia el estado estacionario.



**Gráfica 3.** Diagrama fase del Sistema Linealizado  
Fuente: Elaboración propia, con base en Mathematica 12.2.

Finalmente, como ya fue mencionado, el nivel de  $c^*$  se encuentra resolviendo numéricamente la ecuación (10). Es importante señalar que el objetivo de esta linealización del sistema de ecuaciones diferenciales de  $\dot{k}$  y  $\dot{q}$ , se hace con el propósito de encontrar el valor de la integral que define a  $c^*$ , al sustituir las trayectorias de  $k$  y  $q$  en el tiempo (en el método de eliminación del tiempo obviamente el tiempo ha sido eliminado). Una vez conocidos  $k$ ,  $i$  y  $c^*$ , se conoce la trayectoria del producto neto y de  $b$ .

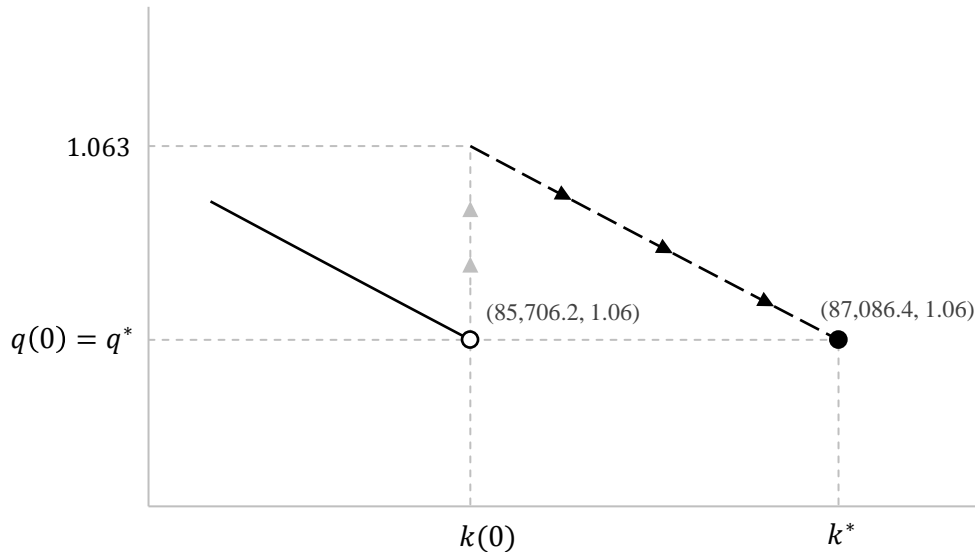
## 7. Simulaciones y la dinámica de transición

Una vez definido el comportamiento dinámico del sistema de ecuaciones diferenciales de  $\dot{k}$  y  $\dot{q}$ , ecuaciones (8) y (9), se realizaron varias simulaciones, tomando como condiciones iniciales los valores de  $k$  y  $q$  del estado estacionario del año 2019.

En la gráfica 4, se muestran las *policy functions* de la primera simulación, donde  $A$  aumenta en 1%, pasa de 260.1 a 262.7. Las *policy functions* se encontraron por medio del algoritmo del método de eliminación del tiempo utilizando el programa MATLAB R2020b. La nueva *policy function* está a la derecha de la original. En la transición, el nivel de  $q$  aumenta instantáneamente (variable de control) de 1.06 a 1.063 (alcanzando instantáneamente la nueva *policy function*). Dado que el precio de mercado de una unidad de capital es mayor que el precio de reposición, los incentivos para la



