Balance de la filosofía de la matemática en el siglo XX

ANTONIO CABA*

1. INTRODUCCIÓN

EN SU LIBRO *EN HONOR DEL ESPÍRITU HUMANO* (1987) Jean Dieudonné establece una clasificación de los problemas matemáticos en estériles y prolíficos. Pero, a juzgar por los ejemplos que cita de cada uno de estos casos, parece entenderse que el criterio que ha seguido para semejante clasificación no está basado de manera exclusiva en lo que han dado de sí unos u otros problemas. Pueden detectarse en ella, tanto sus personales preferencias de matemático, como algunos prejuicios ante cierto tipo de problemas; en particular, –quizá peco de malicioso– aquellos que interesan de manera especial a los filósofos de la matemática. Exceptuando estas apreciaciones, que sin duda pueden ser erróneas o al menos no totalmente compartidas, estimo adecuada la idea de un criterio que clasifique los problemas de las matemáticas en función de lo que han dado de sí a lo largo de su desarrollo, con lo cual tendríamos que someternos de alguna manera al dictamen de la historia.

Tomando sólo los aspectos positivos de esta idea, creo que podría intentarse un análisis paralelo y ofrecer una clasificación semejante en Filosofía de las Matemáticas (FM). Creo que cien años es tiempo sufi-

* Universidad de Málaga.

Filosofía actual de la ciencia, ed. Pascual F. Martínez-Freire
Suplemento 3 (1998) de *Contrastes. Revista Interdisciplinar de Filosofía*. [ISSN: 1136-9922], pp. 271-305

ciente para ver cómo unas ideas han tomado un camino abierto y prolífico, mientras que otras se han agotado y agostado de manera irrecuperable. Desde esta perspectiva histórica, podría plantearse una búsqueda de salidas para la situación actual –un tanto estancada– sin caer en el dogmatismo normativista en que parece incurrir Kitcher (1988), que, parafraseando a Dedekind, pretende determinar no cómo es la FM, sino cómo debería ser.

Nuestro objetivo va a ser mucho más modesto. Se trata de evitar el ámbito de la filosofía-ficción e intentar –a la luz de los caminos recorridos por la FM en los últimos años del siglo pasado– pergeñar, siquiera brevemente, un desiderátum de lo que sería deseable que constituyera la FM en el siglo que comienza en tan breve plazo. Un dato que espero que mi análisis ponga de manifiesto es que una gran parte de los desarrollos de este siglo se encontraban ya en germen a finales del anterior. Puede que esta circunstancia parezca coyuntural, pero estoy convencido de que igual sucede en la actualidad: es muy posible que estemos viviendo unos acontecimientos que van a condicionar lo que vaya a ser la FM en el siglo que empieza. Por eso creo que no es mala idea comenzar recordando algunos hechos relevantes que se produjeron hace casi exactamente cien años.

2. EFEMÉRIDES

Este final de siglo –casi podríamos decir, estos años, incluso estos días que nos toca vivir en la actualidad– se presenta cuajado de efemérides centenarias que, en gran medida, han condicionado todo el desarrollo de la filosofía de la matemática durante casi cien años. En particular, a lo largo de la década comprendida entre 1895 y 1905 hay todo un cúmulo de eventos tan destacados y decisivos, que creo vale la pena detenerse en algunos de los más relevantes.

Los manuales suelen reconocer que la publicación en 1897 del artículo de Burali-Forti «Una questione sui numeri transfiniti», supone la presentación oficial de las paradojas modernas. No obstante, su propio autor no estimó que hubiese una contradicción en el sistema de Cantor. Su intención fue, más bien, probar, por reducción al absurdo y con resultado negativo, una *open-question* que el propio Cantor había planteado, a saber, si la ley de tricotomía se cumplía para todos los números ordinales transfinitos. Teniendo en cuenta la trascendencia que se concede en los manuales a la aparición de las paradojas, no estaría de más observar –como ha puesto de manifiesto Garciadiego (1992)– que, contra la versión standard, las paradojas no hicieron su aparición, al menos de manera exclusiva, como resultado del rechazo a los planteamientos de Cantor.

Es más, tampoco estimularon por sí mismas la aparición de las escuelas fundacionales; a su juicio, es posible que los orígenes de las paradojas provengan de una pluralidad de fuentes.

Por su parte, ese mismo año de 1897 publica Cantor la segunda parte de su *Beiträge* (la primera había sido publicada dos años antes), que, si bien no ofrece nuevos progresos, supone una mejora y refinamiento en la presentación de resultados anteriores. Además de introducir por primera vez los álefs, en este artículo ofrece Cantor una demostración de la ley de tricotomía, que se le había negado a Burali-Forti, principalmente por haber utilizado el concepto de conjunto 'bien-ordenado' en un sentido diferente al que había empleado Cantor. Dos años más tarde, en una carta a Dedekind, Cantor apunta la posibilidad de que todo el asunto de las paradojas se deba a una distinción, que aún hoy día se mantiene, entre diferentes tipos de multiplicidades.

En el Congreso Internacional de Filosofía celebrado en París en 1900, tuvo lugar el encuentro de Russell con Peano, que puede decirse marca un punto de inflexión en su desarrollo intelectual. Lo que más atraía a Russell del italiano fue la claridad de conceptos que utilizaba, así como la notación, que él mismo adoptaría posteriormente. Asimismo en París, y el mismo año, tuvo lugar el II Congreso Internacional de matemáticos, en el que Poincaré afirmaría que el trabajo de rigorización efectuado a lo largo del siglo que terminaba había concluido con éxito y que se había alcanzado el rigor absoluto. Otro protagonista del mismo Congreso, David Hilbert, no se mostraba tan optimista y ofrecía una relación de los 23 problemas más importantes que los matemáticos del siglo venidero tendrían que resolver. En la actualidad, a un siglo de distancia, puede decirse que ni está próximo el acuerdo sobre lo que pueda constituir el rigor en matemáticas, ni los problemas que Hilbert planteara han sido resueltos en su totalidad.

Frege, a su vez, había publicado en 1893 la primera parte de *Grundgesetze*, en cuyo principio V se escondía la paradoja que Russell le comunicaría en 1902. Es de suponer, por tanto, que por estos días –hace exactamente un siglo– Frege estaría preparando la segunda parte de su libro, cuya aparición no tendría lugar hasta 1903. No obstante, la inconsistencia de su sistema ya está en curso, si bien sólo Russell, uno de los pocos lectores de Frege, la detecta.

3. EL INICIO

Hay un cierto grado de consenso en que la FM, tal como se entiende hoy día, tiene un origen temporal concreto. Creo que el problema sólo sería un caso más de erudición histórica si no tuviera una nada desdeñable influencia en el análisis de los acontecimientos posteriores. Hay que indicar que en la literatura actual aparecen dos posturas que destacan. En concreto, las que sitúan a Frege como *fons et origo* de la FM, y las que retrotraen ese momento hasta Kant. En ambos casos, como es obvio, relegan a un plano de menor importancia formulaciones anteriores, incluida la del propio Platón, lo cual es en cierto modo comprensible; ya lo es menos que sitúen a Dedekind y a Mill en la prehistoria.

En cualquier caso, siguiendo los planteamientos de Körner, entre otros, pienso que cabe otra alternativa más elástica. No creo que haya que situar históricamente el origen de la FM, puesto que, en última instancia, toda matemática está inserta en una filosofía, en un contexto filosófico, que en definitiva supone una determinada *Weltanschauung* no formulada. De hecho, a lo largo de la historia de la filosofía, se observa que la particularidad de la matemática la ha convertido en asunto central para muchos filósofos, que se han visto obligados a dar una explicación que justifique el comportamiento *sui generis* de nuestra ciencia. Así pues, entiendo que la FM va emparejada, tanto a la matemática, como a la propia filosofía desde la que pretende ser explicada; y la relación de dependencia entre ambas es un problema que todavía sigue candente. Véase si no De Lorenzo (1992) y Rota (1991).

Entre las diferentes paternidades atribuidas a Frege está la de la FM. Se tenga o no razón, no cabe duda de que su pensamiento continúa vigente tras algo más de un siglo, y no cesan de aparecer estudios basados en una nueva y fructífera lectura de su obra. Sus originales ideas han sobrevivido a los fracasos parciales que supusieron, tanto la paradoja detectada por Russell, como el abandono del logicismo, y han constituido el núcleo de lo que algunos autores han dado en llamar el neofregeanismo. Los defensores de esta primacía fregeana consideran que en él se encuentran ya bosquejados todos los planteamientos de lo que ha constituido en su mayor parte la FM de este siglo. Es decir, que, entre lo que Frege admite y lo que excluye, se encuentran pergeñados los movimientos que a finales de nuestro siglo ya pueden considerarse como clásicos. Su adhesión a lo que más tarde constituiría el logicismo no es sino la alternativa que –por exclusión de las restantes– considerará viable.

La posibilidad de que la aritmética pueda considerarse como *a posteriori*, siguiendo la tradición de Mill, es algo que Frege no puede admitir y que ataca incluso con cierto sarcasmo. A partir de aquí, Frege se ve obligado a reconocer el carácter a priori de la aritmética, y en este punto se le presentan dos alternativas. Una de ellas obligaría a fundamentar la aritmética en algún tipo de intuición al modo kantiano; pero, según Frege, Kant se equivocó al atribuir carácter sintético a los enunciados de la aritmética (no así en el caso de la geometría). Según la otra, que a la postre elegiría, las verdades aritméticas se derivan en última instancia de la lógica, a la que se habrá añadido el vocabulario especial de la aritmética vía definiciones. El formalismo, por último, es una opción a la que Frege había atacado con virulencia, y cuyo rechazo se recrudeció en su disputa con Hilbert acerca del método axiomático en los primeros años del siglo. Así pues, entre lo que Frege adopta y lo que excluye se encuentran los movimientos fundacionales que ocuparían a los filósofos de la matemática durante el primer cuarto de siglo.

Pero hay autores que optan por un punto de partida aún más remoto y admiten sin ambages que la FM de los dos últimos siglos no es sino un diálogo permanente con la obra de Kant, ya sea para apoyarse en ella y desarrollarla, ya sea para rechazarla. Simpson (1988), por ejemplo, considera los movimientos fundacionales como meras variantes del kantismo. Algunas de las razones aportadas en defensa de esta tesis, por otra parte, son obvias, puesto que –en última instancia– el punto de partida de Frege es, precisamente, su intento de perfeccionar el pensamiento de Kant en lo referente a la aritmética. Ésta es básicamente la tesis de De Lorenzo (1992), quien observa que no sólo el logicismo, también las otras escuelas fundacionales tienen su punto de arranque en Kant, como puede apreciarse en los planteamientos iniciales de Hilbert y Brouwer. Por otra parte, el caso de Kant es un tanto peculiar, puesto que, si bien no escribió tratado específico sobre FM, toda su obra pivota sobre el quehacer matemático, en tanto que uso constructivo de la razón, llegando incluso a criticar a los propios matemáticos por no filosofar sobre su propia ciencia. Pero en última instancia, todo el desarrollo kantiano no es sino una herencia platónica que busca certidumbre e intemporalidad en el conocimiento humano; en este sentido, las tres escuelas fundacionales trataron de reservar para las matemáticas –cada una por un camino diferente, pero sin excepción– el papel especial que Kant les había asignado.

