El re-descubrimiento de las matemáticas. Filosofía de las matemáticas en las *Observaciones filosóficas*: el caso de la inducción

Rediscovering Mathematics. Philosophy of Mathematics in the Philosophical Remarks*: the Case of Induction*

Alejandro Tomasini Bassols
10.26754/ojs_arif/arif.202317298

Resumen

Todo indica que el verdadero detonador del nuevo interés en la filosofía por parte de Wittgenstein fue la conferencia que Brouwer impartió en Viena y a la que él asistió, en 1928. Describo rápidamente el contexto en Cambridge y algunas de las dificultades que Wittgenstein tuvo que superar para poder ingresar como maestro (*lecturer*) en la Universidad de Cambridge. Reconstruyo su punto de vista sobre la inducción matemática, uno de los muchos tópicos de filosofía de las matemáticas de los que se ocupó a partir de 1929. Empezando a aplicar su nuevo enfoque, Wittgenstein se centra en la utilidad de las pruebas por inducción y esclarece en qué consiste dicha prueba. Para eso, Wittgenstein muestra las relaciones que valen entre la inducción y el infinito, por una parte, y la inducción y la noción de ley, por la otra. La prueba no es un recorrido por todo el dominio de un conjunto infinito, sino que es más bien la indicación de que una prueba en el sentido usual (*i.e.*, de una ecuación) se puede en todo momento ofrecer. Wittgenstein rescata la peculiaridad de las pruebas por inducción, que es mostrar que algo se puede probar sobre la base de la regularidad de una ley. Por último, considero algunas críticas que se han hecho y muestro que dejan intacta la posición de Wittgenstein.

Palabras clave: Russell, Inducción, Prueba, Infinito, Ecuación, Generalidad.

Abstract

Everything indicates that the detonator of Wittgenstein's renewed interest in philosophy was Brouwer's lecture in Vienna, in 1928. In this paper I give a quick account of the philosophical background in Cambridge and describe some of the

Recibido: 06/09/2022. Aceptado: 15/02/2023
Análisis. Revista de investigación filosófica, vol. 10, n.º 1 (2023): 87-105 ISSNe: 2386-8066

difficulties Wittgenstein had to overcome in order to start working as a lecturer at the university. I reconstruct his views on mathematical induction, one of many topics in the philosophy of mathematics he dealt with. Contrary to many other philosophers, he centres round the utility of recursive proofs and clarifies what this kind of proof it consists in. He highlights the connections between induction and the infinite, on the one hand, and induction and the notion of law, on the other. He makes clear that the proof doesn't take us through the endless series of a set, but is rather the indication that a proof in the ordinary mathematical sense can be carried out. Wittgenstein rescues the peculiarity of recursive proofs which show that something can be proved taking as a basis the regularity of a law. Finally, I briefly consider a couple of criticisms and show that they leave Wittgenstein's stance untouched.

KEYWORDS: Russell, Induction, Proof, Infinite, Equation, Generality.

I. El trasfondo

En 1928, después de una conversación en Viena con Brouwer sostenida durante una cena después de que éste hubiera impartido su conferencia, Wittgenstein finalmente se decidió a retomar la investigación en filosofía, después de una ausencia de la vida académica de 15 años (Marion 2003: 103-127). Desde el punto de vista del quehacer filosófico, el único evento filosófico importante para Wittgenstein durante todo ese periodo, aparte de la providencial conferencia de Brouwer en Viena, fue el encuentro de una semana con Bertrand Russell, en 1919, en la Haya, periodo durante el cual Wittgenstein le expuso a su antiguo maestro y discutió con él línea por línea su *Tractatus Logico-Philosophicus*. Muy probablemente, esa fue la última ocasión en la que Russell y Wittgenstein trabajaron conjuntamente compartiendo una perspectiva, un proyecto y discutiendo para llegar a lo que ambos esperaban que fueran puntos de vista aceptables para ambas partes. Ante los fracasos de Wittgenstein por publicar su libro en las condiciones que él quería que se publicara, es decir, sin que pagara él por su publicación, cosa que habría podido hacer sin problemas, Russell se ofreció a intentar publicarlo. Dado el carácter a primera vista esotérico del texto y de que a diferencia de éste Wittgenstein era a la sazón un ilustre desconocido, uno de los potenciales editores puso como condición que el texto llevara una introducción del propio Russell. Con desgano Wittgenstein aceptó, pero todavía hubo de pasar un año para que el libro apareciera publicado. Russell, junto con su segunda esposa, Dora Black, viajó a China, en donde estuvo un año, pero le dejó a una muy eficiente secretaria la tarea de encontrar un editor. Cuando Russell regresó a Inglaterra, el libro ya estaba en prensa e incluía su "Introducción", algo acerca de lo cual Russell se enteró a su regreso. Wittgenstein quedó muy decepcionado por el texto russelliano en alemán y se desinteresó por completo del tema. Russell, no obstante, siguió pugnando por encontrar un editor, en inglés esta vez, y lo encontró en C. K. Ogden, quien por aquel entonces dirigía una colección de filosofía en la prestigiosa editorial Routledge and Kegan Paul. De hecho, es a Ogden a quien se le debe la idea de publicar el libro en edición bilingüe y él mismo hizo la traducción, fuertemente apoyado por F. P. Ramsey. Este dato es importante porque si se elevan críticas a la primera versión del *Tractatus* al inglés éstas deben recaer tanto sobre el traductor oficial como sobre Ramsey, cosa que en general no se hace. Lo que usualmente se hace es reservar la crítica para Ogden y siempre que no se esté examinando la traducción enfatizar y realzar la deuda de Ogden con Ramsey o adscribirle a éste oficiosamente el mérito de la traducción.[1] Dicho sea de paso, uno de los problemas que planteaba la traducción era el título. El que después de varias propuestas Wittgenstein aceptó fue el sugerido por G. E. Moore.

