APROXIMACIÓN A UNA RESOLUCIÓN ANALÍTICA PARA DETERMINAR EL PUNTO DE EQUILIBRIO BAJO CONDICIONES DE VARIABILIDAD Y NO LINEALIDAD

Hernán Rocha Pavés, Ricardo Méndez Romero, Eric Paredes Uribe

Departamento de Administración y Economía - Departamento de Matemática y Física
Universidad de Magallanes-Chile

Hernán Rocha, hernan.rocha@umag.cl. Avda. Bulnes 01855. Pta. Arenas - Chile
Ricardo Méndez, ricardo.mendez@umag.cl. Avda. Bulnes 01855. Pta. Arenas - Chile
Eric Paredes, eric.paredes@umag.cl. Avda. Bulnes 01855. Pta. Arenas - Chile

Palabas Claves: equilibrio, linealidad, variabilidad

Resumen

En la determinación del punto de equilibrio, la literatura se refiere fundamentalmente al comportamiento lineal de los costos e ingresos asociados a diferentes volúmenes de producción y venta (Baker et. al. 1983), lo que permite determinar, a través de un método algebraico, el volumen de equilibrio.

Bajo la existencia de comportamientos variables en precios y costos, derivado en la conducta del mercado, se generan relaciones no lineales, lo que hace posible graficar dichos comportamientos, pero sin embargo, deja en incógnita la formulación algebraica del problema. En este estudio se plantea un modelo aproximado de resolución algebraica, a través de una estimación de múltiples tramos de producción y venta, de carácter lineal, para determinar los diferentes puntos de equilibrio bajo condiciones de no linealidad de las variables.

Introducción

En el modelo conocido como Costo-Volumen-Utilidad, la gráfica que ofrece el modelo, es una aproximación lineal a una función curvilínea y existen diferentes factores que hacen que los beneficios reales puedan ser diferentes (Dearden 1976). En este sentido la literatura se refiere fundamentalmente al comportamiento lineal de los costos e ingresos asociados a diferentes volúmenes de producción y venta, lo que es posible graficar para la determinación del volumen de equilibrio.

En la realidad, existen comportamientos variables en precios y costos, derivado en la conducta del mercado. Las proyecciones de ventas, costos y resultados se pueden calcular y graficar a través de métodos numéricos, sin embargo, la formulación algebraica del problema es de carácter cuadrático y su resolución, desde el punto de vista analítico, es aproximado ya que se utilizan una serie de supuestos que imposibilitan una determinación precisa .

Revisada la literatura clásica referida al problema planteado, se presenta un método para determinar los posibles puntos de equilibrio del modelo Costo-Volumen-Utilidad, bajo condiciones de no linealidad de los precios y costos variables unitarios.

Descripción del Problema y Objetivos

<u>Problema a estudiar</u>

Los modelos utilizados en gestión de empresas tratan de representar la realidad en su forma más simple, en situaciones cuantitativas los patrones de análisis se sustentan en ecuaciones lineales, basados en sistemas de único índice, es decir, con una única variable independiente. Así, se representan y proyectan problemas de inventarios, de capital de trabajo, de flujos de efectivo, de leverage operativo y financiero, entre otros. Varios de estos temas avanzan en su planteamiento, generando esquemas más sofisticados, con relaciones probabilísticas y estocásticas, pero la "Relación Costo-Volumen-Utilidad" se ha mantenido con el modelo tradicional de línea recta, lo que restringe el proceso de toma de decisiones. A la fecha, las mejoras al esquema clásico consisten en agregar simulaciones y comparaciones sucesivas, vía análisis numérico, pero que no lograr representar el comportamiento no lineal de las variables involucradas. Una solución analítica del problema, permitiría aproximarse a una resolución algebraica más acorde al proceso de toma de decisiones, que cada vez es más cuantitativo y multivariable.

Objetivos del Estudio

El objetivo general de este ensayo es "Definir un modelo aproximado de resolución analítica para determinar el punto de equilibrio bajo condiciones de variabilidad y no linealidad.