4. FUNDACIONISMO

Hay un acuerdo casi unánime en que, según la 'concepción heredada' desde Frege, el único papel reservado a la FM es el de la búsqueda de fundamentos. Desde este planteamiento se entiende y se justifica la aparición de las escuelas fundacionales, máxime cuando tras las paradojas comenzó a sentirse entre los propios matemáticos la necesidad de una fundamentación para su ciencia. No obstante, hay quien cuestiona (Kitcher 1990) que ésta sea la única motivación por la que los matemáticos se ven impelidos a una fundamentación.

Evidentemente no es el momento de desarrollar los planteamientos de las escuelas fundacionales, pero sí quisiera hacer algunos comentarios al propio hecho del fundacionismo en tanto que fenómeno histórico. No deja de aparecer en publicaciones recientes que una de las características de la FM actual es precisamente la constatación de que el fundacionismo está caduco. Si se especifica que esa referencia alude al fundacionismo tal como se concibió en sus orígenes, entonces la aseveración puede considerarse correcta, pero –no obstante– convendría matizarla, tal y como pretendo hacer *infra*. En cualquier caso, la época fundacional ha de considerarse como un período irrepetible en la historia, no ya de la FM, sino de la propia matemática. Y esto por varias razones.

En primer lugar conviene destacar que es la primera vez (y por el momento la única) en que matemáticos profesionales deciden bajar a la arena de la discusión filosófica para hablar acerca de su ciencia. Es cierto que Frege y Russell no destacaron como matemáticos en sentido estricto, pero en los otros casos la situación es bien diferente. Brouwer había realizado importantes estudios en campos concretos de la matemática, en particular, en topología algebraica. Respecto a Hilbert, su importancia en la matemática de la última parte del XIX y principios del XX es innegable, abarcando prácticamente todos los campos.

No cabe duda de que esta etapa supone un antes y un después en FM, y en este sentido, el tratamiento fundacionista afectará directamente a la manera de entender la matemática desde su propio ámbito. Las claves del pensamiento fundacionista, por otra parte, continúan siendo un referente obligado aún en la actualidad. De hecho, si a las tres escuelas consideradas ya como clásicas se les añade el platonismo, tenemos prácticamente las cuatro caracterizaciones que con más frecuencia aparecen en los manuales.

5. EL CONVENCIONALISMO NEOPOSITIVISTA

Los filósofos reconocen que la moderna filosofía de la ciencia nace en las discusiones del Círculo de Viena. Sus miembros, interesados por toda actividad científica, no podían permanecer ajenos a la convulsión que tenía lugar en FM. De entre los tres movimientos fundacionales, entendieron que era el logicismo el que mejor se adaptaba a sus exigencias, si bien no podía mantenerse en el maltrecho estado en que había quedado tras Frege. Por eso, puede decirse que, aunque conservaron gran parte de la herencia fregeana, desecharon otros aspectos no menos relevantes. En concreto, coincidieron con Frege, tanto en su oposición a la fundamentación intuicionista de las matemáticas, como en el rechazo del empirismo milleano; no compartieron, en cambio, con el maestro su visión acerca de la lógica y de la semántica.

Este distanciamiento se debió principalmente a las acotaciones introducidas tras la lectura del *Tractatus*, que obligaron a los miembros del Círculo a replantearse su posición logicista, lo cual acabaría repercutiendo en su propia visión de las otras doctrinas fundacionales. El reduccionismo convencionalista al que llegaron se fundamentaba en que si se acepta la idea de que las verdades matemáticas se basan en los principios de la lógica más definiciones, se tendría la falsa apariencia de que son necesarios dos tipos de principios para fundamentar las matemáticas. Como alternativa, lo que recomendaron fue considerar que la propia lógica incorpora tácitamente las definiciones que se hayan fijado merced al vocabulario lógico, a las conectivas y a los cuantificadores. De esta manera el *corpus* completo de la lógica y de las matemáticas puede concebirse como simple elaborador de las convenciones que subyacen a nuestro lenguaje, es –en definitiva– la puesta a punto del lenguaje. En resumen, lo que se produjo fue una transición genuina desde una versión del logicismo, en la que los principios de la lógica se entendían como fundamentales a todo pensamiento, hasta otra, en la que la lógica era verdad por convención.

Pero –como ya he indicado– este nuevo planteamiento convencionalista, tomado al hilo de las ideas de Frege, no sólo afectó al logicismo, sino que también permitió una reestructuración de los otros movimientos fundacionales que, en cierto modo, reducía la tensión creada entre las tres escuelas. Así, los positivistas lógicos pudieron acomodar ciertas ideas del formalismo y eliminar, al menos en parte, las críticas intuicionistas a la matemática clásica. En cualquier caso, salvo cuestiones de detalle, la asimilación del formalismo era algo que no sólo no chocaba, sino que se vislumbraba compatible con los planteamientos positivistas. En definitiva, la sintaxis lógica de Carnap no fue sino una formalización del logicismo; hay quien dice que fue una rendición al formalismo. Cabría decir, según esto, que los positivistas dieron por vencedor a Hilbert en su célebre disputa con Frege acerca de la naturaleza del método axiomático (Mosterín 1980). Recuérdese que uno de los puntos más importantes de esta discusión se había centrado en la propuesta hilbertiana de que el vocabulario primitivo de un sistema axiomático está definido implícitamente por los axiomas que se establecen. Como en la concepción fregeana de la lógica no había lugar para la noción de un enunciado sin interpretar, esta propuesta de Hilbert era absurda. Y aunque se reconoce que en aquellos momentos, ni el propio Hilbert tenía claro en qué consistía su método, limitándose simplemente a aplicarlo, los desarrollos posteriores en el campo de la semántica de la lógica, siguieron el camino iniciado por Hilbert; y ésta fue la alternativa elegida por los positivistas lógicos.

Algo más complicada parecería en principio la asimilación del intuicionismo, pero el Principio de Tolerancia de Carnap –paladín de este sincretismo– permitía crear un lenguaje en el que tuviera cabida la matemática intuicionista; la única diferencia quedaba determinada por las convenciones que habían de estipularse. Es decir, que, en vez de concebir el intuicionismo como un rival matemático, la insistencia en el carácter convencional de la lógica posibilitó la consideración de la matemática intuicionista, sin más que incorporar un conjunto distinto de convenciones. No obstante, el sistema basado en estas convenciones se podría admitir como una curiosidad interesante, algo que se podría colocar al lado de la matemática clásica, pero que en modo alguno supondría amenaza de desplazamiento.

6. PLATONISMOS MODERNOS

El platonismo actual en matemáticas se encuentra dominado por los planteamientos de Quine y de Gödel. En particular, Quine iniciará en los años 30 reivindicaciones de corte platónico al oponerse al convencionalismo que los positivistas en general, y Carnap en particular, defendían. Por su parte Gödel adopta una actitud realista, apelando a un tipo de intuición de los objetos matemáticos equiparable a la percepción de los objetos físicos que posibilitan la ciencia empírica. No es de extrañar que el término 'platonismo', en su trayectoria de siglos, haya sufrido las alternancias y cambios que sufren todos los términos venerables en filosofía; pero en el caso que nos ocupa, al menos entre los matemáticos, ha permanecido en estado más o menos latente y nunca llegó a perder su vigencia. Quizá sea ésta la razón por la que la mayor parte de los matemáticos no se acercaran a los planteamientos fundacionales, eminentemente antirrealistas y antiplatónicos. Con independencia de los términos utilizados a lo largo de la historia, se reconoce desde siempre que el matemático adopta –lo confiese o no– una actitud platónica en su faceta heurística; en su quehacer diario procede como si los objetos con que trata constituyesen una realidad independiente y que de alguna manera hay que aprehender. No es sorprendente esta actitud, puesto que el platonismo, se dice, es la propensión natural del matemático, si bien éste –a la hora de expresar sus resultados con objeto de hacerse entender– se convierte en formalista, apresurándose a confesar que los símbolos que emplea carecen de contenido alguno.

Aunque el planteamiento de Gödel ha levantado pasiones y disputas, alguna de las cuales ya he desarrollado en otro trabajo (*cf.* Caba 1995), voy a ceñirme al platonismo de Quine para seguir el hilo conductor trazado desde el empirismo lógico. Conviene recordar, para justificar la entrada en escena de Quine, que el intento positivista de salvar el logicismo conducía hacia un convencionalismo lingüístico, que determinaba a su vez una clasificación de los enunciados. La tesis que opone Quine (1936) a este planteamiento es, en definitiva, que si la lógica ha de proceder a partir de convenciones, la propia lógica es ya necesaria para inferir la lógica de dichas convenciones. Aún más: desde esta perspectiva se unifica el *status* epistemológico de la lógica y las matemáticas con el de las restantes ciencias, con lo cual desaparece la creencia de que haya unos enunciados que acaparen toda la evidencia sensible. Esto se traducirá posteriormente en la aceptación por parte de Quine de un criterio gradualista de la verdad, con lo cual la distinción analítico-sintético ya no podrá mantenerse. De esta manera, la matemática dejará de tener el lugar privilegiado que los empiristas (ya desde Hume) habían tratado de adscribirle.

Como alternativa, Quine vuelve a retomar la idea fregeana de considerar los números como objetos y acabará defendiendo un platonismo no apriorista que le llevará a decir que las matemáticas tratan de objetos abstractos de diversos tipos, que, en última instancia pueden ser reducidos a conjuntos. Esta actitud respecto a las matemáticas se basa en su conocido planteamiento epistemológico que conserva los rasgos fisicalistas que en su día abandonaron los positivistas lógicos: es la observación, en última instancia, la que fundamenta la matemática y la lógica del mismo modo indirecto que fundamenta los aspectos más generales de la ciencia de la naturaleza. Todos ellos constituyen un todo organizado que encaja con la observación por sus bordes empíricos. No hay, pues, compartimentos distinguidos y establecidos de una vez por todas; cualquier elemento del sistema está sometido a revisión y no es inmune a su postergación o redefinición; cualquier anomalía en el sistema –por muy en el extremo que se detecte– presupone una redistribución de los valores de verdad del sistema completo. Es cierto que algunos elementos parecen mejor fundamentados que otros y soportan mejor la reestructuración; pero, en ningún caso los enunciados se admiten o excluyen aisladamente.

Partiendo de esta holista naturalización de la epistemología ya no hay problema en admitir entidades abstractas en nuestras teorías; si lo hacemos así es porque son útiles y nos proporcionan la mejor teoría de la ciencia y del mundo a que aspiramos. Son meros intermediarios (*posits*) convenientes, sin ningún *status* distinguido. Así, la matemática es tan indispensable como cualquier otra teoría que proporcione una explicación eficaz del mundo; los números y las funciones contribuyen tan genuinamente a la teoría física como puedan hacerlo las partículas hipotéticas. De esta manera, también obvia Quine todo el problema de la fundamentación: ni la lógica ni las matemáticas pueden considerarse privilegiadas y reclamar una fundamentación diferente a la de las restantes ciencias, puesto que es la observación, en última instancia, la que fundamenta todo el conocimiento.