Wittgenstein estaba convencido de que en su *Tractatus* él había dado los lineamientos suficientes para hacer ver que los problemas filosóficos son el resultado de confusiones y de incomprensiones concernientes a la lógica del lenguaje. Siendo coherente con esa convicción, él consideró que no tenía nada más que hacer en filosofía y optó por ocuparse de otros menesteres. Dejando de lado varios encuentros ocasionales con Russell y Ramsey, Wittgenstein no volvió a tener tratos con filósofos profesionales sino hasta 1927, año en el que finalmente entró en contacto con Moritz Schlick y, a través de él, con algunos miembros del Círculo de Viena. Con éstos las relaciones fueron disparejas y más bien inestables. Wittgenstein accedió a tener discusiones esporádicas con ellos y muy probablemente él habría seguido su camino alejado *de facto* de las cuestiones académicas si no hubiera sido porque aceptó una invitación expresa e insistente por parte de Hans Hahn para asistir a una conferencia de L. E. J. Brouwer. Esa conferencia fue el evento decisivo y el que despertó súbita e intensamente el deseo en Wittgenstein de retomar la investigación en filosofía. Digámoslo abiertamente: quien sin saberlo ni proponérselo despertó a Wittgenstein de su "sueño dogmático" fue Brouwer. Obviamente, se planteaba el problema de con quién trabajar y en dónde. ¿En Viena, con los miembros del Círculo? Ello no habría tenido el menor sentido. Para Wittgenstein era claro: no había más que una persona, a saber,

[1] Es así como, por ejemplo, P. S. M. Hacker presenta el caso cuando toca el tema.

Bertrand Russell y por lo tanto no quedaba más que un lugar, esto es, la Universidad de Cambridge. En concordancia con ello, en enero de 1929 Wittgenstein estaba de regreso en Cambridge para retomar su trabajo en filosofía.

Para que Wittgenstein pudiera ser invitado a impartir clases en la Universidad de Cambridge se tenían que cumplir previamente varias condiciones. Una era la de presentar un trabajo para la obtención del doctorado, dado que él ya había pagado sus cuotas académicas antes de la Primera Guerra Mundial. El trabajo que Wittgenstein presentó fue el *Tractatus* y sus examinadores fueron Russell y Moore. La sesión ha de haber sido sumamente pintoresca, puesto que terminó ¡con Wittgenstein dándoles una palmada al tiempo que les decía que no se preocuparan, que él sabía que no habían entendido nada! Ahora bien, el doctorado era una condición meramente formal. Más importante era que Wittgenstein hiciera ver que estaba capacitado para dar clase para lo cual se le pidió que escribiera un texto. Fue Moore quien, cuando recibió dicho texto y en calidad de autoridad universitaria, le pidió oficialmente a Russell que emitiera un dictamen sobre el trabajo escrito de Wittgenstein. El manuscrito de Wittgenstein que se le hizo llegar a Russell era lo que fue publicado póstumamente como 'Observaciones Filosóficas' (*Philosophische Bemerkungen*, *Philosophical Remarks*).

El escrito de Wittgenstein estaba, como algunos otros que produjo un poco después, dividido en dos partes, una dedicada al lenguaje y otra a las matemáticas y a la lógica. El texto representa un drástico mas no total cambio en prácticamente todos los contextos. En particular, vale la pena resaltar la crítica a la noción tractariana de proposición elemental. Asimismo, Wittgenstein efectúa múltiples ejercicios de carácter fenomenológico en sus análisis de la "experiencia inmediata", si bien son análisis caracterizados por un nuevo enfoque lingüístico. Por ejemplo, Wittgenstein ya no habla del "yo", sino de las aplicaciones del pronombre personal 'yo'. Aparece por primera vez la noción de "Gramática", que será la que vendrá a reemplazar a la de lógica. Toda la primera parte contiene una cantidad asombrosa de ideas novedosas y es claro que es la expresión de una profunda inconformidad con la filosofía del lenguaje russelliano-tractariana. Sin embargo, en donde Wittgenstein aparece como un pensador no sólo novedoso sino casi completamente nuevo es en la segunda parte, *viz*., la dedicada a la lógica y las matemáticas. Sorpresivamente, Wittgenstein inicia su discusión con una feroz crítica a la "teoría extensional del número", esto es, el logicismo de Frege y de Russell, pero muy rápidamente aborda temas que en el *Tractatus* no había ni siquiera considerado. Así, encontramos reflexiones lúcidas y esclarecedoras sobre temas tan variados como las relaciones entre números y conceptos, la naturaleza de las ecuaciones, las tautologías, la igualdad y la identidad, pensamientos originales sobre el infinito, sobre las peculiaridades de las pruebas en matemáticas, sobre la teoría de conjuntos, la geometría y los números irracionales, sobre la negación y sobre la inducción y las pruebas recursivas. En otras palabras, la nueva filosofía de las matemáticas de Wittgenstein tenía como objetivo proporcionarnos un cuadro completo y aclarado del universo de las matemáticas y la lógica. Para Wittgenstein ya no se trataba de meramente argumentar de manera abstracta, de hacer demostraciones, de probar algún nuevo teorema, etc., sino más bien de describir minuciosamente los procedimientos, los objetivos, etc., de los matemáticos operantes. Se trataba de una filosofía de las matemáticas completamente diferente de lo que hasta entonces estaba en el aire.