Como objetivos específicos se busca:

- Determinar una función de venta y de costo total no lineal con relaciones lineales por tramos de producción y venta.
- Proponer un método analítico aproximado para determinar el punto de equilibrio bajo condiciones de no linealidad

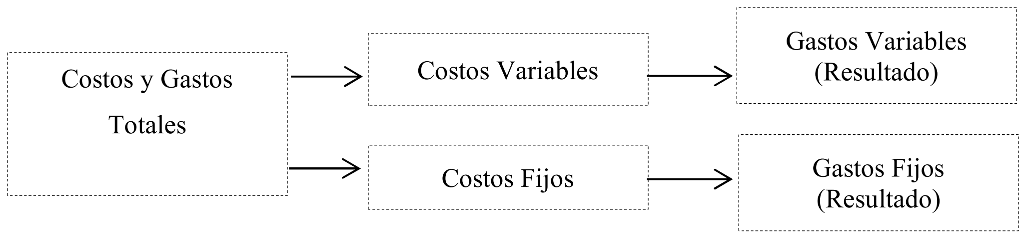
Modelo tradicional de Punto de Equilibrio Operativo

Modelo Costo-Volumen-Utilidad

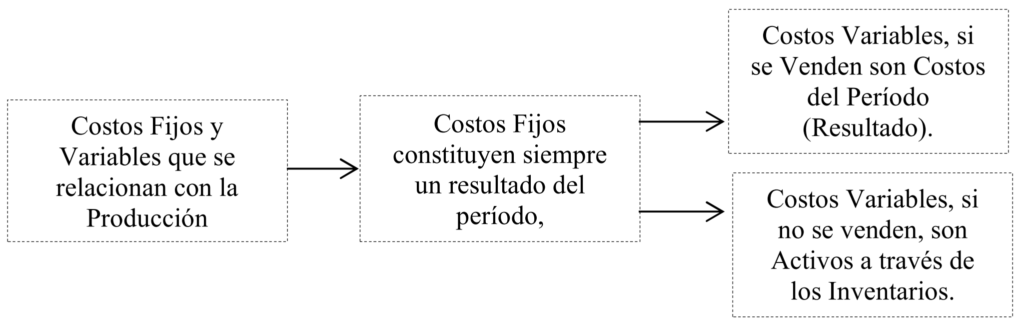
Teniendo como punto de partida discrecional autores como Lawrence 1970, Neuner 1973, Waldo 1973, Van Horne 1973, Shillinglaw 1974, Li 1975, Dearden 1976, Backer y Jacobsen 1980, Matz y Usry 1980, Backer et. al. 1983, Horngren 1983, Rosanás y Ballarín 1986, Mallo 1989, Horngren y Foster 1991, Polimeni et. al. 1994, , Cashin y Polimeni 1999, Ramirez 1997, Mallo et. al. 2000, entre otros, se observa que el principio central de cálculo, es el comportamiento lineal de la variables del modelo

Costo-Volumen-Utilidad (precio y costo variable unitario) que son constantes en ciertos niveles de producción y ventas.

En el Costeo Directo y luego de su acumulación, se separan los costos entre aquellos Gastos Fijos o Variables de Administración que corresponden a Gastos de Administración y Ventas, y Costos Fijos o Variables que tienen relación con la Producción.



El destino de los Costos Fijos, por su comportamiento independiente de los volúmenes de producción (incluso si este es 0) constituyen un resultado del período. Los Costos Variables asociados a los productos vendidos, constituyen un resultado del período y los Costos Variables asociados a los productos no vendidos (Inventarios) pasan a constituir parte de los Activos Corrientes de la Empresa.



El razonamiento que determina el resultado operacional es igual al Ingreso Total menos los Costos Totales: $I - CT = R$. Desde el punto de vista del Costeo Directo el Costo Total es igual al Costo Variable Total más el Costo Fijo Total: $CV + CF = CT$; el Costo Variable Total es igual al Costo Variable Unitario por la Cantidad Producida: $(CV_u \times Q) = CV$, entonces el Costo Total se expresa también como: $(CV_u \times Q) + CF$. De igual forma el Ingreso Total se expresa como el Precio Unitario por la Cantidad Vendida: $(P_u \times Q) = I$, entonces la ecuación inicial: $I – CT = R$, quedará expresada de la siguiente forma: $(P_u \times Q) – [(CV_u \times Q) + CF] = R$

Es decir, el Resultado se determina como la diferencia entre: el producto del Precio Unitario por la Cantidad Vendida y el producto del Costo Variable Unitario por la Cantidad Producida más, los Costos Fijos Totales. Desde este planteamiento, es posible obtener el valor de las variables de Costo Variable Unitario, Precio y Cantidad (Volumen), despejando aquella que sea relevante para el análisis. Por ahora este estudio se centrará en el valor de la variable Q que hace a R = 0 e implica que si: $(P_u \times Q) – [(CV_u \times Q) + CF] = R$; $Q \times (P_u – CV_u) - CF] = R$; $Q = (R + CF) / (P_u – CV_u)$. Si R = 0 entonces: $Q = CF / (P_u – CV_u)$, donde $(P_u – CV_u)$ corresponde al margen unitario disponible para cubrir CF y si el objetivo es obtener un R = 0, la operación necesaria es: $CF / (P_u – CV_u)$, expresión que en su denominador se denomina Margen de Contribución (Margen Unitario que contribuye a cubrir los Costos Fijos).

