JUEGOS SIMPLES E ÍNDICE DE PODER DE SHAPLEY-SHUBIK (*)

Por RAFEL AMER,
FRANCESC CARRERAS
ANTONIO MAGAÑA

SUMARIO

RESUMEN

Presentamos una introducción a los juegos simples. Entre otras muchas utilidades, estos juegos permiten describir y analizar los sistemas de decisión colectiva, muchos de los cuales son representables a menudo como juegos de mayoría ponderada —una clase especial de juegos simples—. Uno de los problemas más interesantes en este contexto es la definición de una medida de la distribución de poder entre los agentes involucrados en el sistema. Este problema recibe una solución satisfactoria mediante el índice de poder de Shapley-Shubik, que es la restricción del valor de Shapley a los juegos simples. Las aplicaciones al análisis económico y político quedan adecuadamente ilustradas mediante una serie de ejemplos que jalonan el texto.

(*) Trabajo financiado parcialmente por el Proyecto BFM 2000-0968 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

1. INTRODUCCIÓN

Un *juego cooperativo* definido en un conjunto de *jugadores* N = {1, 2, ..., n} es una función u que asigna a cada *coalición* S $\subseteq$ N un número real u(S). Se exige solamente que u($\varnothing$) = 0. Se interpreta u(S) como la *utilidad* mínima que pueden garantizarse los jugadores de S actuando coordinadamente, sea cual sea la actitud de los restantes jugadores (los de N \ S).

Una de las clases más interesantes de juegos cooperativos es la de los *juegos simples.* Con este tipo de juegos describimos la capacidad de decisión de las coaliciones en un sistema de votación y podemos analizar la importancia estratégica de cada agente involucrado en el sistema. Comenzaremos con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 1 (El consorcio). Imaginemos un consorcio formado por cuatro empresas: dos de ellas son semejantes por volumen de facturación, mientras que las otras dos, también semejantes entre sí, son de menor entidad. El equipo directivo del consorcio está formado por los presidentes de las cuatro empresas, a los que designaremos por 1, 2, 3 y 4.

La toma de decisiones está estructurada de manera equilibrada. Para aprobar una propuesta es necesario, en principio, que tenga al menos el apoyo de (los presidentes de) las dos empresas principales. Sin embargo, con el fin de evitar un número excesivo de situaciones de *impasse* y agilizar el mecanismo decisorio, para salvar una posible discrepancia entre las empresas principales se admite también la aprobación de una propuesta si están a favor de la misma al menos una de las empresas principales y las dos empresas secundarias.

Resumimos esta información mediante la lista de las coaliciones de (presidentes de) empresas que, sin contener elementos superfluos, son capaces de asegurar la aprobación:

$$W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

La lista completa de todas las coaliciones con fuerza suficiente para garantizar la aprobación es el resultado de ampliar cada una de las anteriores de todas las formas posibles:

$$W = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Las restantes coaliciones carecen de dicha fuerza, y son: $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4} y {3, 4}.

Hay una manera de definir un juego cooperativo que describa una situación de este tipo: consiste en asignar una utilidad convencional de 1 a cada coalición de la lista W, y 0 a las demás. Tenemos entonces un conjunto de cuatro jugadores N = {1, 2, 3, 4} y un juego u tal que

$$\begin{aligned} u(1, 2) = u(1, 2, 3) = u(1, 2, 4) = u(1, 3, 4) = u(2, 3, 4) = \\ = u(1, 2, 3, 4) = 1, \end{aligned}$$

mientras que u(S) = 0 para cualquier otra coalición $S \subseteq N$.

Esto es lo que denominamos un juego simple. Antes de seguir adelante, formalicemos esta idea e introduzcamos la nomenclatura apropiada.

Definición 2. Sea N = {1, 2, ..., n} un conjunto de jugadores. Se dice que un juego cooperativo u en N es un *juego simple* si satisface las condiciones siguientes:

1. u(S) = 1 ó 0 para cada coalición $S \subseteq N$.
2. *Monotonía:* si $S \subset T$ entonces $u(S) \leq u(T)$.

Las coaliciones S tales que u(S) = 1 se denominan coaliciones *ganadoras*, y las restantes *perdedoras*. Es tradicional designar por W (del inglés *winning*) la colección de las coaliciones ganadoras. La propiedad de monotonía se expresa formalmente por

$$S \subset T \text{ y } S \in W \Rightarrow T \in W$$

y está claro que el conocimiento de la colección W determina completamente el juego u. Para definir un juego simple en un conjunto N de jugadores basta pues con especificar una colección W de subconjuntos de N que tenga la propiedad de monotonía que acabamos de expresar.

Dentro del conjunto de las coaliciones ganadoras destacan las coaliciones ganadoras *minimales*, que son aquéllas que no contienen ningún elemento innecesario para ser ganadoras. Dicho de otro modo, S es *ganadora minimal* si $S \in W$ pero $S \setminus \{i\} \notin W$ para cada $i \in S$. (Recordemos que el símbolo $S \setminus \{i\}$ designa la coalición que resulta de excluir de S al jugador i.) Usaremos el símbolo W^m para designar la colección de las coaliciones ganadoras minimales. Estas coaliciones tienen una propiedad que las caracteriza entre las ganadoras, la propiedad de *exclusión mutua:* ninguna coalición ganadora minimal contiene *estrictamente* a otra, es decir,

$$S, T \in W^m \Rightarrow S \not\subset T.$$

Como es obvio, $W^m \subseteq W$. Puesto que ampliando de todas las formas posibles las coaliciones ganadoras minimales obtenemos todas las coaliciones ganadoras, queda claro que la colección W^m también determina el juego. Para definir un juego simple en un conjunto de jugadores N basta con especificar una colección W^m de subconjuntos de N que tenga la propiedad de exclusión mutua.

El lector puede ver que en el ejemplo anterior hemos definido el juego dando precisamente una colección W^m que satisface la condición de exclusión mutua. También puede comprobar en dicho ejemplo que la colección W cumple la propiedad de monotonía.

2. JUEGOS DE MAYORÍA PONDERADA

El tipo de juego simple más frecuente en la práctica es el llamado *juego de mayoría ponderada.* En realidad, se trata de una generalización natural del ejemplo siguiente.