Es de suponerse que, al leer el manuscrito de Wittgenstein, Russell ha de haber sentido que se le movía el piso de manera alarmante. Aunque es obvio que él estaba perfectamente familiarizado con todos los temas de los que Wittgenstein se ocupaba en su escrito, él mismo no tenía mayor cosa que decir al respecto. Por ejemplo, Russell sabía perfectamente bien lo que es una prueba por inducción, pero ¿se tomó alguna vez la molestia de explicar en qué consiste ésta? ¡No! Él simplemente hacía las demostraciones que se requerían y seguía adelante, pero no consideraba que fuera parte de su función como filósofo explicar qué era, en qué consistía lo que estaba haciendo. Parecería como si lo único que le importaban eran los resultados, pero nada de todo aquello que éstos presuponen. Es perfectamente imaginable, por lo tanto, que al leer el manuscrito de Wittgenstein, Russell haya sentido que estaba frente a una fuerza filosófica con la que no iba a poder lidiar y que ciertamente representaba un peligro mortal para su propia posición. Quizá esto explique el muy extraño "dictamen" del texto de Wittgenstein que Russell emitió y que envió a Moore. Aquí es muy importante tener claro qué es lo que estaba en juego: a primera vista al menos, dependía de Russell el que se le diera a Wittgenstein o no una beca para poder proseguir con su investigación y, asimismo, para poder dar clases. Lo que estaba en juego no era, pues, poco. Veamos entonces qué dijo Russell en la parte que es relevante para nosotros. Escribe:

> Luego tiene mucho material sobre el infinito, que está siempre en el peligro de convertirse en lo que Brouwer dijo, y que ha de parársele en corto siempre que el peligro se vuelva aparente. Sus teorías son ciertamente importantes y ciertamente muy originales. Si son verdaderas no lo sé; yo devotamente espero que no, por cuanto hacen a las matemáticas y a la lógica casi increíblemente difíciles (Monk 1990: 293).

Era obvio que con semejante veredicto la Universidad de Cambridge no estaba en posición de ofrecerle nada a Wittgenstein. Persuadido, sin embargo, de que la opinión de Russell no podía ser la última palabra y quizá intuyendo lo que había detrás de tan ambigua evaluación, Moore solicitó un nuevo dictamen. Éste fue proporcionado por F. P. Ramsey. Moore reporta la situación como sigue:

> Pero después de la primera mitad de las discusiones en Cambridge en 1929, Ramsey escribió a petición mía la siguiente carta apoyando la propuesta de que Trinity le concediera a Wittgenstein una beca para permitirle continuar sus investigaciones.
>
> ‘En mi opinión, el Sr. Wittgenstein es un genio filosófico de un orden diferente de cualquier otro que yo conozca. Eso se debe en parte a su gran dote para ver lo que es esencial en un problema y en parte a su abrumador vigor intelectual, a la intensidad de pensamiento con que persigue una cuestión hasta el fondo y nunca queda contento con una mera hipótesis posible. De su trabajo más que el de cualquier otro hombre espero una solución a las dificultades que me dejan perplejo tanto en filosofía en general como en los fundamentos de las matemáticas en particular.
>
> ‘Me parece, por lo tanto, peculiarmente afortunado que él haya regresado a la investigación. Durante los últimos dos trimestres he estado en un cercano contacto con su obra y me parece que ha progresado notablemente. Empezó con ciertas cuestiones en el análisis de las proposiciones que ahora lo llevaron a problemas acerca del infinito que están en la raíz de controversias actuales en los fundamentos de las matemáticas. Al principio tenía miedo de que su falta de conocimiento y facilidad matemáticas resultaran ser un serio hándicap para su trabajo en este campo. Pero el progreso que ha hecho ya me convenció de que ello no es así y de que también aquí él probablemente hará trabajo de primera importancia.
>
> ‘Está ahora trabajando muy duro y, hasta donde puedo juzgar, le está yendo bien. Que se le interrumpa por falta de dinero sería, pienso, un gran infortunio para la filosofía’ (Moore 1970: 254).

Obviamente, la carta de Ramsey hizo redundante a la de Russell, pero el juicio de la historia no debe quedar ahí, porque da mucho que pensar y es imposible no percatarse de que Russell sabía perfectamente bien lo que estaba en juego y sabía que su veredicto **podía** ser decisivo y que con su dictamen él habría bloqueado el ingreso de Wittgenstein a la universidad. De ahí que su documento de hecho no permita otra lectura que la de un esfuerzo para impedir que la persona que había redactado el texto que él había leído y evaluado se incorporara a la planta docente de la universidad. A Moore se le debe que el sutil pero ponzoñoso intento de Russell fracasara.

Ahora bien, quizá como un efecto de la ambivalente evaluación de Russell, lo cierto es que también se le pidió a Wittgenstein que le expusiera oralmente a un matemático reconocido sus resultados en el área de la filosofía de las matemáticas. El matemático designado para atender las sesiones fue J. E. Littlewood. Después de 12 horas de exposición, Littlewood emitió un reporte totalmente positivo. Fue así como Wittgenstein recibió un estipendio por cinco años y pudo a partir de entonces impartir clases en la Universidad de Cambridge. Quizá no esté de más recordar que, unos cuantos años después, entre los asistentes al curso de Wittgenstein "Filosofía para Matemáticos" estaban Hardy y Littlewood.

II. El tema de la inducción matemática

El objetivo del nuevo Wittgenstein no era hacer lógica o demostrar nuevos teoremas en matemáticas. Más bien, su objetivo era pintarnos un panorama completo de lo que **son** la lógica y las matemáticas. En este trabajo me voy a ocupar exclusivamente de lo que Wittgenstein tenía que decir sobre la inducción. Procederé como sigue: rápidamente recordaré lo que normalmente se entiende por 'inducción matemática'; acto seguido, intentaré reconstruir lo que Wittgenstein tiene que decir al respecto; en tercer lugar, consideraré algunas críticas que se le han hecho y terminaré con algunas breves consideraciones sobre su posición global.