Modelo lineal del Punto de Equilibrio

La definición básica de Punto de Equilibrio en los Costos, (Horngren y Foster 1991) se refiere al nivel de Ingresos Totales (IT) donde los Costos Totales (CT), formado por Costos Fijos y Costos Variables se encuentran debidamente resguardados. Desde este punto de vista, la empresa que se encuentra en situación de equilibrio no tiene un beneficio (resultado igual a cero), lo que implica que no genera superávit o déficit. Un primer análisis indica entonces que por sobre el Punto de Equilibrio, la empresa genera superávit y bajo el Punto de Equilibrio la empresa genera déficit. Desde el punto de vista algebraico, la ecuación queda expresada como: IT = CT.

La determinación del Punto de Equilibrio implica encontrar la cantidad de unidades Q, que le permite a la empresa cubrir sus costos. Siguiendo el razonamiento anterior, si los

Ingresos Totales son el producto del Precio Unitario (P_u) y la Cantidad Vendida (Q), entonces se puede desagregar la ecuación IT = CT como: P_u x Q = CT y, si los Costos Totales corresponden a los Costos Variables Unitarios (CV_u) por la Cantidad Vendida (Q), entonces se puede desagregar la ecuación P_u x Q = CT como: P_u x Q = (CV_u x Q) + CF

El Punto de Equilibrio también se resuelve desde una mirada gráfica, marcando inicialmente la curva de los Costos Fijos y permanece constante a cualquier nivel de operación, hasta la capacidad normal que se defina. Seguidamente se marca la curva de los Costos Totales que se inicia a partir de los Costos Fijos, incrementándose por cada unidad de volumen. Luego se marca la curva de Ingresos que se inicia a partir de 0, incrementándose por cada unidad de volumen. El punto de intersección de las curvas IT y CT (Ingreso Total y Costo Total) es el Punto de Equilibrio.

Metodología

El alcance de esta ponencia se define como un ensayo teórico-práctico, debido a que se pretende reemplazar el modelo tradicional del punto de equilibrio operativo, en un modelo no lineal, que funcione como una solución aproximada en situaciones reales. Para ello, se busca transformar los esquemas lineales de las distintas variables del modelo en relaciones cuadráticas.

Métodos de análisis

Para mutar de líneas rectas a líneas curvas, se reemplaza la función lineal de ventas y de costo total, por una serie sucesiva de tramos, generando una función cuadrática formada por la unión de n segmentos parabólicos.

Se utilizó el método de análisis algebraico para determinar las funciones apropiadas a la resolución del problema central. También se exponen las funciones bajo el parámetro de generación de ecuación y se aplican las funciones determinadas, que prueban su resultado aproximado.

Complementariamente, se recurre al análisis numérico para simular las curvas de ventas y costos, según diferentes proyecciones de cambios en precios, cantidades y cotos variables unitarios, según los diferentes tramos de producción y venta estimados.

Variables de análisis

En este ensayo, con el propósito de simplificar la definición del modelo, los costos fijos se incorporan como un parámetro, dejando como variables el precio, el costo variable unitario y la cantidad

Resultados

Antecedentes previos

Se inicia el proceso bajo la premisa que el análisis lineal se encuentra limitado, puesto que se asume que durante todo el recorrido de producción y venta, el precio y el costo variable unitario permanecen constantes, situación que no necesariamente es realista. Es decir, probablemente el precio se vea influenciado por el volumen, generando variaciones y el costo variable puede aumentar o disminuir según el nivel de producción respecto a su máxima capacidad (Van Horne 1973).

La solución algebraica para determinar el punto de equilibrio bajo condiciones de variabilidad y no linealidad, parte entonces, por definir precios y costos variables unitarios lineales por tramos de producción y venta.

Precios Lineales por Tramos. Función de Ingreso Total no Lineal

Sea $\boldsymbol{P_u(Q)}$ el precio unitario de un producto, para un nivel de producción Qi.