Ejemplo 3 (Juegos de mayoría). Supongamos que un comité formado por n personas debe tomar decisiones. Se asigna un voto a cada persona y se exige, para la aprobación de una propuesta, que ésta reciba en votación como mínimo cierta cantidad q de votos. Para evitar conflictos suele tomarse $q > n/2$ (y, por descontado, $q \leq n$). El juego simple u que sirve de modelo para reflejar este mecanismo de toma de decisiones queda definido por la colección

$$W = \{S \subseteq N : |S| \geq q\}$$

donde el símbolo $|S|$ significa el número de elementos de la coalición S. Es inmediato comprobar que W satisface la condición de monotonía. Podríamos recordar el origen del juego u escribiendo

$$u \equiv [q; 1, 1, ..., 1].$$

Si q es el mínimo entero superior a n/2, se dice que este número representa la condición de *mayoría absoluta.* Si $q = n$, se dice que u es el *juego de unanimidad* (en este caso, la única coalición ganadora es el conjunto total N). Los valores intermedios restantes de q se denominan *mayorías cualificadas.* (El término *mayoría simple* o *relativa* es mejor reservarlo para situaciones en las que los electores tienen más de dos alternativas, es decir, no se limitan a elegir entre dos opciones o a decir sí o no a una propuesta única para cambiar un *statu quo.*)

Aunque la idea de dar un voto a cada agente es la base de los sistemas democráticos (basta con recordar el eslogan «un hombre, un voto»), en la práctica se producen con frecuencia asociaciones de carácter político, económico o social, debidas a razones ideológicas o estratégicas, que según la fuerza con que cohesionan a los jugadores pueden convertir una situación aparentemente simétrica en otra muy distinta.

En realidad, la dinámica es similar a la que rige el accionariado de las empresas. Cuando una empresa emite acciones para formar su capital, garantizarlo o incrementarlo, cada acción puede ser adquirida por una persona distinta (física o jurídica). En la práctica, sin embargo, ninguna empresa tiene sus acciones repartidas de este modo. La mayoría de los accionistas tienen en su poder cierto número de acciones y, a menudo, éstas se concentran en muy pocas manos.

Con estos dos comentarios queremos dar a entender que es indispensable disponer de un modelo más general que el del ejemplo anterior para poder interpretar fielmente la forma de operar de la mayoría de los mecanismos de toma de decisiones por votación.

Junto a los del ámbito económico, los ejemplos de tipo político constituyen uno de los campos de aplicación más interesantes de la teoría de los juegos cooperativos. Las decisiones tomadas por los organismos políticos, ya sean a escala local (ayuntamientos), autonómica, estatal o internacional (Unión Europea, Organización de Naciones Unidas, Fondo Monetario Internacional, etc.) nos afectan en mayor o menor medida como ciudadanos, por lo que el estudio de la estructura de tales organismos debería interesarnos también a fondo en el contexto en el que nos movemos.

Muchos de los mecanismos de votación empleados en tales situaciones deben describirse como juegos de mayoría ponderada, especialmente en el caso de organismos de representación en los que, más que los representantes individuales, son los partidos políticos los verdaderos protagonistas, debido a la disciplina de voto que imponen a sus miembros electos. Lo mismo ocurre con el funcionamiento de las juntas de accionistas, ya que el porcentaje de acciones que controla cada una de las personas que integran la junta es decisivo a la hora de fijar las condiciones de aprobación de propuestas.

Veremos ejemplos de carácter político y económico después de la definición formal de juego de mayoría ponderada.

Definición 4. Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$ un conjunto de jugadores. Supongamos que cada jugador $i \in N$ tiene asignado un *peso* $w_i \geq 0$. El peso de una coalición arbitraria $S \subseteq N$ se define como la suma de los pesos de sus integrantes: $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$. Supongamos además que se ha fijado una *cuota* o condición de mayoría $q > 0$. Entonces se define un juego cooperativo u mediante las condiciones

1. $u(S) = 1$ si y sólo si $w(S) \geq q$.
2. $u(S) = 0$ en otro caso.

Es inmediato comprobar que u es un juego simple: cada coalición recibe una utilidad igual a 1 ó 0 y la monotonía es consecuencia de la no negatividad de los pesos. Escribimos

$$u \equiv [q;\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n]$$

y decimos que u es un *juego de mayoría ponderada.*

El lector observará que esta simbolización de un juego de mayoría ponderada es la que ya hemos usado para los juegos de mayoría, que resultan ser un caso particular. La nomenclatura relativa a la cuota q que hemos introducido para los juegos de mayoría se conserva aquí, aunque substituyendo n por la suma de pesos $T = \sum_{i \in N} w_i$.

Ejemplo 5 (El Parlamento de Cataluña, 1999-2003). La distribución de los 135 escaños durante la legislatura 1999-2003 es la siguiente:

Partido	CiU	PSC	PP	ERC	IC-V
Escaños.	56	52	12	12	3
Porcentaje.	41,48 %	38,52 %	8,89 %	8,89 %	2,22 %

Dada la estricta disciplina de voto que rige dentro de cada partido, en esta situación los agentes *reales* son los cinco partidos presentes y no los 135 diputados. Para aprobar una moción es necesario tener al menos el apoyo de la mitad más uno de los diputados de la Cámara, es decir, 68. Por tanto, las coaliciones ganadoras minimales que definen este juego simple, denotado por

$$u \equiv [68;\ 56,\ 52,\ 12,\ 12,\ 3],$$

son las siguientes:

$$W^m = \{\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 3,\ 4\}\}.$$

El lector puede observar que el ejemplo inicial de este artículo (*El consorcio,* ejemplo 1) no ha sido descrito como un juego de mayoría ponderada. ¿Sería posible hacerlo? ¿Existen juegos simples que no son representables como juegos de mayoría ponderada? Esta cuestión tiene mucho interés porque el símbolo $[q;\ w_1, w_2, \ldots, w_n]$ parece una forma muy económica (esto es, concisa) de representar un mecanismo de votación, mucho más que una lista de coaliciones aunque ésta se refiera solamente a las ganadoras minimales. Veamos las respuestas a esas dos preguntas.

Ejemplo 6 (El consorcio). Es posible presentar este juego como un juego de mayoría ponderada. Basta con tomar

$$u \equiv [4;\ 2,\ 2,\ 1,\ 1].$$

El lector debería comprobar que a partir de esta representación obtiene las mismas coaliciones ganadoras minimales que han definido el juego en el ejemplo 1. Allí no hemos usado esta representación porque nos interesaba iniciar la presentación con la idea más general de juego simple y, sólo después, mencionar los juegos de mayoría ponderada como caso especialmente frecuente.

De hecho, también tenemos $u \equiv [8; 4, 4, 2, 2]$, $u \equiv [4k; 2k, 2k, k, k]$ para cualquier k natural e, incluso, representaciones «asimétricas» como $u \equiv [13; 9, 8, 3, 2]$. En general, *todo juego simple representable como juego de mayoría ponderada admite infinitas representaciones.*

Ejemplo 7. Sin embargo, *no todos los juegos simples pueden ser presentados como juegos de mayoría ponderada.* Es fácil ver que es posible si $n \leq 3$. No es posible si $n \geq 4$. El ejemplo más sencillo, tanto por el número de jugadores como por el número de coaliciones ganadoras minimales, es el siguiente. Para $n = 4$ tomemos

$$W^m = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}.$$

Esta colección define un juego simple u porque cumple la condición de exclusión mutua. Para demostrar que no es posible darle una representación como juego de mayoría ponderada, razonaremos por reducción al absurdo.