Supongo que estará de más, pero de todos modos empezaré por recordar que al hablar de inducción se puede aludir a dos procedimientos diferentes, uno empleado en las ciencias naturales y el otro empleado en las ciencias formales. Hay paralelismos entre ellos, pero ciertamente no son lo mismo. El primero es un procedimiento que lo que arroja es un resultado probable. Lo que se afirma es lo siguiente: si siempre que sucede *A* sucede *B* y no se ha dado el caso de que se dé *A* pero no se dé *B*, entonces mientras más veces se dé *A* más probable será que en la siguiente ocasión en que se dé *A* también se dé *B*. Así, si no hay contraejemplos, las predicciones de futuras apariciones de *B* después de las de *A* se irán progresivamente acercando a la certeza. Ahora bien, con lo que se conoce como 'inducción matemática' no se alude a probabilidades de ocurrencias, porque lo que la inducción matemática genera son **pruebas**. La inducción matemática es un método que sirve para hacer demostraciones de cierta clase, más concretamente para hacer demostraciones que conciernen a conjuntos **infinitos**. De hecho, el principio de inducción es el quinto postulado de Peano gracias al cual se puede definir cualquier **progresión**, como la conformada por los números naturales. Una prueba por inducción matemática tiene una determinada estructura y con ella se procede como sigue:

a) se demuestra que un objeto cualquiera (la base de la inducción) tiene una cierta propiedad
b) se asume que para cualquier objeto x del conjunto considerado elegido arbitrariamente tiene la propiedad en cuestión y se prueba entonces que si x tiene la propiedad entonces el siguiente elemento $(x + 1)$ también la tiene (hipótesis inductiva)
c) se concluye entonces que **todos** los objetos del conjunto en cuestión tienen la propiedad considerada

Demos un ejemplo. Supongamos que queremos probar que los números naturales al dividirse por sí mismos dan como resultado la unidad. Se prueba eso para, digamos, el número 20. Se muestra que $1 \div 1 = 1$. Acto seguido se prueba que, si lo mismo vale para cualquier número natural arbitrariamente elegido, entonces vale por igual para el siguiente. Una vez efectuada esta prueba se concluye que **todos** los números naturales tienen la propiedad en cuestión.

Aquí es preciso trazar una distinción, obvia y por lo tanto en general obviada, a saber, que una cosa es saber hacer demostraciones por inducción, es decir, haber asimilado una cierta técnica, y otra es **saber dar cuenta de lo que se hace cuando se demuestra algo por inducción**. A quien sabe hacer demostraciones le parece auto-evidente lo que hace, pero yo creo que eso en general es una equivocación y que las cosas no son tan simples como parecen. Intentemos explicar esto.

Lo primero que hay que recalcar es que las pruebas por inducción matemática sólo sirven para conjuntos infinitos de "objetos" (números, conjuntos, proposiciones), pero no para conjuntos finitos, por inmensos que sean. Por ejemplo, no se puede demostrar nada por inducción matemática en relación con el número de estrellas del universo o el número de granos de arena de todos los océanos y mares del planeta. O sea, ahí donde la enumeración es **lógicamente posible** la inducción matemática automáticamente se vuelve inservible. Esto, empero, tiene una explicación filosófica, pero una manera de hacer ver que ello es así es la siguiente: supongamos que alguien quiere probar por inducción matemática algo en relación con las estrellas del universo. De seguro que si tiene sentido ofrecer una prueba así también lo tiene ofrecer la misma prueba para un conjunto con una estrella menos y si esto último tiene sentido, entonces también lo tendrá ofrecer una prueba para un conjunto de estrellas con dos elementos menos, con tres elementos menos, etc., y así sucesivamente hasta llegar a ofrecer una prueba por inducción matemática para un conjunto de, digamos, 5 estrellas. Pero es obvio que es absurdo ofrecer una prueba por inducción para un conjunto de 5 elementos. Es sólo si una prueba así tuviera sentido que también tendría sentido en el caso de la totalidad de las estrellas del universo. Es evidente, sin embargo, que no son diferencias entre cantidades lo que es determinante. Lo que se requiere es un cambio cualitativo y eso se logra cuando se pasa del universo de lo finito, por inmenso que sea, al de lo transfinito. Es en el universo de lo infinito que el método de inducción matemática **tiene sentido**. Pero ¿por qué tendría que ser así?

El punto crucial es que la inducción matemática es un método de prueba que sólo puede ser usado en relación con "entidades" entre las cuales se pueden establecer relaciones **formales**. Eso no pasa con las estrellas ni con los granos de arena, por la simple razón de que las entidades empíricas no tienen propiedades hereditarias. Es con las entidades abstractas con las que es posible imponer un orden formal lo que permite aplicar la inducción y así alcanzar la conclusión deseada. Esto es así precisamente porque "entidades" formales como los números se rigen por leyes o reglas puramente formales y éstas permiten establecer un orden lógico entre ellas. En todo caso, es porque se trabaja con conjuntos infinitos de entidades abstractas y formales que los matemáticos se vieron forzados a diseñar un procedimiento especial para poder trabajar con ellos. Obviamente, la inducción matemática no se ejerce o corre sobre entidades naturales.

Es interesante notar que un pensador tan perspicaz como Russell no pudo nunca dar cuenta de la inducción, a pesar de usarla en multitud de ocasiones. En el capítulo II de su libro *Los Principios de las Matemáticas*, justo cuando empieza a explicar lo que es la inferencia lógica, Russell dice en una nota:

> Podría igualmente bien decir de inmediato que no distingo entre inferencia y deducción. Lo que se llama inducción me parece que es o deducción disfrazada o un mero método para hacer suposiciones plausibles (Russell 1989: 11)

Por lo pronto, yo creo que la pregunta que a nosotros nos incumbe hacer es: ¿qué se hace cuando se razona por inducción matemática? Esta pregunta recibe una respuesta muy iluminadora por parte de Wittgenstein en sus *Observaciones Filosóficas*, como intentaré hacer ver.