Sean $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ valores fijos de Q, tales que:

$$\boldsymbol{Q_0 = 0 < Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n} \qquad \ldots (1)$$

Sean $P_0, P_1, \ldots, P_n$ valores de $P_u(Q)$, tal es que:

$$\boldsymbol{P_u(Q_i) = P_i\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n} \qquad \ldots (2)$$

Si se definen las diferencias (incrementos o decrementos, según el signo positivo o negativo):

$$\boldsymbol{\Delta P_i = P_i - P_{i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\ ; \quad \Delta Q_i = Q_i - Q_{i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n} \qquad \ldots (3)$$

Si se supone ahora que el precio unitario del producto es lineal en los tramos $[Q_{i-1},\ Q_i]$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Específicamente,

$$\boldsymbol{P_u(Q) = P_{i-1} + \frac{\Delta P_i}{\Delta Q_i} \times (Q_i - Q_{i-1})\,, \quad Q_{i-1} \leq Q \leq Q_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n} \qquad \ldots (4)$$

Bajo los supuestos anteriores, la función de ingreso total por ventas, $I(Q)$, se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{I(Q) = (P_{i-1} \times Q_i) + \frac{\Delta P_i}{\Delta Q_i} \times \left(Q_i - Q_{i-1}\right) Q_i; \quad Q_{i-1} \leq Q \leq Q_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n} \qquad \ldots (5)$$

Características importantes de la función de ingreso total (ventas)

1. Es una función cuadrática en cada intervalo $[Q_{i-1},\ Q_i]$.
2. Es una función continua para cualquier valor de Qi en el dominio $[0, Q]$.
3. La gráfica de la función $IT(Q)$ es una línea continua que se forma mediante la unión de n segmentos parabólicos.

Costos Unitarios Lineales por Tramos. Función de Costo Total no Lineal

Sea $\boldsymbol{CV_u(Q)}$ el precio unitario de un producto, para un nivel de producción Qi.

Sean $CV_0, CV_1, \ldots, CV_n$ valores de $CV_u(Q)$, tales que:

$$\boldsymbol{CV_u(Q_i) = CV_i\,,\quad i = 0, 1, 2, \ldots, n} \qquad \ldots (6)$$

Al definir las diferencias (incrementos o decrementos, según el signo positivo o negativo):

$$\Delta \boldsymbol{CV_i = CV_i - CV_{i-1}\,,\quad i = 1, 2, \ldots, n} \qquad \ldots (7)$$

Si se sume ahora que el costo unitario del producto es lineal en los tramos $[Q_{i-1},\ Q_i]$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Específicamente,

$$\boldsymbol{CV_u(Q) = CV_{i-1} + \frac{\Delta P_i}{\Delta Q_i} \times (Q - Q_{i-1})\,,\quad Q_{i-1} \leq Q \leq Q_i\,,\quad i = 1, 2, \ldots, n} \qquad \ldots (8)$$

Si CF_0 representa el costo fijo, entonces la función de costo total, $CT(Q)$, se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{CT(Q) = CF_0 + \ (CV_{i-1} \times Q_i\,) + \frac{\Delta CV_i}{\Delta Q_i} \times (Q_i - Q_{i-1})Q;\quad Q_{i-1} \leq Q \leq Q_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n} \qquad \ldots (9)$$

Características importantes de la función de costo total:

1. Es una función cuadrática en cada intervalo $[Q_{i-1},\ Q_i]$.
2. Es una función continua para cualquier valor de Q en el dominio $[0, Q]$.
3. La gráfica de la función $CT(Q)$ es una línea continua que se forma mediante la unión de n segmentos parabólicos.

Modelo propuesto

Para determinar el punto de equilibrio en condiciones de no linealidad, se procede a resolver la ecuación $IT(Q) = CT(Q)$, en el intervalo $[Q_{i-1},\ Q_i]$.