Supongamos que fuera $u \equiv [q; w_1, w_2, w_3, w_4]$. Puesto que las coaliciones $\{1, 4\}$ y $\{2, 3\}$ son perdedoras, los cuatro pesos deberian satisfacer las condiciones siguientes:

$$w_1 + w_4 < q \leq w_3 + w_4 \text{ y } w_2 + w_3 < q \leq w_1 + w_2.$$

Simplificando, se deducen las relaciones contradictorias

$$w_1 < w_3 \text{ y } w_3 < w_1$$

por lo que concluimos que la representación pretendida es imposible.

El ejemplo siguiente nos muestra otro juego simple, mucho más complicado debido al número de jugadores, que tampoco es un juego de mayoría ponderada.

Ejemplo 8 (El Congreso de los Estados Unidos). Tres cámaras constituyen la estructura del Congreso. La primera de ellas se reduce al presidente de la nación (asesorado, si se quiere, por los miembros de su gabinete), al que designaremos por p. La segunda es el Senado (S), integrado por 100 senadores. La tercera se denomina la Cámara de Representantes (R), de la que forman parte 435 representantes. Simbólicamente,

$$C = \{p\} \cup S \cup R.$$

Originariamente, las medidas legislativas quedaban aprobadas por el Congreso si votaban a favor, como mínimo: el presidente, la mitad más uno de los senadores y la mitad más uno de los representantes. Sin embargo, esta fórmula daba al presidente derecho a vetar cualquier medida, ya que su conformidad era indispensable para aprobarla, por lo que se introdujo una enmienda en la Constitución según la cual 2/3 del Senado y 2/3 de la Cámara de Representantes también constituían conjuntamente una mayoría suficiente para aprobar una propuesta. Éste es el mecanismo que aún hoy en día rige la toma de decisiones en el Congreso. Podemos simbolizar los dos tipos de coaliciones ganadoras minimales del modo siguiente:

$$p + 51s + 218r \text{ y } 67s + 290r.$$

Para comprobar que no es posible presentar este juego simple como un juego de mayoría ponderada, razonaremos por reducción al absurdo como en el ejemplo anterior. La demostración no es difícil, pero conviene redactarla con toda precisión. Supongamos que existiera tal representación. Fijemos dos senadores s y s′ y dos representantes r y r′. Sea w_s el peso asignado al senador s y sea w_r el peso asignado al representante r. Tomemos además un conjunto S″ formado por 50 senadores distintos de s y s′ y un conjunto R″ formado por 217 representantes distintos de r y r′. Es obvio que las dos coaliciones siguientes son perdedoras:

- $P_1 = \{p\} \cup S'' \cup \{s, s'\} \cup R''$
- $P_2 = \{p\} \cup S'' \cup R'' \cup \{r, r'\}$

También es obvio que las dos coaliciones siguientes son ganadoras:

- $G_1 = \{p\} \cup S'' \cup \{s'\} \cup R'' \cup \{r\}$
- $G_2 = \{p\} \cup S'' \cup \{s\} \cup R'' \cup \{r'\}$

Al imponer que el peso de P_1 (resp. P_2) sea estrictamente menor que el de G_1 (resp. G_2), obtenemos simultáneamente, después de simplificar,

$$w_s < w_r \text{ y } w_r < w_s,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, la estructura del Congreso de los Estados Unidos no es representable mediante un juego de mayoría ponderada. (El mismo argumento sirve para ver que la afirmación también es cierta para la estructura del Congreso antes de la enmienda constitucional.)

3. JUGADORES CON VETO Y DICTADORES

Introducimos a continuación dos conceptos que dan nombre a jugadores muy especiales que se presentan en ocasiones en los juegos simples. La terminología tiene su origen en la esfera política.

Definición 9. Sea u un juego simple definido en un conjunto de jugadores N.

1. Un jugador $i \in N$ *posee veto* en el juego u si pertenece a todas las coaliciones ganadoras de u.
2. Un jugador $i \in N$ es un *dictador* en el juego u si $W^m = \{\{i\}\}$.

Un jugador con veto tal vez no puede por sí solo conseguir que se apruebe una propuesta pero puede *impedirlo,* ya que su presencia es indispensable para conseguir la formación de una coalición ganadora. Para comprobar que un jugador tiene veto basta con confirmar que pertenece a todas las coaliciones ganadoras *minimales* del juego.

Un dictador es un jugador con veto que con su sola aquiescencia puede conseguir que se apruebe una propuesta sin necesitar el apoyo de nadie.

Ejemplos 10. Veamos algunos casos en los que aparecen la figura del dictador o la del jugador con veto (no dictatorial).

1. Consideremos una junta de accionistas descrita por el juego de mayoría ponderada

$$u \equiv [51;\ 46,\ 30,\ 14,\ 10]$$

donde tanto los pesos como la cuota (mayoría absoluta) reflejan porcentajes del total de acciones. En estas condiciones, no hay dictador ni jugadores con veto. Sin embargo,

- Si el accionista principal adquiere un 5 por 100 de acciones a uno o varios de los demás accionistas, entonces se convierte en dictador, ya que el juego se transforma en $u' \equiv [51;\ 51,\ ...]$.
- Si el accionista principal adquiere un 4 por 100 de acciones de los demás accionistas pasa a tener veto, puesto que entonces el juego es $u'' \equiv [51;\ 50,\ ...]$.

2. La estructura del Congreso de los Diputados (o Cámara Baja del Parlamento español) durante la legislatura 1982-1986, tras las elecciones generales celebradas el 28 de octubre de 1982, quedaba representada por el juego de mayoría ponderada siguiente, que indica la distribución de los 350 escaños entre diez partidos o coaliciones políticas que obtuvieron representación. El primer coeficiente, 176, es la cuota que define la mayoría absoluta exigida en la toma de decisiones ordinaria (la mitad más uno del total de escaños):

$$u \equiv [176;\ 201,\ 106,\ 12,\ 12,\ 8,\ 5,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1].$$

El partido que obtuvo 201 escaños fue el PSOE (el jugador 1, por tanto, en nuestra representación). Es fácil ver que en este juego tenemos $W^m = \{\{1\}\}$, por lo que el jugador 1 es un dictador en el sentido de la definición anterior. La situación se repitió (con distinta distribución de escaños) durante la legislatura 1986-1989, también con el PSOE como partido principal, y se presenta en la legislatura 2000-2004, ahora con el PP como jugador 1.

3. Si en el Parlamento de Cataluña, 1999-2003 (ejemplo 5) se exige una mayoría cualificada de 2/3 del total de escaños para las decisiones trascendentales, la situación queda definida por el juego

$$u' \equiv [90;\ 56,\ 52,\ 12,\ 12,\ 3].$$

En estas condiciones $(W')^m$ contiene solamente una coalición, la $\{1, 2\}$, por lo que los dos partidos principales pasan a poseer veto.