La postura de Quine goza de gran actualidad (puede verse si no Azzouni 1994), y aunque la denominación no sea la más adecuada, no cabe duda de que este platonismo quineano posee algunas características especiales (Maddy 1990). Por ejemplo, desde este planteamiento se rechaza el apriorismo, las matemáticas pasan a ser revisables y falibles. Y, ya desde un punto de vista más técnico, pese a que se considera que la matemática tiene el mismo origen que la ciencia empírica, aparece sin embargo en niveles teoréticos altos, con lo cual, desde esta perspectiva, no quedaría explicada la obviedad de la matemática elemental. Tampoco tendría cabida una adecuada explicación de la matemática pura.

7. BENACERRAF

A la vista de cómo se han desarrollado los acontecimientos, puede decirse sin ambages que la FM del último cuarto de siglo está dominada por dos artículos de Paul Benacerraf publicados respectivamente en 1965 y en 1973. Bien mirados, sus planteamientos resultan casi triviales, pero, como ha ocurrido en tantas ocasiones, es posible que por esa misma razón hayan ejercido –y aún hoy día continúen haciéndolo– tamaña influencia. Continuando con el símil, cabe decir que una gran parte de lo que hoy día se cataloga como FM no es sino un diálogo con los planteamientos de Benacerraf.

El primero de estos artículos, «What numbers could not be» (1965), plantea lo que se ha dado en llamar dilema ontológico, y presenta como inviables, tanto la definición fregeana de número, como la insistencia de los matemáticos –en parte basada en las ideas de Frege– en reducir toda la matemática a conjuntos. En su clasificación entre conceptos y objetos, Frege había incluido a los números en la clase de estos últimos. Los números se predican de conceptos, pero no son ellos mismos conceptos, por lo tanto, concluye Frege, son objetos. Lo que ocurre es que decir que un número corresponde a un concepto no es propiamente identificar el número, que puede ser predicado de otros muchos conceptos. Por eso se ve Frege obligado a admitir que un número es todo el conjunto de las 'clases equinuméricas con un concepto dado'. De esta manera, al igual que antes había hecho Cantor sin mencionarlo expresamente, Frege se mueve en una aplicación sin límites del axioma de comprehensión que conduce a paradojas, como le indicara Russell.

Pero, a juicio de Benacerraf, tampoco los intentos de obviar la inconsistencia son satisfactorios. Cuando se restringe la teoría intuitiva de conjuntos y se axiomatiza a partir de la definición iterativa, ya no es posible admitir la definición al estilo de Frege, y los números están obligados a ser unos tipos especiales de conjuntos. Es posible identificar números con conjuntos que permitan trabajar aritméticamente con ellos, pero que, al mismo tiempo, presenten propiedades contradictorias entre sí. Es lo que ocurre, por ejemplo, con las formulaciones de von Neumann y Zermelo. Entonces, concluirá Benacerraf, los números no pueden ser conjuntos, puesto que si lo fueran, serían unos conjuntos muy particulares que presentarían propiedades específicas que traspasan lo que la aritmética ordinaria nos dice acerca de los números.

Ahora bien, aunque los números no puedan considerarse como conjuntos, no cabe duda de que constituyen alguna clase de objetos. Pero también esto resulta problemático para Benacerraf, puesto que si los números pueden ordenarse en una relación lineal, el papel que cada uno de ellos juega sólo depende de las relaciones que guarda con respecto a los otros, o sea, que no puede aislarse un número sin dar algún tipo de propiedad adicional que permita distinguirlo del resto; es decir, cada número –individualmente– debe poseer algunas propiedades exclusivas que lo distingan de los demás. Como quiera que, a juicio de Benacerraf, tales propiedades no se encuentran, habrá que concluir que tampoco son objetos. Pero si los números no son ni conjuntos ni objetos, ¿qué son, entonces?

El denominado dilema epistemológico lo plantea Benacerraf en su «Mathematical truth», de 1973. Hay que advertir, tanto en un caso como en el otro, que el propio Benacerraf no fijó las conclusiones tan dogmáticamente como han señalado los escolares y seguidores. Son dos las premisas de las que parte en este caso. En primer lugar, la concepción tradicional de tipo platónico acerca de la naturaleza de las entidades matemáticas como abstractas, y por ende, sin ubicación espaciotemporal. En otras palabras, Benacerraf constata y toma como punto de partida el pujante platonismo *de facto*, aceptado, tanto por parte de los propios matemáticos, como por filósofos de la talla de Gödel y Quine.

En segundo lugar, la aceptación de la teoría causal del conocimiento muy en boga en aquellos momentos, lo que puede reforzar el argumento de que la FM ha estado a expensas del desarrollo paralelo de la filosofía. Los planteamientos originales de esta teoría se remontan a Platón y hacen referencia a la naturaleza del propio conocimiento humano, en definitiva, al intento de responder a la pregunta: «¿qué es para mí conocer algo?» La respuesta la proporcionó igualmente Platón y presenta un triple condicionante: que yo lo crea, que esa creencia mía esté justificada, y que además sea verdadera. La debilidad de esta triple articulación –puesta en duda por el propio Platón– no fue objeto de discusión hasta el planteamiento de Gettier, en 1963. Una de las respuestas al denominado problema de la cuarta condición, la proporcionó en 1967 Alvin Goldman: lo que hace mi creencia verdadera debe ser 'causalmente responsable' para esa creencia. Son las diferentes versiones de esta idea las que constituyen el núcleo de la denominada teoría causal del conocimiento.

Una vez señalados estos puntos de partida, las conclusiones de Benacerraf vienen de suyo. Si se acepta la teoría platónica, entonces las entidades matemáticas son abstractas y por tanto no ubicadas espaciotemporalmente. Pero esto se traduce en que no pueden ser causa de conocimiento alguno, o lo que es lo mismo, son causalmente inertes. Por lo tanto, si el platonismo es verdadero, entonces no podemos tener conocimiento matemático. Pero si se supone que tenemos tal conocimiento, entonces el platonismo debe ser falso.

8. ALGUNAS REACCIONES

En resumidas cuentas, los artículos de Benacerraf dejaban tres opciones al filósofo. Primero, encontrar algún principio que permitiera elegir como distinguida o privilegiada una de las identificaciones teoréticoconjuntistas de los números naturales. En segundo lugar, mantener la tesis del platonismo ontológico sin identificar los números con ninguna clase especial de conjuntos. Por último, abandonar sin más el platonismo. Ya he indicado que las reacciones y matizaciones a estos dilemas de Benacerraf han ocupado prácticamente todo lo que ha caído bajo el rótulo de FM en los últimos tiempos. Pero, si bien dichas respuestas han sido muchas y variadas, los planteamientos que se ofrecen son de naturaleza estrictamente filosófica, y por tanto carentes de interés para el matemático. Como indicaré más adelante, pienso que no es éste el mejor modo de proceder: estoy convencido de que este obviar a la matemática, al matemático y su quehacer no ayuda precisamente a la filosofía. Se trata de trabajar con los matemáticos, no contra los matemáticos.

En cualquier caso, estos cuestionamientos han sido tantos y tan variados, que su propia clasificación constituye por sí misma un problema nada trivial. Por eso, creo que no es adecuado yuxtaponer sin más las distintas posiciones, sin tratar de encontrar el aspecto que las motiva en cada ocasión. Cada clasificación que se ofrezca está planteada desde una visión particular y personal del asunto, y por tanto, en ella ya se incorpora algo de la visión del propio autor que la realiza. En lo que sigue sólo pretendo realizar un bosquejo de algunas de estas posiciones para enfatizar lo complicado de la situación. Para ello tomaré sólo unos botones de muestra que pongan de manifiesto algo ya advertido desde distintos frentes: la impresión de que la FM actual es un inmenso campo de ruinas, echándose de menos una mano enérgica que indique el camino a seguir. Por tanto, es posible que algunos de los aspectos que se presentan a continuación puedan no resultar significativos por la ausencia, tanto de nombres como de temas relevantes.

Algunos autores se resisten a prescindir de la simplicidad explicativa que proporciona el platonismo y han tratado de defender un asunto que tradicionalmente aceptan los matemáticos, a saber, que toda la matemática está fundamentada en la teoría de conjuntos. En algunos textos (Aspray y Kitcher 1988) se denomina neofregeanismo a esta posición, y creo que apropiadamente, puesto que de lo que se trata –en definitiva– es de matizar los planteamientos fregeanos con objeto de mantener el platonismo, aunque sea a un nivel estrictamente metodológico. Pero ante el contratiempo que representan los dilemas de Benacerraf, han surgido entre los seguidores de este movimiento dos respuestas diferentes. Mientras que para algunos dichos dilemas no afectan al neofregeanismo, para otros parece suficiente una revisión con objeto de superarlos.

Los seguidores de la primera posición obvian los dilemas de Benacerraf, pero –a cambio– se ven obligados a ofrecer una explicación satisfactoria de las condiciones que nos permiten tener conocimiento de objetos no espacio-temporales; dicho de otro modo, se precisa una explicación alternativa a la teoría causal. Un autor afín a este tipo de explicación es Steiner. En su *Mathematical knowledge* (1975) admite un mundo de objetos causalmente inertes y, por ende, independientes del sujeto cognoscente, pero al mismo tiempo, postula una facultad humana especial que permita una aproximación cognoscitiva a dichos objetos. Hay que indicar que Steiner no habla de objetos aislados, sino de estructuras, con lo cual introduce algunos puntos de vista ya apuntados por Benacerraf. En este sentido, cabe decir que continúa el camino iniciado por Gödel en lo referente a la aceptación de esa especie de intuición que nos permite conocer los objetos matemáticos, del mismo modo que la percepción permite el conocimiento de los objetos físicos que posibilitan la ciencia. En última instancia, apunta Steiner, todas las críticas a la obtención de conocimiento matemático a través de la intuición descansan en una teoría causal de la percepción, alguna de cuyas formulaciones resulta compatible con los puntos de vista de Gödel. En términos semejantes plantea Maddy (1990) su realismo teorético conjuntista. Su punto de partida es un compromiso doble: con Gödel, en tanto en cuanto éste reconoce formas de evidencia puramente matemáticas, y con Quine, por lo que respecta a la indispensabilidad. Esta hibridación es posible, dice Maddy, porque la práctica matemática se encuentra justificada gracias al éxito de la aplicabilidad a la ciencia empírica. No obstante, es menester un análisis más profundo de la intuición propugnada por Gödel, con objeto de proporcionar una justificación de la obviedad de la matemática elemental.

Entre los partidarios de revisar el neofregeanismo con objeto de superar los dilemas de Benacerraf, podemos citar a Lear (1977). Sostiene este autor que si el defensor del platonismo pretende hacer plausible su propuesta de que *hablar* acerca de conjuntos es realmente hablar acerca de *conjuntos*, entonces está obligado a desarrollar una teoría en la cual la extensión del término 'conjunto' esté determinada con independencia de las relaciones causales entre él mismo en tanto que cognoscente, y los objetos acerca de los cuales habla. La situación es distinta en el caso de los objetos físicos. El conocimiento que tenemos de estos últimos no es sino el último eslabón de una cadena de comunicaciones que comenzó con un bautismo inicial, en el cual se convino, por ejemplo, llamar 'oro' al metal que aún hoy seguimos denominando así; este uso del término, por otra parte, resultó exitoso incluso antes de un desarrollo teórico posterior que permitiera un conocimiento más profundo del metal. Pero este bautismo inicial à la Kripke-Putnam no admite un paralelismo en el caso que nos ocupa: los conjuntos, dirá Lear, son precisamente esa clase de objetos con los cuales no se está en contacto causal, y que, por tanto, imposibilitan semejante bautismo inicial. Así, una vez negada cualquier relación causal entre el hablante y los objetos acerca de los que habla –en nuestro caso los conjuntos– lo que puede explicar cómo se tiene éxito al hablar de tales objetos son hechos acerca de la propia comprensión de lo que son esos objetos y las propias intenciones que se tengan al hablar acerca de ellos.