III. Wittgenstein sobre la inducción

Salta a la vista que una prueba por inducción matemática no tiene la misma forma que una prueba directa de, *e.g.*, una ecuación. Es obvio que no puede haber pruebas directas cuando el conjunto involucrado es, en un sentido no trivial, no denumerable. Pero entonces ¿qué es probar algo en relación con lo cual una prueba, por así llamarla "empírica" o directa, es por principio inasequible? ¿Cómo se puede lograr algo así de otro modo? A diferencia de quienes no saben más que parafrasear el principio de inducción, Wittgenstein tiene una concepción precisa y esclarecedora del tema, esto es, de lo que él llama 'prueba recursiva'. Y una primera observación que hace es en el sentido de que

> Lo que llama la atención de una prueba recursiva es ante todo que lo que pretende probar no es lo que sale (Wittgenstein 2008: 183)

Lo que se quiere probar es que **todos** los elementos de un conjunto infinito tienen tal o cual propiedad. Debería quedar claro, por consiguiente, que una prueba por inducción estrictamente hablando **no demuestra nada** en relación con la totalidad infinita de que se trate, digamos la serie de los números naturales. No es eso lo que hace, puesto que si se empezara a hacer el recorrido por el conjunto de los números naturales nunca se terminaría de hacer las demostraciones y por lo tanto la prueba nunca podría consumarse. Si lo que por medio de la inducción se obtiene es una prueba, entonces tiene que estar involucrada de uno u otro modo una **ley**. Consecuentemente, lo que Wittgenstein hace ver es que lo que en realidad se argumenta es que una regla o una ley puede en principio aplicarse un número infinito de veces, es decir, las veces que se quiera. Dice Wittgenstein:

> No deberíamos confundir la posibilidad infinita de la aplicación con lo que realmente se probó. La posibilidad infinita de la aplicación no está probada (Wittgenstein 2008: *Ibid.*).

O sea, no se prueba que todos **y cada uno** de los elementos del conjunto infinito que nos ocupa tienen tal o cual propiedad. Lo que se prueba es que, dada la homogeneidad formal de sus elementos y el orden formal que los rige, se puede repetir la misma demostración tantas veces como se quiera. De lo que la inducción matemática nos convence es de que en todo momento podemos demostrar para cualquier objeto arbitrariamente elegido del conjunto relevante que tiene la propiedad que nos interesa. Pero esto a menudo no se entiende porque, como bien lo señala Wittgenstein:

> el error común consiste en confundir la extensión de su aplicación con lo que ella propiamente contiene (Wittgenstein 2008: *Id.* 183-84).

Cabe preguntar: después de todo ¿por qué o cómo es que una prueba inductiva **puede** en efecto ser vista como una demostración exitosa? Porque lo único que hace es **indicar** que, dado el conjunto sobre el que corre, si se prosigue del mismo modo se demostrará en cualquier caso particular que el objeto que nos interese considerar efectivamente tiene la propiedad relevante. Wittgenstein ilustra esto sirviéndose de la idea de una espiral. Es obvio que con la prueba no se recorre nunca el "todo" de la espiral, que es infinito. Lo que en cambio sí hace es mostrar que en una sección se cumple lo estipulado por la regla y asegurarnos que, si no hay cambios, en el siguiente segmento o en la siguiente sección de la espiral la condición se volverá a cumplir, puesto que la espiral es la misma en todos los casos. De hecho, lo que la prueba por inducción realmente hace es establecer una ley. En palabras de Wittgenstein:

> La prueba muestra la forma de espiral de la ley (Wittgenstein 2008: *Id.* 187).

O sea, se prueba algo que se repite, que es recurrente (recursivo), porque en todos los casos particulares de aplicación lo que se demuestra es que elementos homogéneos del conjunto que se esté considerando comparten una misma propiedad formal. Como dice Wittgenstein:

> Una prueba recursiva es únicamente una indicación general para cualquier prueba especial. Es un letrero que le indica a todas las proposiciones de una forma un camino particular determinado para llegar a casa. Ella le dice a la proposición 2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4: 've en esta dirección (corre a lo largo de esta espiral) y entonces llegarás a casa' (Wittgenstein 2008: *Id.* 186).

Casi dan ganas de decir que es gracias a su peculiar "ontología" que una prueba por inducción puede culminar con una afirmación concerniente a una totalidad como "… Y por lo tanto $(n)\ \phi n$". Es porque el número 8 es "ontológicamente" como el 9, como el 10, como el 28734 y así indefinidamente, que **se puede concluir** que lo que se probó para la base y se demostró que si cualquier número tomado al azar tiene la propiedad en cuestión el siguiente (puesto que el conjunto está bien ordenado) también la tiene, vale **para todos** los números naturales. Lo único que se hace por medio de una prueba por inducción es mostrar que una determinada propiedad es, por así decirlo, transmisible o hereditaria y eso sólo puede suceder cuando la prueba es de carácter formal y recae sobre entidades que son ordenables formalmente. Si las "entidades" sobre las cuales se corre la inducción no fueran de carácter formal, entonces la inducción no se podría probar, es decir, en ese caso no habría tal cosa como prueba por inducción matemática. Una prueba por inducción es simplemente una indicación de que se pueden ofrecer pruebas efectivas particulares en relación con cualquier elemento del conjunto considerado. Escribe Wittgenstein:

> ¿En qué medida entonces se puede llamar a una indicación para pruebas como esa la prueba de una proposición general? (¿No es ello como querer preguntar: '¿en qué medida se puede llamar camino a un poste indicador?').

> No obstante, de seguro que ella justifica la aplicación de **A(c)** a los números. ¿No tiene después de todo que haber una transición legítima del esquema de la prueba a esta expresión? (Wittgenstein 2008: *Ibid.*).

En otras palabras, lo que la prueba por inducción me garantiza es la posibilidad de efectuar tantas demostraciones particulares como se quiera. La prueba por inducción indica cómo se puede demostrar algo en cualquier caso particular. Por otra parte, Wittgenstein nos llama la atención sobre el hecho de que la prueba por inducción matemática no es una prueba algebraica sino numérica, por lo que la generalidad que se requiere está representada en este caso por números, no por letras. Afirma:

> Esta generalidad no radica más en las letras, sino más bien en números determinados y consiste en que se puede repetir la prueba (Wittgenstein 2008: *Id.* 187-88).