4. Como ya hemos comentado al exponer la estructura del Congreso de los Estados Unidos (ejemplo 8), la situación anterior a la enmienda de la Constitución daba veto al presidente. Tras la aplicación de la enmienda, el presidente ha perdido tal prerrogativa.

4. UN EJEMPLO DETALLADO: PRIMERA PARTE

Incluimos en esta sección un ejemplo que exponemos con todo detalle para ilustrar el tipo de cuestiones que se plantean al manejar juegos simples.

Ejemplo 11 (Empresa participada). En las empresas cuyo capital está repartido entre diferentes accionistas (personas físicas) es norma que las decisiones sobre la marcha de la empresa se tomen en las denominadas *juntas de accionistas,* a las que son convocados periódicamente todos los poseedores de acciones. En estas juntas, las decisiones no se adoptan otorgando un voto a cada accionista, sino que cada uno dispone de tantos votos como acciones controla. Para aprobar una propuesta es indispensable que esté a favor de la misma un conjunto de accionistas suficiente como para que reúnan, entre todos ellos, *más* del 50 por 100 de las acciones.

En las empresas participadas, donde las acciones pueden estar en manos tanto de personas físicas como de personas jurídicas (otras empresas), se sigue el mismo criterio para la toma de decisiones. Veamos un ejemplo numérico imaginario.

Supongamos que, en el momento de su constitución, la empresa de comunicación Barcelona TV llevó a cabo una emisión de acciones, y que éstas están en manos de una empresa de capital público y de tres grandes empresas del sector, con los porcentajes que se indican a continuación:

- Empresa 1: Ayuntamiento de Barcelona, 36,25 por 100.
- Empresa 2: Televisió de Catalunya (TVC), 34,50 por 100.
- Empresa 3: Cadena SER, 15,50 por 100.
- Empresa 4: Grupo Zeta, 13,75 por 100.

La regla para tomar decisiones es equivalente a la que hemos mencionado en el caso de las juntas de accionistas (que, formalmente, es idéntico a éste): se aprueba una propuesta si está apoyada por un conjunto de empresas que controlen más del 50 por 100 de las acciones. Por tanto, el mecanismo queda descrito por el juego de mayoría ponderada

$$u \equiv [50{,}01;\ 36{,}25,\ 34{,}50,\ 15{,}50,\ 13{,}75].$$

Las coaliciones ganadoras minimales son

$$W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

Conviene observar que, para ser ganadora, se le exige a cualquier coalición *superar* el 50 por 100 de las acciones: esto se impone para evitar la posibilidad de un empate y la correspondiente situación de *impasse,* y por ello hemos fijado una cuota del 50,01 por 100. Así, las coaliciones $\{1, 4\}$ y $\{2, 3\}$ no son ganadoras porque controlan solamente el 50 por 100 exacto de las acciones.

El juego simple u que describe esta situación queda, pues, definido por

$$u(1, 2) = u(1, 3) = u(1, 2, 3) = u(1, 2, 4) = u(1, 3, 4) = u(2, 3, 4) = \\ = u(1, 2, 3, 4) = 1$$

y $u(S) = 0$ para las demás coaliciones (las perdedoras).

Es conveniente notar la analogía entre el tipo de conflictos de intereses con implicaciones económicas reflejado en ejemplos como *El consorcio* o *Empresa participada* y el de carácter político subyacente en situaciones como *El Parlamento de Cataluña, 1999-2003.* En ambos casos, se produce una pugna por el poder (poder de acción, poder de decisión).

En los juegos cooperativos que plantean problemas de beneficios o costes la cuestión principal se centra en la forma de repartir entre los jugadores la utilidad de la coalición total. En el caso de los juegos simples, el interés radica en la obtención de algún tipo de *medida de poder* que permita valorar la importancia estratégica de cada uno de los agentes implicados en el juego.

En el caso de los juegos de mayoría ponderada, el peso de cada jugador no sirve como medida de su importancia (ni siquiera el peso relativo), porque las distribuciones de peso son engañosas en este sentido: basta observar que, a menudo, las diferencias de peso entre jugadores no se reflejan en absoluto en diferencias de posición relativa al obtener la lista de las coaliciones ganadoras minimales.

Naturalmente, junto al interés por establecer una medida numérica de la distribución del poder, aparece después el interés por conocer cómo pueden afectar a dicha distribución variaciones en el reparto de pesos o modificaciones de la cuota. Veamos en este mismo ejemplo algunos casos posibles.

• Supongamos que el Ayuntamiento de Barcelona compra el 5 por 100 de acciones a cada una de las demás empresas. Esto le convierte en dictador, ya que el juego es ahora

$$u_1 \equiv [50{,}01;\ 51{,}25,\ 29{,}50,\ 10{,}50,\ 8{,}75].$$

Como dictador, el Ayuntamiento puede imponer su voluntad a las empresas restantes, y ésta es una situación radicalmente distinta a la inicial. La pregunta es obvia: ¿Cuál es el poder de un dictador? ¿Y el de los restantes jugadores?

• Supongamos que solamente el Grupo Zeta vende un 5 por 100 de sus acciones al Ayuntamiento. El juego pasa a ser

$$u_2 \equiv [50{,}01;\ 41{,}25,\ 34{,}50,\ 15{,}50,\ 8{,}75].$$

¿Habrá experimentado alguna variación la distribución de poder?

• Si, en cambio, el 5 por 100 de acciones que vende el Grupo Zeta va a las manos de Televisió de Catalunya (TVC), el juego es

$$u_3 \equiv [50{,}01;\ 36{,}25,\ 39{,}50,\ 15{,}50,\ 8{,}75].$$

¿Consigue de este modo TVC tener efectivamente más poder que el Ayuntamiento de Barcelona en el control de Barcelona TV?

• Ciertas decisiones trascendentales se toman por mayoría cualificada. Supongamos que, volviendo a la distribución inicial de acciones, dicha mayoría es de 3/5, es decir, un 60 por 100 del total de acciones. El juego que refleja esta situación es

$$v \equiv [60;\ 36{,}25,\ 34{,}50,\ 15{,}50,\ 13{,}75].$$

Observamos que en estas condiciones el Ayuntamiento de Barcelona y la Cadena SER necesitan el apoyo del Grupo Zeta, circunstancia que no se producía con la cuota ordinaria que impone la mayoría absoluta. ¿Cómo influye esta variación de la cuota en la distribución de poder?

• Si la mayoría cualificada aumenta hasta los 2/3, las dos primeras empresas pasan a disponer de veto y las otras dos desaparecen de la lista de coaliciones ganadoras minimales. ¿Qué cambios experimenta la distribución de poder con respecto a la precedente?

En conclusión, parece claro que, con relación a este ejemplo (y, de hecho, con vistas a una aplicación generalizada a muchas otras situaciones), la primera pregunta a formular sería: ¿cómo describir de forma razonable una «distribución de poder» entre las cuatro empresas, a la vista del porcentaje de acciones que controla cada una y de la condición de mayoría exigida?