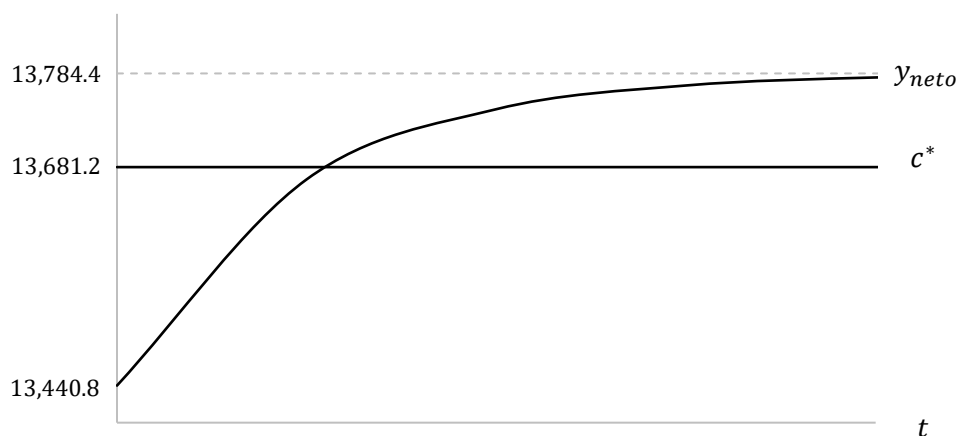
inversión aumentan, ecuación (6). Por tanto, el nivel de  $k$  comienza a aumentar lentamente (variable de estado). Después,  $q$  disminuye y  $k$  aumenta hasta llegar al nuevo estado estacionario.



**Gráfica 4.** Policy function,  $q(k)$ .  
 Simulación de  $A = 260.1$  a  $A = 262.7$

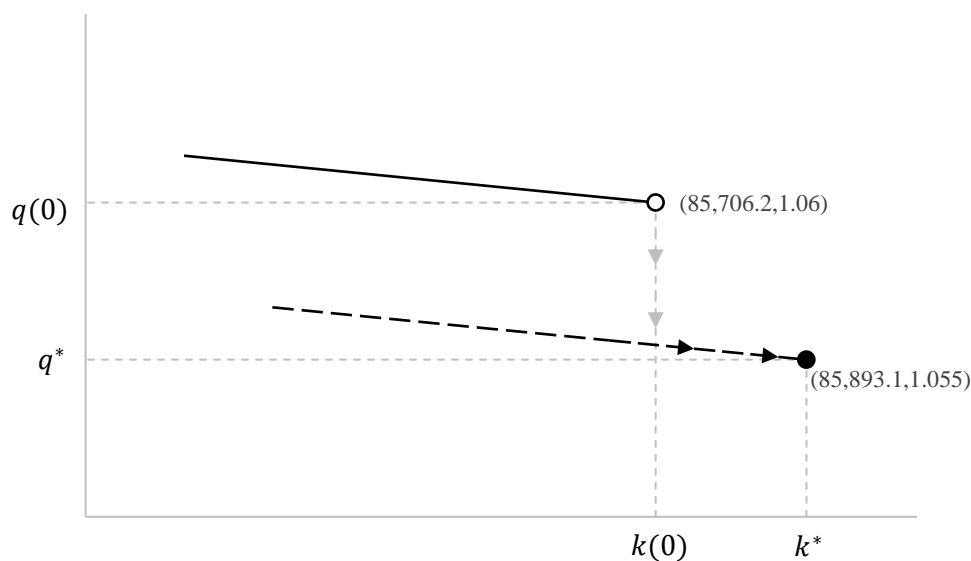
Una vez determinados  $q$  y  $k$  por medio del método de eliminación del tiempo, el siguiente paso consiste en calcular  $c^*$ , ecuación (10). La integral para determinar  $c^*$  esta en función de las trayectorias de  $q$  y  $k$  en el tiempo. Para calcular estas trayectorias en el tiempo, se linealizó el sistema de ecuaciones diferenciales de  $\dot{k}$  y  $\dot{q}$ , ecuaciones (8) y (9). El procedimiento de cómo se encontraron las trayectorias en el tiempo y el algoritmo utilizado para encontrar el nivel del consumo per cápita de estado estacionario se encuentran en el apéndice A2 y A3, respectivamente. Así, utilizando las trayectorias en el tiempo, se resolvió la integral con la instrucción “NIntegrate” de Mathematica 12.2. Una vez obtenido el nivel de  $c^*$ , se puede encontrar el valor de  $b^*$  de estado estacionario, ecuación (20). El resultado es  $c^* = 13,681.2$  y  $b^* = 5,156.9$ . Conociendo  $c^*$ , también es posible conocer la dinámica de transición de  $b$  por medio de la definición del producto neto,  $y_{neto} = Ak^\alpha - i - (\epsilon/2)(i^2/k)$ . La trayectoria del producto neto se encuentra al sustituir en su definición las ecuaciones de las trayectorias de  $k$  y  $q$  en el tiempo, encontradas con anterioridad al linealizar el sistema de  $\dot{k}$  y  $\dot{q}$ .