Lo que tenemos que entender es, pues, que la inducción matemática es una prueba de una clase diferente a las pruebas que normalmente se hacen en matemáticas. Es una prueba que permite que se efectúen otras pruebas. Explica:

> Una inducción no prueba una proposición algebraica, porque sólo una ecuación puede probar una ecuación. Pero justifica el restablecimiento de ecuaciones algebraicas desde el punto de vista de su aplicación a la aritmética (Wittgenstein 2008: *Id.* 191).

Una ecuación matemática tiene como objetivo encontrar valores apropiados concretos para las variables. Es cuando se encuentran que la ecuación quedó resuelta. En palabras de Wittgenstein

> La proposición algebraica siempre obtiene un significado aritmético sólo cuando se remplazan en ella letras por cifras y entonces obtiene siempre sólo un significado aritmético **particular** (Wittgenstein 2008: *Id.* 193).

Pero ¿cuál es entonces la relación entre una prueba algebraica usual y una prueba por inducción? La inducción muestra que pruebas particulares como esa se pueden efectuar tantas veces como se quiera.

> Su generalidad no radica en sí misma, sino en la posibilidad de su aplicación correcta. Y para ello tiene siempre que recurrir una y otra vez a la inducción.
>
> O sea, ella no asevera su generalidad, no la formula, sino que esta generalidad se muestra en la relación formal con la sustitución, la cual resulta ser un termino de una serie inductiva (Wittgenstein 2008: *Ibid.*).

La inducción garantiza una posibilidad, pero ello no equivale a una prueba directa de ningún caso en particular. Como bien lo señala Wittgenstein

> Una inducción no puede justificar una ecuación (Wittgenstein 2008: *Id.* 194).

Sin duda una ventaja muy importante del enfoque wittgensteiniano es que permite hacer una descripción minuciosa de lo que es proceder en matemáticas inductivamente sin caer en la mitologización usual. En este caso, por ejemplo, la explicación wittgensteiniana cancela el peligro de tener que asumir como reales, en el sentido de "empíricamente dados", conjuntos infinitos, como por ejemplo el conjunto de los números naturales. La prueba por inducción, cuando es sobriamente entendida, no requiere que se asuma como dada de golpe la totalidad de los números naturales, es decir, no presupone la idea de un infinito actual. La explicación wittgensteiniana procede, por así decirlo, de abajo hacia arriba, en tanto que las explicaciones usuales, que básicamente son el resultado de lecturas simplistas del ejercicio matemático, proceden al revés, esto es, parten **asumiendo** acríticamente la existencia de la totalidad de los números naturales cuando en realidad dicha totalidad es más que otra cosa la expresión de una ley, por ejemplo de la ley que dice que no hay tal cosa como el número más grande de todos puesto que siempre se puede añadir 1 a cualquier número; el resultado sería el número natural inmediatamente más grande y que ese proceso de adición no tiene fin.

Es obvio que no todo en matemáticas se resuelve mediante ecuaciones. A menudo se requiere hacer pruebas generales concernientes a propiedades que tienen todos los números naturales, todos los números primos, todos los números irracionales, etc. La inducción, por lo tanto, es indispensable para la expansión matemática. Lo que tiene que quedar claro es que en el sentido en que uno puede resolver una ecuación de segundo grado mediante una fórmula y probar un resultado particular la inducción matemática ciertamente **no** es una prueba. En otras palabras, la demostración por inducción no se reduce a un proceso de sustituciones. No es que mediante una prueba por inducción se recorra, por ejemplo, en un *flash*, la serie infinita de los números naturales, probando algo en cada caso. Pero si no es eso lo que hace, entonces ¿cuál es su objetivo? Mediante una prueba por inducción lo que se hace es postular algo, estipularlo. Naturalmente, una postulación así no tiene absolutamente nada de arbitrario. Dice Wittgenstein:

> Es por eso que lo que ya no puede reducirse a otras ecuaciones y sólo puede justificarse por inducción es una **estipulación** (Wittgenstein 2008: *Id.* 191).

Puede parecer una perogrullada, pero no estará de más señalar que una prueba prueba lo que prueba y no otra cosa. No se le puede atribuir a una prueba por inducción algo que ésta **no** hace**.** Con una prueba por inducción no se hace ningún recorrido. Si algo así se hiciera, ello tendría que quedar reflejado en la prueba misma, pero no es eso lo que sucede. Señala Wittgenstein:

> Si hubiera todavía algo fuera de la inducción para lo cual **ella** fuera un signo, este algo tendría que tener su expresión específica, que no sería más que la expresión completa de ese algo (Wittgenstein 2008: *Id.* 190).

Yo creo que estamos en posición de afirmar que a través de estos poco numerosos pensamientos Wittgenstein nos ofrece un cuadro diferente de la inducción matemática, un cuadro que encaja a la perfección con ideas que defiende en otros sectores de la filosofía de las matemáticas y también un cuadro que a mí me parece sumamente convincente. Por ello pienso que si Wittgenstein estuviera equivocado entonces tendría que estarlo **en todo**, es decir, todo lo que él sostiene tendría que estar mal, por la simple razón de que su filosofía de las matemáticas post-tractariana es una filosofía muy rica en intuiciones y congruente. Dudo, por lo tanto, que esté equivocado. Hay que señalar, sin embargo, que (como era de esperarse) no ha faltado quien quede insatisfecho con sus puntos de vista sobre la inducción. En lo que sigue, me ocuparé rápidamente de dos críticos de Wittgenstein tratando de hacer ver por qué sus objeciones son fallidas.

IV. Críticas de la postura wittgensteiniana

Las ideas de Wittgenstein sobre la inducción (como sus ideas sobre la probabilidad) no han sido mayormente discutidas, pero hay de todos modos algunos buenos artículos al respecto escritos por eminentes filósofos de la lógica y de las matemáticas. Tengo en mente, por ejemplo, los artículos "Tractarian Logicism: Operations, Numbers, Induction", de G. Landini, y "Moore's Notes and Wittgenstein's Philosophy of Mathematics: the Case of Mathematical Induction", de W. Goldfarb. Sobre algunas de las ideas de estos filósofos quisiera decir unas cuantas palabras.