Desearíamos utilizar una hipotética medida de poder para contrastar los valores que nos proporcione con los porcentajes de acciones. ¿Es importante la ventaja del 1,75 por 100 de acciones que posee el Ayuntamiento de Barcelona frente a TVC? ¿Y la diferencia del 19 por 100 entre esta segunda empresa y la SER? ¿Tiene algún poder de decisión el Grupo Zeta pese a ser el socio minoritario?

A continuación, quisiéramos aplicar la misma medida para responder a las cuestiones planteadas en los casos en que se producen variaciones en la distribución de acciones (por compraventa entre las empresas participantes) y/o en la mayoría exigida para tomar decisiones.

Antes de afrontar cuestiones de este tipo y otras similares, en éste y en los restantes ejemplos propuestos hasta aquí, conviene plantear las características que debería tener una medida de poder que pudiera ser aplicable a cualquier juego simple. Nos ocuparemos de todo ello en la sección siguiente al estudiar el denominado *índice de poder de Shapley-Shubik,* que no es sino la restricción del valor de Shapley al dominio de los juegos simples. Supondremos al lector ya familiarizado con el concepto de valor de Shapley para juegos cooperativos.

5. EL ÍNDICE DE PODER DE SHAPLEY-SHUBIK

En la sección anterior hemos planteado, como objetivo principal del estudio de los juegos simples, el análisis de la «distribución de poder». Los juegos simples (y, en particular, los juegos de mayoría ponderada) representan mecanismos de decisión colectiva por votación. Aunque la descripción de las coaliciones ganadoras minimales ya proporciona alguna información sobre la importancia relativa de cada agente decisor dentro del sistema, desearíamos precisar de forma numérica la fuerza real de cada uno de dichos agentes.

No entraremos en disquisiciones filosóficas ni trataremos de dar una definición del concepto mismo de *poder*. Creemos que la intuición del lector le habrá permitido captar perfectamente nuestras intenciones a través de los ejemplos que hemos venido proponiendo. Hablaremos, pues, solamente de una «medida de poder».

Para fijar ideas, pensemos que en un mecanismo decisorio el «poder» viene a ser como una unidad de beneficio (un pastel, si se quiere) que hay que repartir entre los agentes de forma que refleje la importancia estratégica de cada uno. En este sentido, el problema no es muy diferente del que nos ocuparía en los juegos cooperativos en general.

Por tanto, una medida de la distribución de poder vendrá dada, en términos muy generales, por una asignación $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tal que

1. $\alpha_i \geq 0$ para cada $i \in N$
2. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

siendo $N = \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto de agentes decisores.

Ésta es una idea general de *medida* de la que también son casos particulares, entre otras, las distribuciones de frecuencia relativa o las de probabilidad. El hecho de que la medida esté *normalizada,* como expresa la condición 2, permitirá establecer comparaciones entre situaciones distintas.

Traduciremos estas ideas al lenguaje de los juegos simples.

Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$ un conjunto de jugadores. Denotaremos por S_N el conjunto de todos los juegos simples no nulos en N (excluimos el juego nulo $u = 0$ por razones obvias).

Definición 12. Una *medida de poder* en N será una función

$$\Phi : S_N \rightarrow [0, 1]^n$$

que asignará a cada juego simple no nulo u un vector de reparto entre los jugadores

$$\Phi[u] = (\Phi_1[u], \Phi_2[u], ..., \Phi_n[u])$$

tal que $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i[u] = 1$.

(El símbolo $[0, 1]^n$ representa el producto cartesiano $[0, 1] \times [0, 1] \times ... \times [0, 1]$. Tomando este producto cartesiano como conjunto de llegada de la función ya garantizamos que $0 \leq \Phi_i[u] \leq 1$ para cada jugador $i \in N$.)

Como ocurre con cualquier otra medida, cuando los valores sean racionales siempre será posible expresar el reparto mediante fracciones y mediante porcentajes indistintamente. Por ejemplo, al aplicar una medida de poder a un juego de mayoría ponderada, será interesante compararla con la distribución de pesos, y ésta viene dada a menudo mediante porcentajes.

Observación 13. La definición anterior es muy poco restrictiva y, por tanto, existen muchas medidas de poder posibles. Sin embargo, la primera precisión que debemos hacer es que *la regla proporcional no sirve como medida de poder.* En efecto, puesto que en los juegos simples tenemos casi invariablemente $u(i) = 0$ para cada jugador $i \in N$, la suma de estas utilidades es nula y no es posible, prácticamente nunca, llevar a cabo un reparto proporcional.

En 1954, el matemático Lloyd S. Shapley y el economista Martin Shubik propusieron la aplicación del valor de Shapley a los juegos simples como medida de poder. A continuación estudiaremos el significado y el alcance de esta propuesta.

Proposición 14. La restricción del valor de Shapley al conjunto de los juegos simples no nulos es una medida de poder.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, el valor está definido para cualquier juego cooperativo, y en particular para todos los juegos simples no nulos. Además, gracias a la propiedad de monotonía de los juegos simples tenemos $\Phi_i[u] \geq 0$ para cada jugador $i \in N$ y cada juego (simple) u. Por último, la propiedad de eficiencia del valor y el hecho de que tratemos con juegos simples no nulos implican que se verifique la condición $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i[u] = 1$.

A esta medida de poder se la conoce con el nombre de *índice de poder de Shapley-Shubik.* Además de la eficiencia, otras dos de las cuatro propiedades que caracterizan al valor de Shapley tienen una interpretación inmediata y satisfacen la intuición:

- Si un jugador i es nulo en un juego u, $\Phi_i[u] = 0$.
- Si dos jugadores i, j son equivalentes en un juego u, $\Phi_i[u] = \Phi_j[u]$.

Las tres propiedades (eficiencia, jugador nulo y jugadores equivalentes) son útiles para simplificar el cálculo práctico de la distribución del poder en un juego dado. Damos tres reglas básicas, y señalamos que la primera se apoya en el axioma de jugador nulo pero también en la propiedad de invariancia del valor respecto a la extensión nula de juegos.

1. Los jugadores nulos tienen poder 0 y pueden ser suprimidos del juego para calcular el poder de los demás jugadores. (Además, como regla práctica, es fácil ver que un jugador es nulo en un juego simple si y sólo si no interviene en ninguna coalición ganadora minimal.)
2. Todos los jugadores equivalentes entre sí tienen el mismo poder; por tanto, basta con calcular el de cualquiera de ellos. (Aquí la regla práctica es que dos jugadores son equivalentes en un juego simple si y sólo si aparecen de manera simétrica en la lista de las coaliciones ganadoras minimales.)
3. La suma de los poderes de todos los jugadores debe dar 1: esta propiedad puede servir para ahorrarnos el último cálculo directo o bien como comprobación final.

Observación 15. La cuarta propiedad del valor, la aditiva, no tiene aplicación en el dominio de los juegos simples no nulos, ya que la suma de dos juegos de este tipo *no* es nunca un juego simple.