Retomando un poco el hilo de todo cuanto se ha dicho hasta ahora, puede verse que Frege –con independencia de que se esté, o no, de acuerdo en situarlo como el iniciador de la FM– ha jugado un importante papel en la filosofía de este siglo. En mayor o menor grado, y con desigual relevancia, no cabe duda de que sus principales tesis han permanecido. Por eso no puede sorprender que sea el propio Frege, y no simplemente las doctrinas elaboradas a partir de sus ideas originarias, quien goce hoy día de una gran actualidad. Prueba de ello es la reciente publicación por parte de Demopoulos (1995) de una recopilación de artículos acerca de su trabajo. Todo apunta a que ha sido el libro de Wright (1983) el detonante que ha provocado la aparición de toda una serie de estudios sobre Frege, dedicados, tanto a la articulación de temas fregeanos con carácter general, como a la investigación de temas específicos de FM.

Hay otros autores que restringen en parte el papel que juegan los conjuntos, alejándose –más o menos drásticamente– de los planteamientos anteriores. Una de las soluciones que se presentan en este caso es el estructuralismo. Otra alternativa de este tipo, aunque de naturaleza más radical, es el nominalismo.

La idea predominante del estructuralismo es la consideración de que la matemática describe en última instancia las propiedades, no tanto de objetos individuales, como de estructuras; y aunque no es ni mucho menos una visión uniformemente compartida, el planteamiento que tiene hoy día mayor aceptación, o al menos, el que mayor atención recibe, es el defendido –con diferencias de matices– por Shapiro (1983) y por varios artículos de Resnik que han culminado en su reciente *Mathematics as a science of patterns* (1997). Los estructuralistas coinciden con los defensores del platonismo y del intuicionismo en que las matemáticas poseen un contenido, pero que éste no está constituido por entidades abstractas ni por constructos mentales, sino por modelos o estructuras. Su fundamento no es sino una corroboración de la práctica matemática habitual. Los objetos con los que habitualmente tratan los matemáticos no se dan aislados, sino relacionados entre sí, de manera que puede decirse incluso que no poseen entidad alguna fuera de la propia estructura. Esta visión presenta aspectos problemáticos, sobre todo en el plano ontológico, pero no cabe duda de que posibilita, al mismo tiempo, una explicación prometedora de la tan discutida relación entre matemáticas y ciencia empírica. Creo que, aunque no puede negarse el contenido filosófico de este planteamiento, es uno de los pocos que pueden resultar atractivos a los matemáticos. Entiendo que por aquí hay una sustanciosa posibilidad de acercamiento a la que habría que dedicar mayor atención.

Pero también el estructuralismo proporciona argumentos a los defensores del neofregeanismo. Siguiendo el hilo de las consideraciones de Benacerraf, no cabe entender, por los problemas ya indicados, que las matemáticas tengan como objeto los conjuntos, porque difícilmente habría acuerdo acerca de cuáles serían esos conjuntos distinguidos. Pero caben matices. White (1974), por ejemplo, sugiere que aquello que en definitiva está poniendo en entredicho Benacerraf, es la afirmación de

Quine, ya apuntada por Russell, de que cualquier progresión sirve como una versión de los números naturales. Por eso, su propuesta no pasa por renunciar a la identificación de los números con conjuntos por el mero hecho de que no seamos capaces de una identificación total. La existencia de múltiples modelos conjuntistas teoréticos debería movernos, no a decir con Benacerraf que los números no son conjuntos, sino más bien a sugerir que hay múltiples series bien determinadas de números naturales. Así, por ejemplo, en vez de decir que sólo hay un «tres», diríamos que hay muchos, tantos como instanciaciones de los números naturales. La idea central de su planteamiento consiste en sustituir en el discurso aritmético los términos singulares relativos a números concretos por los términos generales correlativos, introduciendo para ello el descriptor. Pero esta sugerencia de White de relativizar los números concretos a progresiones no está exenta de problemas, como él mismo reconoce. En términos semejantes se expresa Field (1974). A lo que se enfrenta Benacerraf, dice, no es sino un caso particular de indeterminación de la traducción: los números no pueden ser conjuntos porque no podría decirse con seguridad a qué conjunto corresponde cada número. Pero esto no significa una total coincidencia con Quine. Para éste, ninguna interpretación de una teoría dice lo que son los objetos de esa teoría, sino cómo una teoría de objetos es interpretable en otra. Field, en cambio, transfiere el carácter ontológico de la propuesta de Quine, no a lo que los objetos de la teoría sean, sino a lo que dichos términos denoten o signifiquen. Es decir, que se apoya en una teoría de la correspondencia ausente en los planteamientos de Quine. Para Field, además, la inadecuación surge cuando se contempla una traducción individualmente; para que una teoría resulte adecuada tiene que contemplar *todas* las traducciones a la vez.

El estructuralismo trata asimismo de responder al dilema epistemológico de Benacerraf, utilizando para ello, bien una versión constructiva, como la presentada por Kitcher en varios artículos durante la pasada década, bien algunas nociones de lógica modal. En este último caso está Putnam (1967), quien pretende ofrecer una alternativa al hecho de que los enunciados de las matemáticas se refieran a objetos específicos. Su punto de partida es que el concepto de 'descripciones equivalentes' que Reichenbach acuñara para el caso de la ciencia empírica, es igualmente válido para el caso de las matemáticas, puesto que la principal característica de éstas es precisamente la amplia variedad de formulaciones que poseen. La descripción habitual –indicada por Benacerraf como problemática– consiste en describir el 'reino de los hechos matemáticos' basándose en la teoría de conjuntos. Esta cuestionable referencia directa puede evitarse, a juicio de Putnam, tomando como base la lógica modal. Cuando se habla de la existencia y las propiedades de números, por ejemplo, se tiene una visión de las matemáticas como tratando de describir objetos externos. El 'modalismo' que Putnam propone evita semejante referencia, puesto que las variables que aparecen en los enunciados modales no son sustituibles por objetos cualesquiera, sino que representan inscripciones individuales, entidades concretas. Esta línea de investigación la encontramos también en Hellman 1989 y en Jubien 1977.

La respuesta más radical al dilema ontológico de Benacerraf, y en general, a cualquier tipo de realismo, es la nominalista. En matemáticas, esta posición ha sido defendida con mayor vehemencia por Field, pero hay otras variantes, como por ejemplo, la ofrecida por Gottlieb (1980) y Parsons (1971). Estos últimos proponen una reinterpretación de los cuantificadores utilizando la cuantificación sustitucional a fin de evitar cualquier clase de compromiso con entidades abstractas. Su punto de partida está en oposición a Quine (1970), quien rechaza dicha cuantificación sustitucional como una divergencia respecto a la lógica clásica, puesto que no incorpora en absoluto el concepto de existencia; sólo una teoría en términos de cuantificación objetual es capaz de atribuir una ontología. Como se ve, en este caso parece que se está tratando el tema más amplio acerca de la referencia que puedan tener entidades abstractas; un asunto, en definitiva, de naturaleza mucho más general y que toma a la matemática como 'campo de pruebas'. Pero el más radical de los nominalismos de la actualidad es el defendido por Field (1980). Su punto de partida es la disanalogía observada entre la utilidad de las entidades matemáticas y las entidades teóricas de la física. La matemática se presenta como conservativa en su aplicación a la física, y es precisamente este carácter lo que exime a los enunciados matemáticos de ser considerados incluso verdaderos. La única ventaja que presenta la utilización de la matemática en la física es que permite acortar los procesos demostrativos, que sin su ayuda serían en ocasiones extremadamente largos. En cualquier caso, no son indispensables, puesto que todo lo que pueda ser demostrado con su ayuda, también puede serlo sin ella, aunque a costa de una mayor complejidad.

Los términos 'estructuralismo' y 'nominalismo' son tan amplios que gran cantidad de posicionamientos filosóficos pueden ser incluidos en ellos. Pero hay otros que difícilmente pueden encasillarse en alguno de los anteriores. Su número es importante; aquí voy a señalar sólo algunos de los que considero más relevantes.

Contrariando de nuevo a Quine, hay una tendencia a considerar la lógica de segundo orden como indispensable para constituir un lenguaje adecuado en el que expresar toda la matemática. Así se manifiesta Shapiro en una serie de artículos que culminan en su (1991); para este autor ningún lenguaje de primer orden resulta suficiente para axiomatizar la aritmética, el análisis o la teoría de conjuntos; dicho de otro modo, es necesaria la referencia a predicados o a subconjuntos de dominios dados con objeto de capturar la semántica que subyace a la práctica matemática. Como es sabido, las lógicas subyacentes a ambos tipos de lenguajes ofrecen profundas diferencias metateóricas con respecto a la completud y a la compacidad principalmente; esto abre el camino a debilidades, si no a inconsistencias, en cualquier materia que utilice un lenguaje de orden superior al primero. Pero, pese a todo, los matemáticos están obligados a su utilización si pretenden proporcionar la semántica adecuada. Es cierto que en ocasiones se dan formulaciones en un lenguaje de primer orden de axiomas y conceptos que son básicamente de segundo; pero, si bien esta práctica pretende eliminar algunas de esas carencias metateóricas, para Shapiro, semejante restricción es artificial y no se conforma con la práctica matemática habitual. Pero tampoco debe entenderse esta idoneidad como un rechazo acrítico de los lenguajes de primer orden: lo único que se indica es que dichos lenguajes no expresan adecuadamente la práctica matemática en los respectivos campos. En cualquier caso, todas estas consideraciones son de naturaleza semántica, y no exigen definición alguna por parte de sus defensores respecto al problema del *status* ontológico del objeto de las matemáticas; de hecho, un defensor de los lenguajes de segundo orden como es Shapiro puede autocalificarse como realista neutral en este sentido.

Para completar este cuadro quisiera presentar otra posibilidad de aceptar o rechazar el platonismo-realismo que tiene lugar, esta vez, desde el ámbito de la semántica. Así, se dice que aceptar o no el realismo depende de lo que se tome como condición para la verdad o falsedad de los enunciados correspondientes. Para González (1990), mientras que el realismo pretende alcanzar verdades relativas a relaciones entre entidades matemáticas, el antirrealismo rechaza tales entidades, y consiguientemente, cuestiona el concepto de verdad. No cabe duda de que los enunciados de corte realista suponen en cierto modo un elemento semántico, puesto que se afirma que las matemáticas son acerca de ciertas entidades (números, funciones, conjuntos...), y que el modo en que esas cosas son, es lo que hace verdaderos o falsos los enunciados matemáticos. Esto acarrea implícitamente una teoría de la correspondencia, según la cual la verdad de una sentencia depende, parte de la estructura de la sentencia, parte de la relación entre las partes de la sentencia y la realidad extralingüística. Un aspecto definitivo de las teorías de la correspondencia es que lo que se toma para que una sentencia sea verdadera puede muy bien trascender lo que somos capaces de conocer. Por el contrario, la semántica antirrealista pretende identificar la condiciones de verdad de una sentencia con algo más próximo a nuestras facultades de conocer, de tal manera que las sentencias queden justificadas merced a alguna versión de las condiciones de verificación. Pero hay quien piensa que ambos extremos no son las únicas alternativas (Maddy 1990).