El ensayo de Landini es, como tantos otros de sus escritos, un ensayo plagado de tecnicismos y la sección dedicada a la inducción es con mucho la más corta y, pienso, la menos convincente. Landini está interesado en mostrar que el punto de vista de las *Observaciones Filosóficas* no es más que la continuación de lo expuesto en el *Tractatus*, tesis que me parece de entrada si no totalmente falsa, casi. Lo nuevo es quizá la idea de espiral, que no es más que la simbolización plástica de una ley. La implicación importante de ver así las pruebas por inducción es que, de acuerdo con Landini, Wittgenstein se libera del yugo de la cuantificación ilimitada. Dice Landini:

> Esta precisamente parece ser la idea detrás de nuestro Tract Induct. Habiéndosenos dado las operaciones (funciones) que sabemos que son recursivas, somos susceptibles de ver una forma espiral que emerge de los cálculos de estas funciones recursivas en una ecuación que las involucra. Esto, en opinión de Wittgenstein, evade los cuantificadores ilimitados usados en la cláusula inductiva de la prueba tradicional por inducción matemática (Landini 2021:1006)

Nótese que aquí parece estar involucrada una confusión: Landini parece cuestionar la validez de lo que Wittgenstein sostiene sobre la inducción matemática vinculándolo con lo que tiene que decir sobre la naturaleza del infinito. Yo creo que el tratamiento de la inducción por parte de Wittgenstein es desde luego congruente con su explicación del infinito, pero también que es lógicamente independiente de ella. De acuerdo con Landini, la posición de Wittgenstein es problemática porque de hecho altera la naturaleza de la inducción matemática, de la cual sería parte esencial la idea de cuantificación ilimitada. Afirma Landini:

> Todo esta bien, salvo por el hecho de que el Tract Induct (viendo la espiral, comprendiendo el 'y así sucesivamente') requiere que podamos razonar a partir de un uso de numerales **a**, **b**, etc., estable y fijo (si bien esquemático y arbitrario). Esto tiene serias limitaciones sobre las pruebas inductivas puesto que está lejos de ser claro que dicho uso estable y fijo de los numerales baste. Así, a pesar de que Wittgenstein tiene un enfoque que da cuenta del problema de Ramsey de la cuantificación y a pesar de que captura el Tract Induct, el uso de la cuantificación ilimitada sigue siendo esencial. La inducción matemática en su forma esencial se pierde y Wittgenstein parece perfectamente dispuesto a vivir sin ella (Landini 2021: *Id.* 1005-06).

Esto obviamente es un punto de vista sumamente dogmático por parte de Landini, porque es evidente que Wittgenstein no pretende alterar absolutamente nada. La prueba, su estructura y su aplicación son lo que son y nada más. Lo que Wittgenstein hace es más bien una lectura diferente de la usual y lo que Landini sostiene es que cualquier lectura alternativa de la prueba la modifica. Yo creo que eso es un error. Ahora bien, es sobre la base de lo dicho que él presenta lo que al parecer es el "argumento" que él considera definitivo en contra de lo que Wittgenstein sostiene. Dice:

> Ver la espiral como algún segmento finito del trayecto inductivo descendente que lleva hacia la base no puede él mismo asegurar que las funciones recursivas involucradas no se separan de la espiral en algún lugar en el trayecto descendente. El problema, en pocas palabras, radica en que no se puede transitar de **cualquier** (any) a **'todo'** (every) inclusive si el trayecto descendiente de una función recursiva

> hasta su base es siempre finita. La lógica combinatoria recursiva y la aritmética descansan en el concepto de **cualquier** (any), i.e., en la cuantificación limitada. Aunque lo limitado pueda ser de cualquier altitud finita, y aunque uno pueda inventar funciones recursivas para reajustar la altura, ello no puede nunca capturar la noción de **todos** (all) que se necesita para pruebas de inducción matemática (Landini 2021: *Id.* 1006).

A menos de que yo esté totalmente equivocado, el argumento de Landini es una espléndida petición de principio. Es un error un tanto extraño pensar que por elaborar una concepción alternativa de un procedimiento o de un método éste se ve alterado. Eso es absurdo. Lo que Wittgenstein propone es simplemente una aclaración diferente de cómo se llega al "todos". No se necesita, de acuerdo con Wittgenstein, **asumir** como efectivamente dado el conjunto infinito de los números naturales por la simple razón de que él da cuenta del infinito de otro modo. Obviamente, no siendo él un platonista difícilmente podría aceptar la interpretación realista de la cuantificación que Landini hace suya. El punto de vista de Wittgenstein, que con lucidez Landini expone, es más bien que la inducción matemática es ante todo un procedimiento para hacer demostraciones que versan sobre entidades formales y por lo tanto ordenadas en una serie de tal manera que probar por inducción algo en relación con un sector, por mínimo que sea éste, permite después generalizar, porque la generalización se funda en lo que podríamos llamar 'identidad de estructura' o, si se prefiere, 'homogeneidad óntica' o, quizá mejor, 'identidad formal'. Es evidente, creo, que con la inducción en ningún momento se recorre la serie completa de los números naturales por la sencilla razón de que eso es algo que no se puede hacer, pero entonces ¿por qué se tendría que suponer que dicho conjunto está ya ahí? Landini no ofrece un solo argumento que permita desmantelar la posición de Wittgenstein. De hecho, Goldfarb mismo, refiriéndose a Wittgenstein, expone la idea que defiendo de manera sucinta y clara como sigue:

> … él no ataca las matemáticas, sino únicamente la prosa acerca de las matemáticas (Goldfarb 2018: 252).

Debo por lo tanto concluir diciendo que no percibo en el escrito de Landini ningún argumento contundente en contra de la posición desarrollada por Wittgenstein sobre la inducción.