En 1975, P. Dubey estableció una caracterización axiomática del índice de poder de Shapley-Shubik (es decir, como función sobre el conjunto de los juegos simples no nulos) análoga a la del valor de Shapley. Para ello utilizó los axiomas de eficiencia, jugador nulo y jugadores equivalentes y una propiedad, la de *transferencia,* que es consecuencia de la aditiva y la sustituye como axioma en este contexto. Omitimos los detalles pero queremos dejar constancia de este hecho.

6. CÁLCULO PRÁCTICO: EJEMPLOS

Iniciamos el cálculo práctico del índice de poder de Shapley-Shubik. En el primer ejemplo aplicamos directamente la fórmula del valor de Shapley adaptándola al contexto de los juegos simples. En el segundo, los axiomas nos dan la distribución de poder sin necesidad de efectuar apenas ninguna operación.

Ejemplo 16 (El consorcio). En este juego tenemos (véase ejemplo 1)

$$W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

No hay dictador, ni jugadores con veto ni jugadores nulos, pero por una parte las empresas 1 y 2 son equivalentes entre sí y por otra lo son también las empresas 3 y 4. Por tanto, podemos limitarnos a calcular de forma directa el poder de la empresa 1. La fórmula del valor de Shapley nos da

$$\Phi_1[u] = \sum_{S \subset N: 1 \in S} \gamma_n(s)[u(S) - u(S \setminus \{1\})],$$

donde $s = |S|$ es el cardinal de la coalición variable S y $\gamma_n(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$.

Teniendo en cuenta que la contribución marginal escrita entre corchetes vale 1 solamente si $S \in W$ pero $S \setminus \{1\} \notin W$, y 0 en los demás casos, nos queda

$$\Phi_1[u] = \sum_{S \in W: 1 \in S, S \setminus \{1\} \notin W} \gamma_n(s).$$

Dado que $W = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$, las coaliciones S que satisfacen las condiciones indicadas son solamente $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ y $\{1, 3, 4\}$.

Sabiendo además que $\gamma_4(2) = \gamma_4(3) = 1/12$ obtenemos

$$\Phi_1[u] = 1/12 + 1/12 + 1/12 + 1/12 = 1/3.$$

Por tanto, aplicando el axioma de jugadores equivalentes, $\Phi_2[u] = \Phi_1[u] = 1/3$. Por el axioma de eficiencia, el poder a repartir entre las empresas 3 y 4 es $1 - 2/3 = 1/3$ y, de nuevo por el axioma de jugadores equivalentes, $\Phi_3[u] = \Phi_4[u] = 1/6$. En resumen, la distribución de poder en este consorcio viene dada por

$$\Phi[u] = (1/3, 1/3, 1/6, 1/6),$$

de manera que las empresas principales poseen doble poder que las secundarias. (Si el lector recuerda que la representación que obtuvimos del consorcio como juego de mayoría ponderada en el ejemplo 6 era $u \equiv [4; 2, 2, 1, 1]$, debemos advertirle que la coincidencia de proporciones de pesos y de poder (2:1) de las empresas principales con respecto a las secundarias no es habitual en los juegos de mayoría ponderada, como veremos en otros ejemplos.)

Ejemplo 17 (Juegos de mayoría). En un juego de este tipo que, como hemos visto, es de la forma $u \equiv [q; 1, 1, ..., 1]$ (véase ejemplo 3), el cálculo de la distribución de poder es muy simple. No hay dictador, ni vetos ni jugadores nulos, y es obvio que todos los jugadores son equivalentes. Por el tercer axioma del valor, esto implica que $\Phi_i[u]$ es constante, es decir, no depende de i. Vemos, pues, que *en un juego de mayoría todos los jugadores tienen el mismo poder, independientemente de la cuota de mayoría exigida*. Y del axioma de eficiencia se deduce que este poder es

$$\Phi_i[u] = 1/n \text{ para todo } i \in N.$$

Antes de proseguir con los demás ejemplos, presentamos un método de cálculo del índice de Shapley-Shubik que, en ocasiones, puede sustituir con ventaja al uso de la fórmula del valor.

Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$, como siempre, el conjunto de los jugadores. Una *permutación* de los jugadores es una ordenación particular de los mismos, que escribiremos como $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$. Por ejemplo, si $n = 6$, (2, 4, 1, 6, 5, 3) es una permutación particular. Aquí $\sigma_2 = 4$, lo que significa que el jugador que ocupa la segunda posición en la ordenación es el jugador 4. La combinatoria nos enseña que en un conjunto de n elementos hay n! permutaciones posibles.

Para fijar ideas, tomemos el ejemplo del *Parlamento de Cataluña, 1999-2003* (ejemplo 5), donde había cinco partidos en liza. Imaginemos que el partido 2 desea presentar una propuesta a votación y considera que la predisposición de los partidos hacia dicha propuesta viene dada, en orden decreciente, por la permutación (2, 4, 1, 3, 5). Puesto que el partido 2 no dispone de fuerza suficiente para lograr la aprobación de la propuesta, parece lógico que encamine sus esfuerzos a convencer, en primer lugar, al partido 4 para conseguir su apoyo, aceptando si es necesario alguna enmienda de este partido a la propuesta.

Supongamos que lo logra. A continuación, ambos socios se dedicarán a buscar el apoyo del partido 1 por dos razones básicas: una, porque la coalición {2, 4} todavía no tiene los votos suficientes para garantizar la aprobación de su propuesta; dos, porque el partido 1 es el más proclive a aceptarla de entre los restantes.

La posición del partido 1 es *crucial*. Su aceptación garantiza que la propuesta supere la votación; su negativa la condena al fracaso casi con toda seguridad porque todavía sería más difícil que los partidos 2 y 4 convencieran al partido 3 o al 5. La razón de la posición crucial del partido 1 se resume en dos puntos: *a)* {2, 4} no es una coalición ganadora; *b)* {2, 4, 1} sí lo es.

Generalizamos esta idea. Prescindimos de ordenaciones (de preferencias) particulares sobre propuestas particulares porque queremos una medida formal de la importancia estratégica de cada jugador.

Sea u un juego simple no nulo en el conjunto N. Sea $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ una permutación cualquiera de N. Si imaginamos que se va formando una coalición a partir de σ_1, añadiendo jugadores uno a uno en el orden indicado por la permutación, siempre llegaremos a encontrar un primer jugador σ_k que, al integrarse, convierta en ganadora la coalición que forman con él quienes le preceden en la permutación. De forma equivalente, *existe un único* jugador σ_k con las dos propiedades siguientes: (a) $\{\sigma_1, ..., \sigma_{k-1}\} \notin W$; (b) $\{\sigma_1, ..., \sigma_{k-1}, \sigma_k\} \in W$.

Decimos entonces que σ_k es el *jugador crucial* o *pivote* de la permutación σ.