En este caso, la condición de equilibrio conduce a la ecuación:

$$\boldsymbol{mQ^2 + (P_{i-1} - CV_{i-1} - mQ_{i-1}) \times Q - CF_0 = 0} \qquad \dots (10)$$

Donde $\boldsymbol{m = \frac{\Delta P_i - \Delta CV_i}{\Delta Q_i}}$ … (11)

Si se denota por $\boldsymbol{D}$ al discriminante de la ecuación cuadrática (10). Entonces:

$$\boldsymbol{D = (P_{i-1} - CV_{i-1} - mQ_{i-1})^2 + 4CF_0 m,} \qquad \dots (12)$$

Caso 1:

Si ***D = 0,*** entonces la ecuación (10) tiene una única solución:

$$\boldsymbol{Q^* = \frac{-(P_{i-1} - CV_{i-1} - mQ_{i-1})}{2m} \qquad (m \neq 0)} \qquad \dots (13)$$

Caso 2:

Si ***D > 0***, entonces la ecuación (10) tiene dos soluciones algebraicas $Q_1{}^* \; y \; Q_2{}^*$:

$$\boldsymbol{Q_1{}^* = \frac{-(P_{i-1} - CV_{i-1} - mQ_{i-1}) - \sqrt{D}}{2m} \qquad (m \neq 0)} \qquad \dots (14)$$

$$\boldsymbol{Q_2{}^* = \frac{-(P_{i-1} - CV_{i-1} - mQ_{i-1}) + \sqrt{D}}{2m} \qquad (m \neq 0)} \qquad \dots (15)$$

<u>Determinación del Punto de Equilibrio por Método Analítico</u>

Para determinar los diferentes puntos de equilibrio que se pueden generar en una relación no lineal se requiere:

a) Estimar las variaciones de precios y de costo variable unitario para cada tramo de producción y venta.

b) A través de análisis numérico, proyectar las ventas y costos, graficando las curvas e identificando los tramos de ventas donde se generan los puntos de equilibrio: $[Q_{i-1},\ Q_i]$

c) Aplicar el modelo propuesto, para cada intervalo $[Q_{i-1},\ Q_i]$, donde las curvas de ventas y costos totales se intersectan en un punto de abscisa Q^*

Observación: Si $\Delta \boldsymbol{P_i} = \Delta \boldsymbol{CV_i}$, entonces la ecuación (10) es lineal y tiene solución tradicional:

$$\boldsymbol{Q} = \frac{\boldsymbol{CF_0}}{\boldsymbol{P_{i-1} - CV_{i-1}}} \qquad \ldots (16)$$

De lo contrario, el punto de equilibrio estará determinado por aquel nivel de producción y ventas incluido en el intervalo $[Q_{i-1},\ Q_i]$.

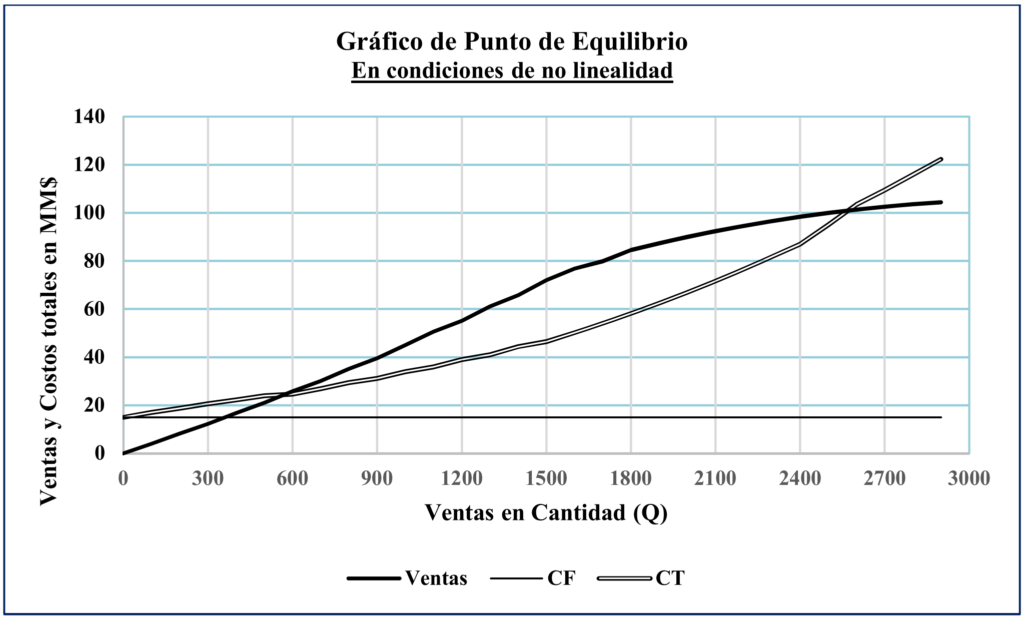
Para cada intersección de las curvas de ventas y costos totales, si

$\boldsymbol{Q_1}^* = \frac{-(\boldsymbol{P_{i-1} - CV_{i-1} - mQ_{i-1}}) - \sqrt{\boldsymbol{D}}}{\boldsymbol{2m}}$ es negativo, no existe solución válida.