9. OTRAS VÍAS

Tanto los planteamientos de Benacerraf como las reacciones que acabamos de describir se sitúan en el marco de lo que se podría denominar interpretación metafísico-filosófica de la FM, puesto que parecen circunscribirse al tratamiento vía matemática de problemas filosóficos de mayor envergadura.

Pero, a decir verdad, no es esto lo único que puede calificarse de FM en la actualidad, puesto que, paralelamente a todas estas cuestiones, se ha retomado uno de los caminos que Frege abandonara, a saber, la consideración de la matemática como una ciencia a posteriori. Será precisamente la eclosión de la filosofía de la ciencia de mediados de siglo la que propiciará este resurgir y la que influirá para que comiencen a ser tratados asuntos que en los seis primeros decenios del siglo habían sido ignorados; esto traerá consigo, en cierto modo, el abandono de los temas fundacionales, en definitiva, la circunscripción de la FM a la búsqueda de fundamentos, como venía manteniéndose desde Frege. En cualquier caso, no puede decirse, aún hoy día, que todo esto constituya un movimiento organizado; pero lo que sí parece cierto es que se comienza a asignar un mayor papel a la historia, a la metodología y a la práctica de las matemáticas, que el fundacionismo había ignorado.

Como ya se ha dicho, Frege había rechazado que la matemática pudiera ser a posteriori. Durante el apogeo fundacional esta parte de la taxonomía fregeana pasó prácticamente desapercibida, puesto que lo que los filósofos tenían *in mente* era la búsqueda de una fundamentación, un punto arquimédico que, tomado como origen, garantizara de una vez por todas el quehacer y los logros del matemático. Pero el *floruit* que la filosofía de la ciencia alcanzó, principalmente con los trabajos de Popper y de Kuhn, tuvo su influencia en la FM. De la mano de un matemático nada ortodoxo como Polya, otro inconformista como lo fue Lakatos destapó la caja de los truenos y propuso situar, en cierto sentido, a la matemática al mismo nivel que la ciencia empírica. De esta manera, se produce una reverberación en FM propiciada por los planteamientos en filosofía de la ciencia, originándose una curiosa inversión de papeles: la matemática pasa de modelo a modelada según los patrones de la ciencia. La matemática se sitúa de esta manera en un ámbito más general y, metodológicamente al menos, puede decirse que se muestra afín a la propia ciencia empírica. El problema está en que cuando se trasladan a la FM los asuntos de la Filosofía de la Ciencia también se trasladan sus problemas, como veremos.

Resulta difícil resumir una filosofía tan sugerente y atractiva como la de Lakatos; por ello, sólo voy a dar unas pinceladas sobre lo más relevante de su punto de vista. Ya se ha dicho que sintetiza y acomoda al ámbito de la matemática las principales ideas de Popper y Kuhn: de hecho, él mismo se autocalifica de popperiano con gafas kuhnianas. Pero esta asimilación no es incondicional, sino crítica. Así, a juicio de Lakatos (1978), si bien Popper había puesto adecuadamente las bases de la lógica del descubrimiento, no se detuvo a analizar la metacuestión acerca de la naturaleza de esta indagación, y la asimiló sin más a la lógica. De esta manera se situaba en la posición positivista, que asignaba el contexto de génesis al ámbito de la psicología, y el de justificación al de la lógica. Para Lakatos esta reducción desvirtúa el sentido profundo de la lógica del descubrimiento, la heurística, que tiene que ser considerada una disciplina distinta, no reducible ni a la psicología ni a la lógica. Será la dialéctica hegeliana, en última instancia, la que posibilite una caracterización adecuada de esta lógica del descubrimiento: la matemática es una actividad mental, cuyo producto se aliena a sí mismo de la actividad productora, adquiriendo una cierta autonomía y desarrollando sus propias leyes de crecimiento, o sea, su propia dialéctica.

La mencionada influencia de la Filosofía de la Ciencia supone una transformación de las preguntas que han de ser respondidas; ya no se trata tanto de determinar los fundamentos como de dilucidar el problema del cambio, del avance de las matemáticas. Por ello, de manera necesaria, tiene Lakatos que apelar a la historia, distanciándose otra vez de Popper: incluso la miseria del historicismo es preferible a su ausencia. No obstante, constatando las interpretaciones interesadas que pueden hacerse de la historia, Lakatos observa que ha de ser tratada como una caja de explosivos. Es posible que Lakatos esté haciendo un uso instrumentalista de la historia, pero creo que puede valer para incorporarla a la FM y no ignorarla como hizo el fundacionismo.

Lo que en definitiva pretende Lakatos es reconstruir racionalmente un determinado y preciso contexto histórico. La matemática deviene así una serie de construcciones mentales no establecidas de una vez por todas, sino susceptibles de mejora y de rechazo en su caso. A través de ejemplos históricos concretos, Lakatos (1976) pretende una reconstrucción racional de los procesos seguidos en las diversas demostraciones de teoremas concretos, pero la verdadera historia del asunto aparecerá en las notas a pie de página. El punto de partida no es, como en el caso habitual del formalismo, un enunciado rígido que –una vez demostrado– tenga una validez definitiva, sino una conjetura entremezclada de referencias y analogías. Los pasos que pretenden hacer plausible esa conjetura no están perfectamente establecidos, sino que se encuentran conectados con casos análogos o casos particulares del problema. Más tarde, se esboza una demostración a modo de experimento mental, para lo cual se han de escudriñar, tanto los procesos parciales que han intervenido en la prueba informal, como los lemas implícitos; de esta manera surgirán diversas conjeturas parciales que completan la conjetura principal. Pero el proceso no concluye aquí, más bien podría decirse que empieza, puesto que se critica la demostración tratando de falsarla, esto es, determinando contraejemplos que la invaliden. Es posible que baste una modificación en el enunciado inicial para asegurar la validez de la prueba; otras veces puede surgir un contraejemplo que invalide toda la demostración.

Una característica de la matemática que desde el fundacionismo resulta inadmisible, pero que cobra cada vez mayor predicamento es la posibilidad del carácter cuasi-empírico de la matemática, cuya formulación se presenta algo vacilante en la obra de Lakatos. Para éste un sistema es euclídeo si constituye la clausura deductiva de aquellos de sus enunciados básicos que se asumen como verdaderos; en otro caso, el sistema es cuasi-empírico. En un sistema euclídeo, la verdad fluye desde la cúspide constituida por los axiomas e inunda todo el sistema, mientras que en los otros tipos de sistemas la inyección crucial de verdad se sitúa en la base. Lo que ocurre –observa Lakatos– es que la verdad no fluye hacia arriba, con lo cual, el flujo lógico en estos otros sistemas no es la transmisión de la verdad, sino la retransmisión de la falsedad. A su juicio, el fundacionismo trataba de establecer una reorganización euclídea de la matemática en su conjunto, pero fracasó en el intento: el logicismo se encontró con que ciertos axiomas de la cúspide presentaban una verdad más que dudosa, mientras que el formalismo se veía obligado a exigir una prueba de consistencia desde un núcleo finitario, cuya inviabilidad demostraría Gödel.

Desde este nuevo planteamiento, los roles atribuidos a los distintos elementos cambian de naturaleza; así, la lógica pasa de ser organon de prueba en los sistemas euclídeos á organon de crítica en los cuasi-empíricos. La metodología utilizada es también diferente: la búsqueda de axiomas autoevidentes en el caso de la teoría euclídea acarrea una metodología puritana y antiespeculativa, mientras que la teoría cuasi-empírica se caracteriza metodológicamente por la búsqueda de hipótesis audaces e imaginativas. Asimismo, el patrón principal de la crítica euclídea es la sospecha, mientras que en el otro caso proliferan las teorías y las refutaciones. El problema que Lakatos sólo planteó, pero que no resolvió, es el de la naturaleza de los falsadores para el caso de las matemáticas. Sus consideraciones en esta ocasión van dirigidas al establecimiento de lo que llamará falsadores heurísticos, asimilables en la terminología de Lakatos a teorías rivales.

Según la interpretación de Lakatos, la matemática pasaba de ser reducto inexpugnable a ser asimilada, al menos metodológicamente, a las ciencias empíricas. En cualquier caso, la problemática se desplazaba de los aspectos fundacionales a un estudio sistemático de cómo se produce el cambio en nuestra disciplina. En este mismo contexto se va a dar un nuevo paso que desvirtúa –aun más, si cabe– los planteamientos fundacionales: algunos autores entienden las matemáticas como un producto cultural más, sin posición de privilegio alguna, sometidas a los avatares de cualquier elemento inscrito en el ámbito de una determinada cultura, con rasgos específicos, eso sí, pero elemento cultural y cambiante, al fin y al cabo. El autor más representativo de esta denominada en ocasiones epistemología evolutiva es, sin duda, Wilder (1981), aunque recientemente Lizcano (1993) ha defendido posiciones aún más radicales. Si desde un punto de vista fundacional, las matemáticas se cuentan como anteriores y posteriores a su determinación definitiva que las fija de una vez por todas, desde el punto de vista cultural el conocimiento matemático –como cualquier otro elemento cultural– mejora o crece; no es de extrañar, por tanto, que se adopten patrones evolutivos darvinianos para explicar este planteamiento.

Una prueba de la dependencia cultural de nuestra ciencia la constituye la propia delimitación del término 'matemáticas' y su alcance en diferentes épocas. En este aspecto es imposible sustraernos a nuestro propio hábitat cultural para juzgar lo que en otro tiempo pudo llamarse así. En cualquier caso, casi todos los intentos para establecer una definición están suponiendo, en última instancia que son algo absoluto por naturaleza, inmutables en el tiempo y en el espacio. Pero una aproximación a la historia pone de manifiesto lo errado de esta suposición. Así pues, si se cuestiona la inmutabilidad, entiende Wilder que la única posibilidad de determinar con exactitud lo que sean las matemáticas consistirá en buscar los elementos culturales que las diferencian de los restantes objetos culturales.

Puede objetarse que, pese al relativismo a que conduce este tipo de planteamiento, las matemáticas ofrecen un aspecto que las distingue del resto de los objetos culturales, a saber, una universalidad que parece no tener límites. Para Wilder, dicha universalidad no siempre existe; tampoco es tan completa como pudiera parecer y además, también el hecho de que se dé puede explicarse en términos culturales. Es precisamente esta aquiescencia generalizada la que puede habernos inducido a creer que constituyen un cuerpo de verdades independiente del foro social en el que se desarrollan. Según esto, habrá que convenir en que la definición de matemáticas no se puede concebir si no es desde el punto de vista cultural. La pregunta que hay que formularse no es tanto ¿qué son las matemáticas? como: ¿cuál es el elemento cultural denominado matemáticas en el mundo de hoy?