Contemos ahora el número de veces que cada jugador $i \in N$ es pivote en el total de las $n!$ permutaciones posibles. Convirtamos este número en frecuencia relativa dividiéndolo por $n!$ y sea $\psi_i[u]$ dicha frecuencia.

Teorema 18 (Cálculo del poder por pivotes). Para cada juego simple no nulo u en N y cada jugador $i \in N$ se verifica la igualdad

$$\Phi_i[u] = \psi_i[u].$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos la expresión del poder del jugador i que ya hemos utilizado en el ejemplo 16:

$$\Phi_i[u] = \sum_{S \in W : i \in S, S \setminus \{i\} \notin W} \gamma_n(s).$$

Observemos que cada coalición S tal que $i \in S$, $S \in W$ y $S \setminus \{i\} \notin W$ define muchas permutaciones en las que i es pivote. Concretamente, las $(s-1)!(n-s)!$ permutaciones que podemos escribir colocando en las $s-1$ primeras posiciones los $s-1$ elementos de $S \setminus \{i\}$ en cualquier orden (de ahí el factor $(s-1)!$), el jugador i en la posición s y los $n-s$ elementos de $N \setminus S$ en las $n-s$ posiciones finales (y de ahí el factor $(n-s)!$). Por tanto,

$$\Phi_i[u] \leq \psi_i[u].$$

Sin embargo, dado que $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i[u] = 1 = \sum_{i=1}^{n} \psi_i[u]$, se concluye que la desigualdad anterior debe reducirse a una igualdad para todo $i \in N$.

El teorema puede interpretarse diciendo que, en un juego simple no nulo, *el poder de un jugador es la probabilidad de ser crucial en una permutación cuando todas las permutaciones se suponen igualmente probables.*

Podemos, pues, usar este resultado para calcular el índice de poder de Shapley-Shubik. Cuando $n \leq 4$, lo más directo es escribir las $n!$ permutaciones y contar sobre ellas el número de veces que es pivote cada jugador, aunque sin olvidar las reglas que hemos dado sobre jugadores nulos, jugadores equivalentes y eficiencia para simplificar el cálculo del poder. Cuando el número de jugadores es mayor, a menudo basta considerar «tipos» de permutaciones, y en algún caso es más fácil comenzar contando las veces que el jugador *no* es pivote.

A continuación revisaremos los ejemplos restantes que propusimos en las secciones anteriores. Estamos convencidos de que, al igual que los que hemos hallado en los dos primeros ejemplos, los resultados que obtendremos complacerán al lector que, más o menos intuitivamente, ya había conjeturado en su momento algunas evidencias.

Ejemplo 19 (El Parlamento de Cataluña, 1999-2003). Recordemos que en este juego (ejemplo 5) el número de jugadores es n = 5 y la colección de coaliciones ganadoras minimales es

$$W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

De esta lista se deduce, en primer lugar, que el jugador 5 es nulo, por lo que su poder es $\Phi_5[u] = 0$ y podemos olvidarnos de él. Esto es interesante porque reduce de 5! = 120 a 4! = 24 el número de permutaciones que hay que escribir. Por otra parte, los jugadores 2, 3 y 4 son equivalentes. Por tanto, solamente será necesario calcular de forma directa el poder del jugador 1. Escribimos las 24 permutaciones de los jugadores 1, 2, 3 y 4 y marcamos con un asterisco aquéllas en las que el jugador 1 interviene como pivote:

(1,2,3,4)	* (2,1,3,4)	* (3,1,2,4)	* (4,1,2,3)
(1,2,4,3)	* (2,1,4,3)	* (3,1,4,2)	* (4,1,3,2)
(1,3,2,4)	* (2,3,1,4)	* (3,2,1,4)	* (4,2,1,3)
(1,3,4,2)	(2,3,4,1)	(3,2,4,1)	(4,2,3,1)
(1,4,2,3)	* (2,4,1,3)	* (3,4,1,2)	* (4,3,1,2)
(1,4,3,2)	(2,4,3,1)	(3,4,2,1)	(4,3,2,1)

Esto nos indica que $\Phi_1[u] = 12/24 = 1/2$. Por tanto, los jugadores 2, 3 y 4 deben repartirse equitativamente el poder restante, 1/2, y resulta $\Phi_i[u] = 1/6$ para i = 2, 3, 4. (También podríamos haber determinado este valor, una vez que teníamos escritas todas las permutaciones, localizando aquéllas en las que es pivote un jugador concreto de estos tres.) En definitiva, la distribución de poder en el *Parlamento de Cataluña, 1999-2003* viene dada según el índice de Shapley-Shubik por los porcentajes de la tercera fila de la tabla siguiente. La segunda fila indica el porcentaje de escaños que ocupa cada partido.

Partido	CiU %	PSC %	PP %	ERC %	IC-V %
Escaños	41,48	38,52	8,89	8,89	2,22
Poder	50,00	16,66	16,66	16,66	0,00

La tabla permite establecer comparaciones. Concluimos que la distribución de poder no tiene demasiado que ver con la distribución de escaños. CiU y sobre todo PP y ERC se encuentran en una posición estratégica mejor que la que parece sugerir para cada uno su porcentaje de escaños. En cambio, el PSC se encuentra mucho peor. Por último, IC-V no tiene ninguna relevancia estratégica pese a sus escaños.

Este ejemplo ilustra bien las relaciones que existen en general entre peso y poder en los juegos de mayoría ponderada:

- A pesos iguales, igual poder.
- A mayor peso, mayor o igual poder.
- Peso positivo no implica poder positivo.
- Las diferencias en (porcentajes de) peso no se traducen en diferencias similares en poder; en ocasiones, ni siquiera producen diferencias de poder.

Ejemplo 20 (Dictadores y vetos). El cálculo del poder mediante pivotes nos permitirá obtener resultados generales acerca de los dos tipos destacados de jugador que intervienen a veces en un juego simple: el dictador y, más en general, los jugadores con veto.

Dictadura. El poder de un dictador es siempre el 100 por 100. En efecto, basta con observar que en cualquier permutación el pivote es siempre el dictador.

Veto (no dictatorial). En este caso, conviene destacar cuatro propiedades.

1. *Todos los jugadores con veto tienen el mismo poder.* Es inmediato, por tratarse de jugadores equivalentes.

2. *Un jugador con veto tiene más poder que cualquier otro.* En efecto, sea i un jugador con veto y j un jugador sin veto. En cada permutación en la que j sea pivote, i precede a j. Intercambiando sus posiciones obtenemos otra permutación en la que i es pivote. Por tanto, $\Phi_j[u] \leq \Phi_i[u]$. Para ver que la desigualdad es estricta, sea $S \in W^m$ una coalición que no contiene a j. Podemos escribir como mínimo $(s-1)!(n-s)!$ permutaciones en las que i es pivote y j no, iniciándolas con los elementos de $S \setminus \{i\}$ y colocando a i en la posición s. Estas permutaciones no provienen de las del tipo anterior (es decir, intercambiando i y j, éste no pasaría a ser pivote), lo que demuestra que $\Phi_j[u] < \Phi_i[u]$.