Por su parte, Goldfarb efectúa lo que sin duda es una reconstrucción fiel a Wittgenstein. Él capta muy bien su idea de acuerdo con la cual:

> la inducción matemática no es un principio sino más bien una ley para la construcción de ejemplos (Goldfarb 2018: *Id.* 251).

El problema, según Goldfarb, es que Wittgenstein es ambiguo por cuanto sugiere, en relación con las pruebas por inducción,

> tanto que pueden no ser pruebas, o al menos no en el mismo sentido (supuestamente estándar) en que lo es una prueba de $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, como también que pueden funcionar como pruebas, como una representación de una serie formal (Goldfarb 2018: *Id.* 252).

Pienso que Goldfarb está en un error, pero creo también que éste se debe más que a otra cosa a un simple descuido. Explícitamente, en diversas ocasiones Wittgenstein (como Goldfarb mismo lo señala, dicho sea de paso) insiste en que en matemáticas hay dos clases de pruebas. Moore lo reporta como sigue:

> En (I) dijo que había dos especies muy diferentes de proposiciones usadas en matemáticas, "ninguna de las cuales en lo absoluto parecidas a lo que usualmente se llaman proposiciones". Estas eran (I) proposiciones probadas mediante una cadena de ecuaciones, en las que se procede de axiomas a otras ecuaciones por medio de axiomas y (2) proposiciones probadas por "inducción matemática". Y añadió en (III) que las pruebas de la segunda especie, a las que llamaba "pruebas recursivas", no son pruebas en el mismo **sentido** en el que lo son las pruebas de la primera especie. Añadía que la gente constantemente comete la falacia de suponer que 'verdadero', 'problema', 'buscar', 'prueba' siempre significan lo mismo, en tanto que de hecho esas palabras 'significan cosas enteramente diferentes' en diferentes casos (Moore 1970: 301).

Así, pues, no es que Wittgenstein le niegue el *status* de prueba en un sentido estricto a una prueba por inducción matemática, sino que más bien reconoce en ella una prueba **de una especie diferente**. Ciertamente, las pruebas por inducción no son demostraciones deductivas en las que se avance a base de sustituciones de signos, pero son también **pruebas** en un sentido estricto. Las pruebas usuales son demostraciones concernientes a casos particulares, números particulares (los valores de las variables), pero las pruebas por inducción, como ya se vio, no son así. Infiero que la crítica de Goldfarb no tiene mayor peso.

Hay, en cambio, un tema en relación con el cual lo que Goldfarb señala es no sólo acertado sino una contribución al esclarecimiento del punto de vista de Wittgenstein. Lo que dice tiene que ver con la estructura de la prueba. Al examinar críticamente el teorema de Skolem sobre la asociatividad de la adición, Wittgenstein señala una falacia consistente en una especie de circularidad. Goldfarb presenta su punto crítico como sigue:

> El argumento, pienso, es más o menos este: que las variables son variables numéricas, es decir, que corren a lo largo de los enteros se tiene que dar por algún procedimiento, esto es, por medio de alguna **ley**; y la única ley que cubre la cuenta es la inducción matemática. (…) De ahí que antes de la inducción no podamos comprender lo que '**c**' está haciendo en la hipótesis inductiva. Y eso es circularidad (Goldfarb 2018: *Id*. 247-48).

Para nuestros propósitos, sin embargo, no es la crítica de Wittgenstein a Skolem lo que es relevante. Lo que para nosotros es importante es la moraleja wittgensteiniana de la crítica. Goldfarb lo expone de este modo:

> El alegato de una circularidad se basa en una especie de impredicatividad conceptual: no se puede comprender la hipótesis inductiva sin comprender la aplicación de la inducción matemática, de modo que no se puede considerar que la hipótesis inductiva tiene un sentido independiente de ella (Goldfarb 2018: *Id*. 248).

O sea, la hipótesis inductiva no tiene ningún significado matemático considerada aisladamente. Adquiere sentido sólo porque tomándola como base se pueden hacer aplicaciones concretas en casos concretos (en general de números, mas no únicamente). Y aquí regresamos a un tema que tocamos al inicio de la tercera sección, a saber, es porque las "entidades" sobre las que se corre la inducción son "formales" y, por consiguiente, que están bien ordenadas que el método funciona. Y es así entendido como la explicación wittgensteiniana no sólo adquiere sentido, sino que se vuelve realmente explicativa.

V. Conclusión

Las *Philosophische Bemerkungen* son, en mi opinión, el libro más optimista de Wittgenstein y me parece que las consideraciones que hemos vertido sobre la inducción apoyan dicha apreciación. Lo interesante del tratamiento de la inducción matemática por parte de Wittgenstein es que éste desarrolla un punto de vista que no es ortodoxo, pero que es perfectamente inteligible y defendible. Obviamente, sus reflexiones sobre el método de inducción matemática vienen engarzadas con consideraciones sobre otros temas, en especial sobre la naturaleza del infinito, de las cuales sin embargo no podremos ocuparnos en este ensayo.

Alejandro Tomasini Bassols
Instituto de Investigaciones Filosóficas – UNAM
altoba52@gmail.com

Bibliografía

Goldfarb, W (2018): "Moore's Notes and Wittgenstein's Philosophy of Mathematics: The Case of Mathematical Induction", *Wittgenstein in the 1930s. Between the Tractatus and the Investigations.* Edited by David G. Stern, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 241-252.

Landini, G. (2021): "Tractarian Logicism: Operations, Numbers, Induction", *The Review of Symbolic Logic*, vol. 14, Issue 4, pp. 973-1010.

Marion, M. (2003): "Wittgenstein and Brouwer" *Synthese* 137, pp. 103-127.

Monk, R (1990): *Wittgenstein. The Duty of Genius,* New York: The Free Press.

Moore, G. E. (1970): "Wittgenstein's Lectures in 1930'33", *Philosophical Papers* (London: Allen and Unwin.

Russell, B. (1989): *The Principles of Mathematics,* New York: W. W. Norton & Co.

Wittgenstein, L. (2008): *Observaciones Filosóficas*, México: UNAM/IIF.