En la gráfica 5 se muestran las trayectorias del consumo y del producto neto. Al inicio, dado que  $c^*$  es mayor que el producto neto, existe un déficit en la cuenta corriente. Así, la economía pide prestado al resto del mundo. Como  $k$  aumenta, el producto neto aumenta. Cuando el producto neto es igual al nivel de  $c^*$ , el déficit comercial es cero, pero la cuenta corriente continúa siendo deficitaria, por el pago de interés sobre la deuda externa per cápita. Se continúa acumulando deuda, hasta llegar al nuevo estado estacionario donde el superávit comercial es igual al pago de intereses sobre la deuda externa.



**Gráfica 5.** Trayectorias del producto neto y el consumo.  
Simulación de  $A = 260.1$  a  $A = 262.7$

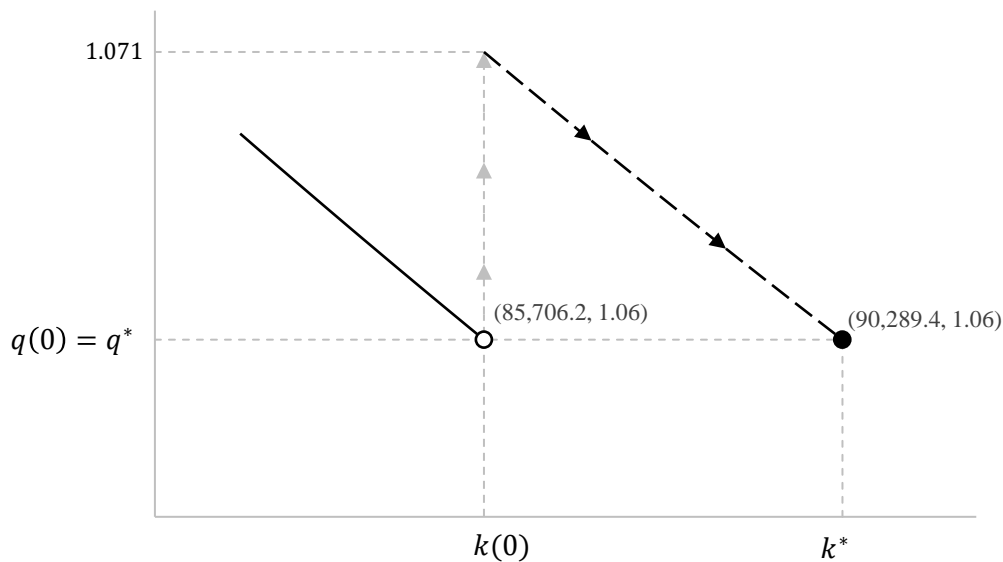
En la gráfica 6 se presentan las *policy functions* para la segunda simulación, cuando  $n$  disminuye de  $n = 0.01$  (línea continua) a  $n = 0.005$  (línea punteada). La nueva *policy function* se sitúa por debajo de la original. En la transición, el nivel de  $q$  disminuye instantáneamente de 1.06 a un nivel mayor que el precio  $q^* = 1.055$  del nuevo estado estacionario, alcanzando la nueva *policy function*. Los incentivos a la inversión continúan siendo relativamente altos y  $k$  comenzará a aumentar. En la transición, el nivel de  $q$  disminuye y el de  $k$  aumenta hasta alcanzar el nuevo estado estacionario.



**Gráfica 6.** Policy function,  $q(k)$ .  
Simulación de  $n = 0.01$  a  $n = 0.005$

Conociendo las trayectorias en el tiempo de  $q$  y  $k$ , se obtiene el nivel de estado estacionario del consumo per cápita,  $c^* = 13,926.6$  y consiguientemente la deuda per cápita,  $b^* = 3,899.68$ . Similar a la primera simulación,  $c^*$  es mayor que el producto neto, existiendo un déficit en la cuenta corriente. Como  $k$  aumenta, el producto neto aumenta y la deuda externa aumenta. En el estado estacionario, nuevamente, el pago de intereses sobre la deuda externa es igual al excedente comercial,  $(r^w - n)b = nx$ .