Si se aceptan, pues, las matemáticas como un objeto cultural más, tendremos que admitir que se encuentran sometidas a los mismos avatares y alteraciones que cualquier otro elemento cultural. En este sentido se puede rastrear, por ejemplo, la evolución del concepto algebraico de grupo e incluso se podrían dar –como hace Wilder (1968)– unas leyes de la evolución de los conceptos matemáticos. Además, cuando se dan las condiciones culturales adecuadas para que se produzca el cambio, éste es inevitable. Desde esta posición se explican satisfactoriamente, tanto la aparición de genios como los de descubrimientos simultáneos. Es cierto que, generalmente, estas alteraciones se producen merced a la aparición de ciertos individuos que irrumpen en escena y provocan la crisis de la que surgirá una nueva teoría. Pero, a juicio de Wilder, si bien estos genios se adelantan de alguna manera al desarrollo normal, no son el constitutivo esencial del cambio; es justamente lo contrario: las matemáticas no podrían avanzar si no fuera por la aparición coyuntural de individuos privilegiados, pero éstos no surgen de la nada, no pueden operar en un vacío intelectual, necesitan unas condiciones culturales adecuadas para que su aportación pueda tener lugar.

10. A MODO DE CONCLUSIÓN

Cuando se analiza gran parte de lo que hoy día se publica bajo el rótulo de FM cuesta reconocer que constituya el resultado de filosofar de manera efectiva acerca de la matemática. No tanto porque se intuya que va a interesar poco al matemático (lo cual tampoco sería una novedad), sino porque la mayor parte de las cuestiones sólo de pasada conectan con la propia matemática, con el quehacer de los matemáticos. Es proverbial el rechazo que éstos han tenido desde siempre a todo lo filosófico. Pero creo que, en cierto modo, su actitud está justificada, puesto que la filosofía raras veces ha supuesto nada realmente positivo para su quehacer como matemáticos; aún peor, en ocasiones incluso se ha atrevido a dictar normas y a restringir el uso de herramientas a las que no estaban, como es obvio, dispuestos a renunciar.

Por aventurar alguna explicación podría decirse que todo esto se debe a que, en última instancia, la filosofía y los problemas filosóficos sólo interesan a los propios filósofos. El caso de la FM creo que es un buen ejemplo de cuanto digo: a mi modo de ver, los problemas que hicieron surgir las cuestiones más importantes que hemos debatido aquí, están en línea de continuidad con los problemas centrales de la epistemología y de la ontología del siglo actual. Es cierto que en un principio tuvieron un origen matemático, pero al iniciarse la reflexión filosófica se produce tal distanciamiento, que en ocasiones resulta difícil reconocer los problemas originarios. Tal es el caso de los movimientos fundacionales, que surgen como respuesta a cuestiones de naturaleza matemática (en particular, las matemáticas del siglo XIX y la aparición de las paradojas), y precisamente por eso son asumidos por ciertos matemáticos. Pero en seguida, como el desarrollo posterior puso de manifiesto, las reflexiones de naturaleza filosófica y la práctica de la matemática propiamente dicha anduvieron por caminos diferentes. Es lógico, por otra parte, que así sea: la FM, en tanto que filosofía, no puede surgir en un *vacuum* filosófico; en cierto modo, bascula sobre la filosofía, es –en resumidas cuentas– filosofía. Y no conviene engañarse: los filósofos no tienen un doble lenguaje –cosa de agradecer, por otra parte– según filosofen en sentido amplio o lo hagan acerca de una determinada ciencia o materia en particular.

Estas consideraciones resultan moderadas si se comparan con las de McCarty (1993). Para éste, los filósofos abordan la matemática con un grado tal de sofisticación que la acaban convirtiendo en un objeto de la filosofía; por consiguiente, la FM deja de ser algo que trate de matemáticas. Es más, los mecanismos por los cuales la matemática se representa a los filósofos –que en principio se manifestaban como transparentes– se han revelado como translúcidos, e incluso opacos. En última instancia, se han convertido en los medios a través de los cuales la filosofía ejerce su autoridad sobre las matemáticas.

Una consecuencia de esta situación es que la matemática pasa a convertirse en un terreno abonado en el que se plantean y discuten cuestiones de naturaleza filosófica, pero de escasa relevancia matemática, al menos en los aspectos que más pudieran interesar a los matemáticos profesionales. La FM es, pues, una excusa para poner sobre el tapete asuntos que, las más de las veces, no conciernen directamente al propio quehacer matemático. Se configura así como un microcrosmos en el que, unas veces se dirimen cuestiones de naturaleza netamente filosófica que constituyen temas centrales y clásicos de la filosofía en diferentes ámbitos, tales como el metafísico, el epistemológico o el del lenguaje; otras veces, las cuestiones son de índole matemática, pero, al dedicarles los filósofos una especial atención, les imprimen un sello especial: la aritmética, la lógica o la teoría de conjuntos pueden valer como ejemplos. Pero, tanto en un caso como en otro, lo que parece que se persigue es una justificación de los posibles méritos de proyectos filosóficos de más amplio calado, y en los que hay que dar respuesta a cuestiones tales como el *status* de las entidades abstractas, o hasta qué punto puede mantenerse una determinada explicación de lo que pueda ser el conocimiento humano.

Pero no puede decirse que esta circunstancia sea novedosa, ya que, en esta posición de dudoso privilegio se ha visto la matemática desde siempre. Por ejemplo, su especial naturaleza la convirtió en la mejor justificación para el Racionalismo, y puede decirse que desde entonces se arrastran todos los problemas de sus ampliamente denostadas influencias en la filosofía; era presumible, por otra parte, que ocurriera así, puesto que en un sistema como el matemático encajaba perfectamente el establecimiento de una facultad capaz de percibir verdades a priori, independientemente de la observación. No cabe duda de que el Empirismo lo tuvo bastante peor para encajar coherentemente un conocimiento como el matemático, cuya aprehensión empírica resultaba difícilmente dudosa, con una explicación satisfactoria de su indiscutible y exitosa utilidad. Los empiristas se vieron, pues, obligados a admitir que todo conocimiento –excepción hecha del conocimiento matemático– es fruto de la observación; por consiguiente, los textos matemáticos son los únicos, que junto a los científicos quedarían libres de las llamas de la destrucción.

En cualquier caso, la matemática raras veces se vio involucrada en cuestiones existenciales problemáticas: era algo que había que admitir necesariamente; si acaso, la única dificultad consistía en proporcionar una explicación satisfactoria que encajara en el sistema filosófico correspondiente. Siempre se ha tenido el 'prejuicio' de la certeza. Por ejemplo, incluso en la etapa de gestación del cálculo, cuando se era consciente de que no se utilizaban los métodos rigurosamente adecuados, se indicaba que una demostración apagógica estaba disponible; en última instancia, Euclides prevalecía.

Pero hay que señalar en seguida que en la actualidad no todos los planteamientos de la FM se centran exclusivamente en el ámbito de lo filosófico. Se constata que un número cada vez mayor de filósofos de la matemática están esforzándose para que los matemáticos se interesen por sus planteamientos, y se observa una tendencia a considerar la práctica matemática como objeto de investigación filosófica.

En lo que sigue pretendo ofrecer algunos posibles planteamientos en este sentido, pero antes desearía hacer algunas matizaciones sobre el abandono del fundacionismo, que se presenta con insistencia como uno de los rasgos característicos de la FM de la actualidad. Lo que quiero es poner de manifiesto que hay indicios suficientes para afirmar que –desde un punto de vista filosófico, al menos– el fundacionismo no ha dicho su última palabra. Por tanto puede proponerse como tarea la evaluación de la posibilidad de que resurja o se reinterprete durante el siglo que comienza. Ya he dicho que todavía se considera un referente obligado, pero este carácter meramente referencial no se reduce a algo ya caduco y en desuso. Quizá sea el logicismo el que menos cueste abandonar, vistas todas las vicisitudes a las que tuvo que hacer frente. Pero, en cierto modo, puede entenderse que se encuentra reencarnado en esa apertura hacia Frege a que hemos aludido. No cabe duda de que ninguno de los movimientos fundacionales es lo que era hace sesenta años, pero de ahí a erradicarlos sin más del ámbito de la FM puede resultar una exageración inapropiada.

El intuicionismo, pese a las alteraciones sufridas, se encuentra en cierto modo reencarnado en todos los planteamientos constructivistas. Es cierto que los matemáticos constructivistas constituyen una minoría, y hay quienes los consideran poco menos que una secta herética, pero desde el punto de vista filosófico el asunto es diferente. El intuicionismo ofrece la ventaja de que no tuvo que vérselas con las dificultades con las que se enfrentaron los otros movimientos, lo cual permite decir que es el único sistema unificado que sobrevive intacto. Pese a todo, siempre ha sido criticado por su excesivo restrictivismo; cuesta convencer a los matemáticos de que toda su actividad quede reducida a construcciones mentales finitarias. Por ello se entiende que los epígonos de Brouwer trataran de minimizar el aspecto psicologista de su filosofía con objeto de lograr una mayor aceptación por parte de los matemáticos. En resumen, si como piensa Alcolea (1986) obviamos de alguna manera el solipsismo inherente al intuicionismo, este movimiento puede dar mucho de sí, e incluso acabar interesando a los matemáticos profesionales.

Pero tampoco el formalismo hilbertiano puede considerarse totalmente abandonado. Aparte de la relación con las denominadas 'reverse mathematics', Simpson (1988) aboga por una equilibrada lectura del programa de Hilbert que clarifique sus verdaderas intenciones, sobre todo a la luz de los acontecimientos posteriores. En concreto, habría que matizar la propuesta de Hilbert de que las matemáticas deben estructurarse con objeto de constituir un sistema formal elaborado en el que las fórmulas sólo sean cadenas de símbolos sin significado que puedan ser manipuladas desde un punto de vista finitario. Fue por aquí por donde se coló la crítica brouweriana –poco original por lo obvia, por otra parte– de 'formalismo vacío' a todo el sistema hilbertiano. Pero un análisis más atento muestra, según Simpson, que la intención de Hilbert no era tanto la de despojar de significado a las fórmulas infinitistas, como la de investirlas de significado con referencia a las matemáticas finitarias, en las que la significación no ofrece dificultades.

Una vez matizado este abandono de los asuntos fundacionales quisiera retomar algunos de los planteamientos que en la actualidad parecen perfilarse como alternativas de futuro. Uno de ellos contempla la posibilidad de continuar con los retos de Benacerraf desde una nueva perspectiva. Hay un cierto grado de consenso en que la búsqueda de cualquier tipo de remiendo a los dilemas de Benacerraf ha perdido la vigencia de los últimos años, y ha acabado convirtiéndose poco menos que en una riña *intra muros* entre metafísicos. En su lugar, aparecen otras cuestiones que pueden –en principio– ser más interesantes para los matemáticos y atraerlos a la causa de una filosofía que se aproxime más a su práctica diaria. De entrada, hay que admitir que Benacerraf plantea la cuestión epistemológica a un nivel muy elemental, y no distingue entre cuestiones de complejidades muy diferentes; así, tan remoto sería nuestro conocimiento de sencillas proposiciones de la matemática elemental, como del teorema de Cantor, por ejemplo. Pero la actitud habitual ante este tipo de cuestiones es bien distinta. Si el conocimiento de los hechos matemáticos elementales parece no ofrecer problemas, no queda claro, en cambio, el tipo de conocimiento que podamos tener de los axiomas de la teoría de conjuntos que permiten una demostración de dicho teorema; es más, ni siquiera sabemos si son verdaderos. Así, caben dos alternativas: o se continúa con esa lucha metafísica endógena, que lo único que hace es marear la perdiz buscando posibles salidas a los dilemas de Benacerraf, o se plantean cuestiones, de naturaleza filosófica, pero que puedan proporcionar, en el mejor de los casos, una guía para los matemáticos actuales. Una de estas cuestiones, propone Maddy (1991), es precisamente determinar cómo pueden justificarse los axiomas.