Pero, si

$\boldsymbol{Q_2}^* = \frac{-(\boldsymbol{P_{i-1} - CV_{i-1} - mQ_{i-1}}) + \sqrt{\boldsymbol{D}}}{\boldsymbol{2m}}$ es positivo, se puede determinar el punto de equilibrio, a través de una solución aproximada.

En el gráfico siguiente se muestra una simulación, donde el primer punto de equilibrio corresponde al tramo 500-600 unidades. Como el discriminante es mayor que cero (1.881), existe una solución aproximada que es válida, donde Q* =~ 572 unidades.



Conclusiones

El modelo de Punto de Equilibrio tiene la particularidad de ser un método de amplia utilidad a pesar de las restricciones que se le imputan. No obstante, al asumir un recorrido constante del precio a través de diferentes cantidades de producción-venta, el análisis asume fundamentalmente un comportamiento lineal del precio y los costos asociados, lo que es posible graficar para la determinación del volumen óptimo. Como se ha expresado en el estudio, bajo la existencia de comportamientos variables en los precios y costos, derivado entre otros a la conducta del mercado, es posible graficar dichos comportamientos, pero sin embargo se mantenía en incógnita la formulación algebraica del problema y consecuentemente su resolución desde el punto de vista analítico. De esta forma, ante el hallazgo que la literatura clásica referida al problema se encontraba con un vacío en la resolución gráfica y analítica de problemas de Punto de Equilibrio bajo variables no lineales, se determinó una solución que aproxima la respuesta a su expresión más cercana.

Específicamente, se concluye que:

- Bajo el supuesto de que las variables son constantes y lineales en tramos de producción y ventas pequeños, es posible aplicar un modelo analítico de resolución aproximada.
- El modelo propuesto es aplicable cuando el discriminante de la función cuadrática es positivo.
- Esta propuesta es un complemento a los modelos gráficos y de simulación aplicables en la actualidad.
- Como limitación, este primer ensayo está basado en la variable cantidad, que es aplicable a empresas monoproductoras o que su método de medición se sustenta en

esta variable, como empresas pesqueras, vitivinícolas, eléctricas, distribuidoras de combustibles y otras afines.

Referencias

Backer, M., y L. Jacobsen (1980). Contabilidad de Costos.

Un enfoque administrativo y de gerencia. México: McGraw-Hill.

_______, L. Jacobsen y D. Ramirez (1983). Contabilidad de Costos.

Un enfoque administrativo para la toma de decisiones. México: McGraw-Hill.

Cashin, A. y R. Polimeni (1999). Contabilidad de Costos. México. McGraw-Hill.

Dearden, J. (1976). Sistemas de Contabilidad de Costos y de Control Financiero.

Bilbao: Deusto.

Horngren, Ch. (1983) Contabilidad Administrativa. Introducción. México.

Prentice Hall.

_______, y G. Foster (1991). Contabilidad de Costos.

Un Enfoque Gerencial, 6° ed. México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

Lawrence, W. B. (1970). Contabilidad de Costos. México. Hispano Americana.

Li, D. 1975. Contabilidad de Costos para uso de Gerencia. México. DIANA.

Mallo, C. (1989). Contabilidad de Costos y de Gestión. Madrid. Pirámide.

_____, R. Kaplan, S. Meljem y C. Giménez (2000).

Contabilidad de Costos y Estrategia de Gestión. Madrid. Prentice Hall.

Matz, A. y M Usry (1980). Contabilidad de Costos. Planificación y Control.

Cincinati. South-Western Publisching Co.

Neuner, J. (1973). Contabilidad de Costos. México: Hispano Americana.

Polimeni, R., F. Fabozzi, y H. Adelberg (1994). Contabilidad de Costos.

Conceptos y aplicaciones para la toma de decisiones gerenciales.

Colombia: McGraw-Hill.

Ramirez, D. 1997. Contabilidad Administrativa. Mexico. McGRaw-Hill.

Rosanás, M. y E. Ballarín (1986). Contabilidad de Costos para la Toma de Decisiones. Bilbao. Biblioteca de Gestión.

Shillinglaw, G. (1974). Contabilidad de Costos. Análisis y Control. Buenos Aires. El Ateneo.

Van Horne, J. 1973. Administración Financiera. Mexico. AID

Waldo, S. (1973). Contabilidad B´sica de Costos. México. CECSA.