Finalmente, en la gráfica 7, se muestran las *policy functions* de la tercera simulación, cuando  $r^w$  disminuye en 25 puntos base, de 0.03 a 0.0275. La nueva *policy function* se sitúa por arriba de la original. En la transición, el nivel de  $q$  aumenta instantáneamente de 1.06 a 1.071, situándose sobre la nueva *policy function*. Los incentivos para la inversión son elevados y el nivel de  $k$  comenzará a aumentar. En la transición, el nivel de  $q$  disminuye y el de  $k$  aumenta hasta alcanzar el nuevo estado estacionario. Como era de esperarse, una disminución en  $r^w$  aumenta la inversión en  $k$  y  $y$ . Por tanto, el capital per cápita aumenta un 5.34% y el ingreso per cápita en 1.98%.<sup>3</sup>



**Gráfica 7. Policy Function,  $q(k)$ .**  
 Simulación de  $r^w = 0.03$  a  $r^w = 0.0275$

De nuevo se determina  $c^*$  por medio de las trayectorias en el tiempo de  $q$  y  $k$ . El resultado es  $c^* = 13,508.8$  y consiguientemente el de la deuda externa per cápita es  $b^* = 8,467.3$ . En forma análoga, como en la primera simulación,  $c^*$  es mayor que  $y_{neto}$ , implicando un déficit en la cuenta corriente. Como  $k$  aumenta, el producto neto aumenta y la deuda externa aumenta. Por tanto, en el estado estacionario, el superávit comercial es igual al pago de intereses sobre la deuda externa.

<sup>3</sup> Cabe aclarar que para todas las simulaciones realizadas solo se consideraron las trayectorias de las *policy functions* que van de derecha a izquierda del valor de estado estacionario, donde el signo de la deuda externa per cápita en todos los casos es el predicho por el modelo. Las trayectorias que van de izquierda a derecha del estado estacionario no se consideraron.

## 8. Conclusiones

El modelo de Blanchard (1983) y (1989) se ha utilizado para determinar la sostenibilidad del déficit de la cuenta corriente y de la deuda externa. En este artículo se ha implementado su aplicación a la economía mexicana. Se han encontrado los niveles empíricos de los parámetros del modelo. También, se han calibrado varios parámetros para reflejar correctamente a la economía mexicana. Con esto se ha encontrado la solución de estado estacionario, reproduciendo correctamente los niveles de las variables endógenas para el año 2019 (case base). También, por medio del método de eliminación del tiempo, se han encontrado los brazos estables auténticos, no lineales, del modelo dinámico entre el precio de mercado de una unidad de capital y del capital por trabajador. Asimismo, se han deducido los brazos estables lineales. Se han movido tres parámetros para observar cómo responde la economía mexicana a estas perturbaciones positivas.

La primera simulación ha consistido en un aumento de la productividad del 1%. Como es bien conocido, los aumentos de productividad son esenciales para el buen funcionamiento de la economía. Se ha encontrado, en el estado estacionario, que el ingreso per cápita ha aumentado un 1.61%. Sin embargo, el consumo y la inversión per cápita prácticamente tienen el mismo nivel que en el año base. En la transición el precio de mercado de una unidad de capital aumenta instantáneamente al nuevo brazo estable, para después ir disminuyendo, mientras que la relación capital trabajo va aumentando. También, en la transición, el consumo per cápita es mayor que el producto neto y así la economía va acumulando deuda externa. Respecto, al nivel de la deuda externa, la proporción deuda externa a PIB ha aumentado al 26.9%. Si consideramos que el umbral en donde la proporción deuda externa a PIB perjudica a la economía, es entre 55-75% (según el resumen de la literatura presentado), se deduce que el nivel del 26.9% es sostenible.

La segunda simulación ha consistido en una disminución de la tasa demográfica, debido a la transición demográfica. El ingreso per cápita prácticamente se mantiene constantes (ligero aumento). Se ha producido un trueque entre el consumo per cápita (aumenta) y la inversión per cápita (disminuye). En la transición el precio de mercado de una unidad de capital disminuye instantáneamente al nuevo brazo estable, para después ir bajando y la relación capital trabajo va incrementándose. Nuevamente, en la transición, el consumo per cápita es mayor que el producto neto, aumentando la deuda externa per cápita. La proporción deuda externa a PIB aumentó marginalmente a un 20.6%.