Otro de los argumentos esgrimidos con más frecuencia para poner de manifiesto que se ha producido un cambio en FM es la irrupción de los ordenadores en el ámbito de la matemática. Se ha repetido *ad nauseam* que, desde que se publicara la demostración del Teorema de los cuatro colores en 1977, realizada completamente gracias a un ordenador, éste es uno de los aspectos que requieren una urgente explicación. Conviene distinguir, en cualquier caso, dos modalidades de entender esta irrupción. En primer lugar, una de carácter instrumental, tal y como se utiliza en matemática aplicada para realizar con rapidez una gran cantidad de cálculos; este aspecto puede tener posteriores implicaciones teóricas, puesto que es posible, por ejemplo, realizar conjeturas cada vez más fuertes sobre la distribución de los números primos en base a tablas cada vez mayores obtenidas mediante una computadora. Pero hay otro aspecto más profundo, que hace referencia a la posibilidad de que el ordenador pueda ser utilizado como un elemento indispensable en una demostración, con lo cual parece ponerse en entredicho el concepto tradicional de demostración en matemáticas. Pero, en cualquiera de los dos casos, este novedoso protagonismo de los ordenadores puede proporcionar un material que facilite la aproximación de los matemáticos a ámbitos filosóficos, como apunta Echeverría (1996).

Que algo está cambiando en este aspecto, se pone de manifiesto, según De Lorenzo (1993), con la aparición de un nuevo hacer en matemáticas ligado al ámbito computacional. Este hacer, aunque convive con los anteriores (figural y global), los supera en tanto en cuanto no considera como ellos que el objeto venga dado por una característica total. Sus componentes básicas son, en este nuevo hacer, reglas de cálculo y algoritmos de aproximación, que van constituyendo el objeto desde lo local a lo total. Estas reglas operan en el ámbito de lo estrictamente finito y alteran incluso los conceptos nucleares de los otros haceres; así, por ejemplo, la demostración ya no se asocia a un proceso concreto en sí mismo, sino que se liga más bien a la búsqueda de algoritmos. Este recalcitrante finitismo permite, sin embargo, una reconstrucción de la matemática desde lo global, aunque estrictamente ligada a lo computacional.

No obstante, algunos se resisten a aceptar sin reticencias este tipo de demostraciones, puesto que una de las características que implícitamente se exige a toda prueba es que sea escrutable (Tymoczko 1979), y una demostración llevada a cabo íntegramente por un ordenador sólo puede ser escrutable por otro ordenador. Pese a todo, los matemáticos están aprendiendo a convivir con este tipo de demostraciones, y ya hay algunos casos paradigmáticos en este sentido. En un régimen de demostraciones con un número relativamente pequeño de pasos la escrutabilidad es, de hecho, posible; pero cuando la cantidad de estos pasos aumenta, la situación se complica, y hay que plantearse si se confía o no en una máquina. La posibilidad de que en algún momento del desarrollo del programa aparezca un error es otro problema añadido, pero no nuevo: la aparición de errores en las demostraciones convencionales es algo que los matemáticos tienen que aceptar de puro evidente. Quizá conviniera practicar la modestia y admitir, como hacen De Millo *et al.* (1979), que si una prueba es excesivamente extensa sólo pueda ser entendida como correcta con un cierto grado de probabilidad. Así se disolvería una de las concepciones erróneas habituales respecto a la matemática, a saber, que los enunciados de la matemática son invariablemente correctos (Crowe 1988).

Ya se ha dicho que las especiales características de las matemáticas les han proporcionado tradicionalmente una situación de privilegio con respecto a las restantes ciencias. Pero este *status* distinguido ha tenido como consecuencia no deseada un aislamiento con relación al resto del quehacer científico. A ello ha contribuido en gran medida la distinción heredada entre ciencias empíricas y ciencias formales, y bajo estos parámetros transcurrió el período fundacional. Pero, desde hace algunas décadas, nuevas aportaciones apuntan a que esta diferencia se está disolviendo y que el muro establecido entre ambas resulta cada vez más difícil de mantener. Sin duda que uno de los más conspicuos defensores de derribar esta muralla es Quine (1970). Para éste, son la obviedad, la ubicuidad y la falta de objeto temático específico –que en desigual medida comparten lógica y matemáticas– las causas que han propiciado el que se las considere diferentes, y por lo tanto necesitadas de una fundamentación que no se requiere en el caso de las restantes ciencias. Como es conocido, Quine no admite esa excesiva sensibilidad que despoja de toda evidencia empírica a los enunciados lógicos y matemáticos, y acarrea una ficticia e inadecuada duplicación de la verdad.

Pero, tal como lo entiendo, las raíces últimas de esta tajante distinción, y el consiguiente aislamiento, no pueden situarse en el ámbito de las matemáticas: ni la propia naturaleza de éstas, ni la actitud de los matemáticos –ajenos en gran parte, a toda esta problemática– puede decirse que hayan propiciado este estado de cosas. Tampoco puede culparse de la situación –al menos no totalmente– a los filósofos: si alguna vez fueron culpables, parece que ahora tratan de enmendar su error.

Creo, por el contrario, que esta situación está provocada, en gran medida por algunos científicos que insisten en establecer, desde diversos puntos de vista, una radical distinción entre matemática y ciencia empírica. Pero es evidente que, si este dogma se acepta sin más y no se contextualiza adecuadamente, se corre el riesgo de dejar a la FM sin un contenido en principio más prometedor y enriquecedor. Dicho de otra manera, esta distinción desdibuja algunos aspectos que la FM debería considerar como prioritarios. Como ya he indicado, la problemática de este aislamiento ha sido totalmente ignorada durante el período fundacional, si bien nunca fue totalmente olvidada. Ha sido en época reciente, no obstante, cuando de nuevo ha saltado a la palestra de la discusión filosófica. A mi juicio, esta situación es insostenible hoy día, y hay que comenzar a replantearse las condiciones epistemológicas bajo las cuales pueden discurrir paralelas ciencia y matemática. Creo que en este sentido, la filosofía tiene mucho que decir.

Un caso paradigmático de la citada actitud del científico respecto a las matemáticas lo constituye Duhem. La visión del asunto que ofrece Crowe (1990) puede resultar excesivamente simple, e incluso caricaturesca, pero puede valernos como guía. Concretando, podríamos señalar que son tres los puntos que –desde la perspectiva del científico– establecen la distinción entre matemáticas y ciencia empírica. En primer lugar, una metodología profundamente diferente: el punto de partida de los matemáticos está constituido por axiomas universalmente aceptados, mientras que los físicos se ven obligados a modificar sus teorías en función de nuevos conocimientos empíricos. En segundo lugar, el conocimiento de la historia es fundamental para el caso de la física, por ejemplo, mientras que resulta totalmente superfluo en el caso de las matemáticas. Por último, y éste es un rasgo que muchos filósofos actuales comparten, el crecimiento de la matemática es lineal y acumulativo, constituye un progreso continuo, en el que ningún nuevo hallazgo obliga al abandono de un terreno previamente conquistado; nada de esto ocurre en la ciencia.

Pues bien, creo que cabe otra interpretación de estas distinciones. De entrada, hay que indicar que rechazarlas sin más nos colocaría en una situación dogmática y sin futuro. Pienso que esta triple articulación puede ser utilizada, no para distanciar, sino para aproximar entre sí la matemática y la ciencia empírica. En resumen, creo que un nuevo y más exhaustivo examen de la metodología de la matemática, acompasada por una crítica aproximación a su historia, y una insistencia en el análisis de su desarrollo y crecimiento, ofrecen elementos suficientes para plantear una FM en sintonía con la práctica matemática.

Es evidente que estos temas no tienen por qué ser, de manera exclusiva, objeto de atención (al menos directa) del matemático, puesto que hay parcelas en la investigación acerca de las matemáticas que escapan a sus propios intereses y motivaciones. Y no puede hablarse, según entiendo, de intromisión, ya que, si bien es cierto que la matemática es algo que atañe directamente a los matemáticos, también lo es que ellos no son los únicos autorizados a hablar e investigar sobre su disciplina. Por consiguiente, creo que puede plantearse el desarrollo de esta triple articulación desde un punto de vista filosófico sin que nadie tenga que rasgarse las vestiduras por ello.

En primer lugar, creo que convendría reservar un apartado en la investigación filosófica a la metodología de la matemática. Es más, aunque algunos asuntos se solaparan, cabría establecer paralelamente y como investigación separada, una metodología de la investigación matemática. Esta dedicación de los filósofos, por otra parte, no sería totalmente nueva: ya se ha llevado a cabo, y con éxito, en el campo de la ciencia empírica. Por indicar algunas posibilidades en este sentido, podría decirse que debe ser la filosofía, desde este ámbito de la investigación metodológica de las 'ciencias exactas', la que ponga de manifiesto cómo se han reconvertido las series divergentes para encontrar una utilidad en principio insospechada; es decir, a un nivel más general, se trataría de investigar cómo se reinterpretan teorías que se creían periclitadas y superadas, cuando no consideradas erróneas. Y es la filosofía (en conexión con la historia) la que debe dedicarse a indagar cómo los matemáticos resolvieron atolladeros o superaron situaciones de *impasse* ya pasados, con la intención de resolver y superar los actuales. O sea, se hace precisa una rigurosa investigación de la analogía como instrumento heurístico, o como dice Thom, conviene rescatar la analogía desde un punto de vista metodológico. La lista podría continuar.

Pero, contemplado todo esto desde la perspectiva del científico, la cosa no es tan compleja: es la metodología euclídea la que prevalece, la que hace del matemático mero demostrador. Así, la aparición de las geometrías no euclídeas o la axiomatización de la geometría por parte de Hilbert no impide decir a Duhem que las matemáticas son afortunadas por tratar con ideas que tienen su origen en las percepciones ordinarias, y que a través del trabajo espontáneo de abstracción y generalización se muestran más tarde tan claras, tan puras y tan simples. Por contra, las percepciones con las que está obligado a relacionarse el científico no permiten semejante tratamiento: es tal la confusión y complejidad de las nociones proporcionadas por los constitutivos físicos, que el estudio requiere un largo y duro trabajo de análisis. Consecuencia de todo esto, según Duhem, es que resulta peligroso establecer alianzas metodológicas entre matemáticas y ciencia empírica: las exigencias de Euclides son proposiciones cuya verdad autoevidente es afirmada por el sentido común, nada de lo cual ocurre en la física teórica.

Pero en la actualidad los tiros van por otro sitio y lo que se persigue es el establecimiento de paralelismos metodológicos cada vez más estrechos entre matemáticas y ciencia empírica. Sólo así se podrá comprender el pluralismo metodológico que preside la indagación matemática, y desde este ángulo el filósofo puede ofrecer ciertas cuestiones al matemático útiles para su quehacer diario. Como indica Echeverría

(1996), los filósofos de la matemática deberían estudiar principalmente lo que los matemáticos practican, la práctica matemática.