Se comprobó que cuando la tasa de interés disminuyó en 25 puntos base el ingreso per cápita aumentó en un 1.98%. Mientras que la proporción inversión a PIB aumentó y la proporción consumo a PIB bajó. Así, una disminución de la tasa de interés internacional estimula la inversión, beneficioso para la economía. En la transición el precio de mercado de una unidad de capital aumenta instantáneamente al nuevo brazo estable, para disminuir lentamente a su nuevo estado estacionario, y la relación capital trabajo aumenta lentamente. Mientras tanto, el consumo per cápita de estado estacionario es mayor que el producto neto. Así, la economía ira aumento el acervo de la deuda externa en la transición, hasta que el superávit comercial sea igual al pago de intereses sobre la deuda externa per cápita. La proporción deuda externa a PIB aumento a un 44.01%, todavía sostenible.

Se ha mencionado que la deuda externa es muy sensible a movimientos de la tasa de interés internacional (y de la tasa de depreciación del capital). El modelo predice posibles

sobreendeudamientos en economías abiertas. Así, cuando la tasa de interés internacional disminuyó de 0.03 a 0.02, la proporción deuda a PIB aumenta a un nivel insostenible del 118.4%.

Este último resultado nos pone en alerta respecto a los cambios en la tasa de interés internacional y la necesidad de mantener políticas macroeconómicas prudentes. Los ciclos económicos por los cuales transita la producción y la deuda externa de un país van de la mano con la variación de las tasas de interés internacional. La afectación del movimiento de la tasa de interés internacional se ve reflejada en todas las economías, principalmente en los países en desarrollo, como México.

## Referencias

- [1] Alogoskoufis, G. (2021) "Asymmetries of financial openness in an optimal growth model", *The Journal of Economic Asymmetries*, 23. DOI: 10.1016/j.jeca.2021.e00201.
- [2] Banco Mundial (2022). Indicadores del Desarrollo Mundial, URL: <https://datos.bancomundial.org/indicador/DT.DOD.DECT.CD?locations=MX>.
- [3] Barro, R. y Sala-I-Martin, X. (2004) *Economic Growth*. MIT Press, Cambridge, MA.
- [4] Blanchard, O.J. (1983). Debt and Current Account Deficit in Brazil, en: Aspe-Armella, P., Dornbusch, R. y Obstfeld, M. (Eds.), *Financial Policies and the World Capital Market: The Problem of Latin American Countries*, University of Chicago Press.
- [5] Blanchard, O.J. y Fischer, S. (1989). *Lectures in Macroeconomics*. MA., Cambridge: MIT Press, 58-78.
- [6] Blanchard, O., Rhee, C. y Summers, L. (1993). The Stock Market, Profit, and Investment. *The Quarterly Journal of Economics*, 108(1): 115–136. DOI: <https://doi.org/10.2307/2118497>.
- [7] De Carvalho, A. y Salomão, P. (2007). Assessing Debt Sustainability in Brazil. *Brazilian Review of Econometrics*, 27(1): 27–51, Mayo.
- [8] Eberhardt, M. y Presbitero, A. F. (2015). Public debt and growth: Heterogeneity and non-linearity. *Journal of International Economics*, 97(1): 45-58. <https://doi.org/10.1016/j.jinteco.2015.04.005>
- [9] Ekkehard, E.; Semmler, W. y Haider, A. (2017). Debt-deflation, financial market stress and regime change. Evidence from Europe using MRVAR. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 81:115-139.
- [10] Gil-León, J. M., Rosso-Murillo, J. W. y Ramírez-Hernández, E. A (2019). Public Debt and Stability in Economic Growth: Evidence for Latin America, *International Journal of Economics and Financial Issues*, 9(4), 137-147.
- [11] Greenidge, K., Craigwell, R., Thomas, C. y Drakes, L. (2012). Threshold Effects of Sovereign Debt: Evidence from the Caribbean. IMF Working Paper WP/12/157 (Washington: International Monetary Fund).
- [12] Guerriero, M. (2019). The labor share of income around the world: evidence from a panel dataset. *ADB Working Paper 920*.
- [13] Heijdra, B. J. y Van Der Ploeg, F. (2002). *The Foundations of Modern Macroeconomics*. New York, United States. Oxford University Press.
- [14] INEGI (2013). Metodología y resultados de PTF y contabilidad del crecimiento KLEMS del INEGI, URL:<https://www.inegi.org.mx/contenidos/eventos/2013/contabilidad/p-Meza.pdf>.
- [15] INEGI (2021). Población, URL: <https://www.inegi.org.mx/temas/estructura/>.
- [16] Mulligan, C. B. y Sala-I-Martin, X. (1991). A note on the time-elimination method for solving recursive dynamic economic models. *NBER Working Paper No. t0116*, URL: <https://ssrn.com/abstract=236665>.
- [17] Mulligan, C. B. y Sala-I-Martin, X. (1993). Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 108(3): 739–773. DOI: <https://doi.org/10.2307/2118407>.

- [18] Nyambu, U. y Semmler W. (2017). Emerging markets' resource booms and busts, borrowing risk and regime change. *Structural Change and Economic Dynamics*, 41: 29-42. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2017.02.001>.
- [19] Penn World 10.0 (2021). URL: <https://www.rug.nl/ggdc/productivity/pwt/>
- [20] Semmler, W. y Tahri, I. (2017). Current account imbalances: A new approach to assess external debt sustainability. *Economic Modelling*, 62: 161-170.
- [21] Steger, T. (2012). The Ramsey model - linearization, backward integration, relaxation (complete). *Quantitative Dynamic Macroeconomics, Lecture Notes*, University of Leipzig, winter term 12/13.
- [22] Wright, A. y Grenade, K. (2014). Determining Optimal Public Debt and Debt-Growth Dynamics in the Caribbean. *Research in applied Economics*, 6(2): 87-115. DOI: <https://doi.org/10.5296/rae.v6i2.5577>.

## Apéndice

### A1. Algoritmo *time elimination*

```

clear all
clc
global a n delta rw epsilon A1 k2019 y2019 q2019 qs ks slope
%Datos
a = 0.37;
n = 0.01;
delta = 0.03;
epsilon = 1;
rw = 0.03;
k2019 = 85706.2;
y2019 = 18862.6;
q2019 = 1.06;
A1 = 260.1;
%Estado Estacionario
qs = 1 + (n + delta) * epsilon;
ks = [(A1 * a) / ((rw + delta)(1 + (n + delta) * epsilon) - ((n + delta) * epsilon)^2 / (2 * epsilon))]^(1 / (1 - a));
%Jacobiano evaluado en el estado estacionario
a11 = ((qs - 1) / epsilon) - (n + delta);
a12 = ks / epsilon;
a21 = -A1 * a * (ks)^(a - 2) * (a - 1);
a22 = rw + delta - ((qs - 1) / epsilon);
Jacb = [a11 a12; a21 a22]
%valores y vectores propios
[V, Dia] = eig(Jacb)
v11 = V(1,1); v12 = V(1,2);
v21 = V(2,1); v22 = V(2,2);
slope = v21 / v11;
%Resolver Sistema Dinamico

```

```

k0 = ks/1.1
kf = ks;
ssd0 = ks - k0;
ssdf = ks - kf;
%Resolver Sistema Dinamico
[ssd, q] = ode45(@Qprima, [ssdf ssd0], qs);
k = ks - ssd;
%Graficas
plot(k, q);
-----
function qdot = Qprima(ssd, q);
global a n delta rw epsilon A1 ks slope
k = ks - ssd;
if k == ks
qdot = -slope
else
qdot = (A1 * a * k.^(a - 1) + ((q - 1)^2)/(2 * epsilon) - q.(rw + delta)) / (k.((q - 1)/epsilon - (n
+ delta)) );
end
    
```