Ya he indicado que, con objeto de atender afinidades metodológicas, conviene rastrear crítica y cuidadosamente en la historia de las matemáticas. Como es conocido, en el ámbito de la concepción heredada, la historia queda desvinculada de la filosofía, pero yo diría con Lakatos que es preferible el historicismo, aunque miserable, a su ausencia total. En el ámbito del fundacionismo, la historia fue considerada poco más que un pasatiempo, tanto por los propios matemáticos (Bourbaki es una muestra), como por los científicos. En este contexto, la historia no pasa de ser un objeto de legítima curiosidad, pero en absoluto es esencial para la comprensión de las matemáticas. No obstante, aunque un poco deslavazada todavía, comienza a establecerse una nueva ortodoxia que asigna a la historia algo más que un mero recurso lúdico o didáctico. En este aspecto quisiera destacar a Kitcher (1988), quien –desde una postura naturalista– mantiene la necesidad de asignar relevancia epistemológica a la historia. Según este autor, el apriorismo ha sido atractivo sólo porque la única alternativa disponible era el empirismo de Mill; baste recordar en este sentido las críticas de Frege, o las descalificaciones de Carnap. Pero puede trascenderse este par de alternativas admitiendo que el conocimiento matemático es un producto histórico. En la epistemología general representa una tarea fundamental la determinación de los añadidos cognoscitivos que se generan desde un *corpus* de conocimiento ya establecido, y en este sentido, la perspectiva naturalista permite una interpretación digna de ser considerada. Las creencias matemáticas disponibles en un cierto momento histórico están justificadas –o garantizadas– en virtud de su relación con un cuerpo anterior de creencias; de hecho, el conocimiento matemático no se construye desde el principio en cada contexto histórico, hay ya un poso sobre el que se acumulan nuevas creencias. La novedad naturalista se basa en que las transiciones de un estadio a otro no tienen por qué estar justificadas deductivamente; basta con que sean racionales, con todo el añadido problemático que supone el mismo criterio de racionalidad. Y aún más: el núcleo sobre el que se produce el cambio es una práctica que aplican felizmente los miembros de una generación, que en gran parte recibieron de la anterior, y que a su vez transmitirán a la siguiente.

Como se ve, esta posición defendida por Kitcher incorpora a la FM algo semejante al concepto de paradigma, pero sólo en parte, porque tiene buen cuidado de distinguir. Una práctica (o un paradigma en su caso) consta de hasta cinco elementos que predominan en un período histórico determinado; para que tenga lugar una transición, opina Kitcher, basta con que uno de esos elementos se modifique. Desde esta perspectiva, obvia el problema de la incomensurabilidad, al tiempo que mantiene el aspecto no teórico del concepto de paradigma, a saber, la dependencia del cambio de factores ajenos a la propia ciencia, a la propia matemática, en este caso.

Por último, la explicación del tipo de avance que se da en las matemáticas continúa siendo una cuestión abierta que está aún muy lejos de provocar consenso entre los filósofos. El prejuicio científico más generalizado al respecto se basa en la consideración de que en la matemática –a diferencia que en la física– se da un crecimiento tranquilo y regular. Es tal el grado de precisión y rigor, que, una vez que se ha establecido una demostración, ni siquiera cabe la divergencia entre los propios matemáticos. Las doctrinas matemáticas se han desarrollado siguiendo un proceso continuo, sin que jamás un resultado haya obligado a renunciar a otro obtenido con anterioridad. Nada de esto, como es natural, ocurre en la física: su desarrollo es discontinuo y los principios no se establecen de una vez por todas; si la física progresa es gracias a que introduce discrecionalmente leyes suplementarias con objeto de incluir las excepciones que aparezcan. Este cuadro está obviamente desfasado, como pone de manifiesto la historia en multitud de ocasiones; es precisamente en la historia donde se muestra que en la matemática se dan rupturas epistemológicas que pueden resultar engañosas por la aparente permanencia del objeto. Lo que ocurre es que éste se reinterpreta de tal manera que resulta irreconocible, y en este sentido, puede hablarse de paradigmas inconmensurables en matemáticas.

En definitiva, espero haber puesto de manifiesto que todavía queda mucho por hacer; de hecho, la intención de esta breve miscelánea no ha sido otra que mostrar que la Filosofía de la Matemática continúa viva y que, aunque retome temas ya pasados, los nuevos enfoques que se adoptan suponen un enriquecimiento significativo. Se ha constatado que nuevas voces se alzan reclamando una actividad filosófica más próxima a la práctica matemática, y he mostrado mi acuerdo sobre este punto; pero estoy convencido de que, aun cuando fuera éste el proceder mayoritario en el futuro, ello no supondría el abandono de las grandes cuestiones que han ocupado el siglo que acaba. En última instancia, si de algo podemos estar seguros respecto al milenio que comienza, es de que la discusión va a continuar, que pocas cuestiones se van a considerar definitivamente cerradas, que temas que se creían olvidados van a tomar nuevo auge tratando de adaptarse a situaciones nuevas, que surgirán asuntos difícilmente previstos en la actualidad pero latentes en los planteamientos actuales, etcétera. Dicho de otro modo, continuará la filosofía.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALCOLEA, J. 1986: «Un aspecto del intuicionismo matemático», *Quaderns de filosofia i ciència*, 15-16, pp.13-20.

ASPRAY, W. y KITCHER, P. 1988: *History and philosophy of modern mathematics*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

AZZOUNI, J. 1994: *Metaphysical myths, mathematical practice: the ontology and epistemology of the exact sciences*. Cambridge: Cambridge University Press.

BENACERRAF, P. 1965: «What numbers could not be», *Philosophical Review*, 74, pp. 47-73.

— 1973: «Mathematical truth», *Journal of Philosophy*, 70, pp. 661-679.

— y H. PUTNAM 1983: (eds.) *Philosophy of mathematics. Selected readings*. Cambridge: University Press.

BOOLOS, G. 1985: «Nominalist platonism», *Philosophical Review*, 94, pp. 327-344.

CABA, A. 1995: «Cuestiones abiertas en el platonismo de Gödel. La controversia Chihara-Maddy», *Philosophica Malacitana*, 8, pp. 29-47.

CROWE, M. J. 1988: «Ten misconceptions about mathematics and its history», en W. Aspray y P. Kitcher 1988, pp. 260-277.

— 1990: «Duhem and history and philosophy of mathematics». *Synthese*, 83, pp. 431-447.

DEMOPOULOS, W. 1995: (ed.) *Frege's philosophy of mathematics*. Cambridge: Harvard University Press.

DIEUDONNÉ, J. A. 1987: *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*, trad. de Mirnaya y José Chabás, Madrid: Alianza Editorial, 1989.

ECHEVERRÍA, J. 1992: «Observations, problems and conjectures in number theory. The history of the prime number theorem», J. Echeverría, J. *et al.* (eds.) (1992) *The space of mathematics*, Berlin: Walter de Gruyter, pp. 230-252.

— 1996: «Empirical methods in mathematics. A case-study: Goldbach's conjecture», G. Munévar (1996) (ed.) *Spanish studies in the philosophy of science*, Kluwer: Dordrecht, pp.19-55.

FIELD, H. 1974: «Quine and the correspondence theory». *Philosophical Review*, 83, pp. 200-228.

— 1980: *Science without numbers. A defense of nominalism*. Princeton: Princeton University Press.

GARCIADIEGO, A. R. 1992: *Bertrand Russell y los orígenes de las «paradojas» de la teoría de conjuntos*. Madrid: Alianza Editorial.

GONZÁLEZ, W. J. 1990: «Semántica antirrrealista: intuicionismo matemático y concepto de verdad», *Theoria*, 12-13, pp.149-170.

GOTTLIEB, D. 1980: *Ontological economy: substitutional quantification and mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

HELLMAN, G. 1989: *Mathematics without numbers. Towards a modal-stuctural interpretation*. Oxford: Clarendon Press.

JUBIEN, M. 1977: «Ontology and mathematical truth». *Nous*, 11, pp. 133-150.

KITCHER, P. 1988: «Mathematical naturalism», en W. Aspray y P. Kitcher (1988), pp. 293-325.

— 1990: «The foundations of mathematics», en R. C. Olby *et al. Companion to the story of modern science*. London: Routledge, pp. 677-689.
LAKATOS, I. 1976: *Pruebas y refutaciones*, tr. C. Solís, Madrid: Alianza Editorial, 1978.
— 1978: *Matemáticas, ciencia y epistemología*, tr. D. Ribes Nicolás, Madrid: Alianza Editorial, 1981.
LEAR, J. (1977) «Sets and semantics», *The Journal of Philosophy*, 74, pp. 86-102.
LIZCANO. E. 1993: *Imaginario colectivo y creación matemática*. Gedisa: Barcelona.
LORENZO, J. de 1992: «Matemática y filosofía: sus 'nefastas' influencias mutuas. 'Nuevas' filosofías de la matemática», *El Basilisco*, 13, pp. 3-13.
— 1993: «La razón constructiva matemática y sus haceres». *Mathesis*, 9, pp. 129-153.
McCARTY, D. C. 1993: «Review essay: on the failure of mathematic's philosophy». *Synthese*, 96, pp. 255-291.
MADDY, P. 1990: *Realism in mathematics*. Oxford: Clarendon Press.
— 1991: «Philosophy of mathematics: prospects for the 1990's». *Synthese*, 88, pp. 155-164.
MILLO, R. de., R. LIPTON y A. PERLIS 1979: «Social progress and proofs of theorems and programs», *Communications of the Association for Computing Machinery*, 22 (5), pp. 271-280.
MOSTERÍN, J. 1980: «La polémica entre Frege y Hilbert acerca del método axiomático», *Teorema*, 10, pp. 287-306.
PARSONS, C. 1971: «Ontology and mathematics», *The Philosophical Review*, 80, pp. 151-176.
PUTNAM, H. 1967: «Mathematics without foundations», en P. Benacerraf y H. Putnam (1983), pp. 295-311.
QUINE, W. V. O. 1936: «Truth by convention», en P. Benacerraf y H. Putnam (1983), pp. 329-354.
— 1970: *Filosofía de la lógica*, trad. Manuel Sacristán, Madrid: Alianza Editorial, Madrid, 1981.
RESNIK, M. D. 1997: *Mathematics as a science of patterns*. Oxford: Clarendon Press.
ROTA, G. C. 1991: «The pernicious influence of mathematics upon philosophy», *Synthese*, 88, pp. 165-178.
SHAPIRO, S. 1983: «Mathematics and reality», *Philosophy of Science*, 50, pp. 523-548.
— 1991: *Foundations without foundationalism*. Oxford: Clarendon Press.
SIMPSON, S. G. 1988: «Partial realizations of Hilbert's program», *The Journal of Symbolic Logic*, 53, pp. 349-363.
STEINER, M. 1975: *Mathematical knowledge*. Ithaca and London: Cornell University Press.
TYMOCZKO, T. 1979: «The four-color problem and its philosophical significance», *Journal of Philosophy*, 76, pp. 57-83.
WHITE, N. P. 1974: «What numbers are», *Synthese*, 27, pp. 111-124.
WILDER, R. 1968: *Evolution of mathematical concepts*. London: Open University Press.
— 1981: *Mathematics as a cultural system*. Oxford: Pergamon Press.
WRIGHT, C. 1983: *Frege's conception of numbers as objects*. Aberdeen: Aberdeen University Press.