## A.2 Trayectorias de $k(t)$ y $q(t)$

A través del programa Mathematica 12.2 y el algoritmo presentado en Steger (2012), el cual puede consultarse en el apéndice A.3, se obtuvieron las trayectorias de  $k$  y  $q$  en el tiempo. Para determinar las trayectorias en el tiempo del sistema linealizado, es necesario conocer las soluciones para toda  $t$  de las ecuaciones (24) y (25) y el valor de  $E_2$ . Sustituyendo  $t = 0$  en el sistema de soluciones, este se reduce a

$$\begin{aligned} k(0) &= k^* + E_2 v_{12} \\ q(0) &= q^* + E_2 v_{22} \end{aligned}$$

y reemplazando el valor de  $k(0) = k_{2019}^*$ , el cual es conocido, se tiene

$$\begin{aligned} k_{2019}^* &= k^* + E_2 v_{12} \\ q(0) &= q^* + E_2 v_{22} \end{aligned}$$

donde la solución del sistema está dada por  $q(0) = q^* + \frac{v_{22}}{v_{12}} (k_{2019}^* - k^*)$  y  $E_2 = \frac{1}{v_{12}} (k_{2019}^* - k^*)$ . Finalmente, sustituyendo estos valores en el sistema de soluciones para toda  $t$ , las trayectorias de  $k$  y  $q$  en el tiempo están dadas por

$$\begin{aligned} k(t) &= k^* + (k_{2019}^* - k^*) e^{\lambda_2 t} \\ q(t) &= q^* + \frac{v_{22}}{v_{12}} (k_{2019}^* - k^*) e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

### A3. Algoritmo consumo (sistema lineal)

```
(*Datos*)
DatoInicial = {a → 0.37, n → 0.01, delta → 0.05, epsilon → 1, rw → 0.03, A1 → 260.1};
DatoFinal = {a → 0.37, n → 0.01, delta → 0.05, epsilon → 1, rw → 0.03, A1 → 260.1};
kreal = 85706,2;
yreal = 18862.6;
qreal = 1.06;
(*Estado Estacionario*)
{ks, qs} = {((A1 * a)/((rw + delta) * (1 + (delta + n) * epsilon) - (((1 + (delta + n) * epsilon) - 1)^2)/(2 * epsilon))))^(1/(1 - a)), 1 + (delta + n) * epsilon};
{ks, qs}/. DatoInicial
{ks, qs}/. DatoFinal
(*Sistema de ecuaciones diferenciales*)
kp = (((q - 1)/epsilon) - (delta + n)) * k/. DatoFinal
qp = (rw + delta) * q - A1 * a * (k^(a - 1)) - (((q - 1)^2)/(2 * epsilon))/. DatoFinal
(*Matriz Jacobiana*)
{jacobian = D[{kp, qp}, {k, q}]};
JACstst = jacobian/. {k → ks, q → qs}/. DatoFinal;
(*Valores y vectores propios*)
eigen = Eigensystem[JACstst/. DatoFinal];
TableForm[eigen, TableHeadings → {"ValoresPropios", "VectoresPropios"}, Automatic, {k, q}, TableSpacing → {4,3}];
(*Solución del Sistema*)
(SolLineal = B1 eigen[[2,1]]Exp[eigen[[1,1]] t] + B2 eigen[[2,2]]Exp[eigen[[1,2]] t] + {ks, qs}/. DatoFinal);
sys = SolLineal == {k0, q0}/. {t → 0, k0 → (ks/. DatoFinal)/(ks/. DatoFinal)/(ks/. DatoInicial)}, B1 → 0};
SolCondInicial = Solve[sys, {q0, B2}]
B1 = 0;
solComplete = SolLineal /. SolCondInicial;
kComplete = solComplete[[1,1]];
qComplete = solComplete[[1,2]];
+++++
(*Consumo y Deuda per cápita)
fun = ( A1 * kComplete^a - (qComplete - 1) * kComplete/epsilon ) * ( 1 + (qComplete - 1)/2 ) * Exp[-(rw - n) * t]/. DatoFinal;
int = NIntegrate[fun, {t, 0, Infinity}];
b0 = 3,702.7;
C0 = yreal - (delta + n) * kreal - (epsilon/2) * ((delta + n)^2) * kreal - (rw - n) * b0/. DatoInicial
ys = (A1 * ks^a)/. DatoFinal;
cs = (rw - n) * (int - b0)/. DatoFinal
bs = (ys - cs - (delta + n) * ks - (epsilon/2) * ((delta + n)^2) * ks) / (rw - n)/. DatoFinal
```