3. *El máximo poder no dictatorial de un jugador con veto en un juego simple con n jugadores es* $1 - 1/n$. En efecto, si queremos que un jugador, digamos el 1 para fijar ideas, tenga el máximo poder no dictatorial, deberá ser pivote en todas las permutaciones exceptuando aquéllas en las que sea el primer elemento. Esto se consigue en el juego definido por

$$W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{1, n\}\}$$

y es inmediato entonces que

$$\Phi_i[u] = \frac{n! - (n-1)!}{n!} = 1 - \frac{1}{n}.$$

4. *El mínimo poder de un jugador con veto en un juego simple con n jugadores es* 1/n. Teniendo en cuenta la propiedad 2, es obvio que un jugador con veto tendrá el mínimo poder si *todos* los jugadores tienen veto. Esto se consigue con el juego de unanimidad u_N, definido por $W^m = \{N\}$ o por $u_N \equiv [n; 1, 1, ..., 1]$. Al ser un juego de mayoría tenemos, según el ejemplo 17, $\Phi_i[u] = 1/n$ para todo $i \in N$.

Ejemplo 21 (Congreso de los Estados Unidos). Aunque los cálculos relativos a la aplicación del índice de Shapley-Shubik a este ejemplo son laboriosos y no los detallaremos, creemos oportuno dar su resultado desde el momento en que hemos mencionado este organismo (ejemplo 8). El poder del presidente es

$$\Phi_P[u] = 16{,}0470\ \%.$$

Evidentemente, todos los senadores tienen el mismo poder porque son jugadores equivalentes. Lo mismo ocurre con los representantes. La suma del poder de todos los senadores (lo que podríamos denominar el *poder del Senado*) es

$$\Phi_S[u] = \sum_{s=1}^{100} \Phi_s[u] = 43{,}7418\ \%$$

mientras que lo que llamaríamos *poder de la Cámara de Representantes* es

$$\Phi_R[u] = \sum_{r=1}^{435} \Phi_r[u] = 40{,}2112\ \%.$$

Esto da una idea del reparto del poder entre las tres Cámaras del Congreso: el Senado tiene un poder algo superior al de la Cámara de Representantes y el presidente un poder bastante inferior. De todos modos, comparando los poderes individuales del presidente, un senador y un representante, se obtiene

$$\Phi_P[u] : \Phi_s[u] : \Phi_r[u] = 350 : 9 : 2$$

de modo que el presidente tiene un poder casi 39 veces superior al de un senador y cada senador tiene un poder 4,5 veces superior al de un representante. A pesar de la pérdida del derecho de veto tras la enmienda de la Constitución, el poder del presidente es notable.

Ejemplo 22 (Empresa participada). Como hemos visto al presentarla (ejemplo 11), esta situación queda descrita por el juego de mayoría ponderada

$$u \equiv [50{,}01;\ 36{,}25,\ 34{,}50,\ 15{,}50,\ 13{,}75]$$

donde la colección de las coaliciones ganadoras minimales es

$$W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

En este juego no hay dictador ni jugadores con veto, pero las empresas 2 y 3 son equivalentes. Escribimos las 24 permutaciones posibles y señalamos: *a)* con un asterisco las que tienen como pivote a la empresa 1; *b)* con dos asteriscos las que tienen como pivote a la empresa 2.

** (1,2,3,4)	* (2,1,3,4)	* (3,1,2,4)	** (4,1,2,3)
** (1,2,4,3)	* (2,1,4,3)	* (3,1,4,2)	(4,1,3,2)
(1,3,2,4)	* (2,3,1,4)	* (3,2,1,4)	* (4,2,1,3)
(1,3,4,2)	(2,3,4,1)	(3,2,4,1)	(4,2,3,1)
** (1,4,2,3)	* (2,4,1,3)	* (3,4,1,2)	* (4,3,1,2)
(1,4,3,2)	(2,4,3,1)	** (3,4,2,1)	** (4,3,2,1)

Por tanto, $\Phi_1[u] = 10/24 = 41{,}66$ por 100 por un lado, $\Phi_2[u] = 6/24 =$ $= 25{,}00$ por 100 por otro y, en consecuencia, $\Phi_3[u] = 25{,}00$ por 100 por el axioma de jugadores equivalentes y $\Phi_4[u] = 1 - 22/24 = 2/24 = 8{,}33$ por 100 por el axioma de eficiencia.

Mediante cálculos semejantes, podemos obtener la distribución de poder en cada uno de los supuestos formulados en el ejemplo 11 y contestar a todas las preguntas que nos hacíamos allí.

La primera tabla nos indica, en su primera fila numérica, el porcentaje inicial de peso de cada empresa. Después muestra la distribución inicial de poder en la fila (0) y las distribuciones de poder cuando se producen las variaciones de pesos indicadas en el ejemplo 11, es decir:

1. Si el Ayuntamiento de Barcelona (empresa 1) compra un 5 por 100 de acciones a cada una de las empresas restantes. El juego es ahora $u_1 \equiv$ $\equiv [50{,}01;\ 51{,}25,\ 29{,}50,\ 10{,}50,\ 8{,}75]$ y

$$W_1^m = \{\{1\}\}.$$

2. Si solamente el Grupo Zeta (empresa 4) vende un 5 por 100 al Ayuntamiento. En este caso el nuevo juego queda definido por u_2 = [50,01; 41,25, 34,50, 15,50, 8,75] y, por tanto,

$$W_2^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

3. Si el Grupo Zeta vende un 5 por 100 a Televisió de Catalunya (empresa 2). Esto nos da el juego $u_3 \equiv$ [50,01; 36,25, 39,50, 15,50, 8,75], donde

$$W_3^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

	Ayuntamiento de Barcelona %	Televisió de Catalunya %	Cadena SER %	Grupo Zeta %
Peso	36,25	34,50	15,50	13,75
(0)	41,66	25,00	25,00	8,33
(1)	100,00	0,00	0,00	0,00
(2)	41,66	25,00	25,00	8,33
(3)	33,33	33,33	33,33	0,00

Al comparar las dos primeras filas observamos que, como en el ejemplo del *Parlamento de Cataluña, 1999-2003,* hay claras diferencias entre peso y poder. El 1,75 por 100 de diferencia entre el Ayuntamiento de Barcelona y Televisió de Catalunya (TVC) es muy importante, al igual que el 1,75 por 100 que separa a la Cadena SER del Grupo Zeta. En cambio, el 19 por 100 de ventaja de TVC sobre la Cadena SER no tiene ningún efecto sobre la distribución de poder. Dicho de otra forma, el Ayuntamiento de Barcelona y sobre todo la Cadena SER obtienen el mejor rendimiento de sus acciones en términos de poder. Las otras dos empresas están en peores condiciones. Sin embargo, el Grupo Zeta dispone de cierto poder pese a ser el socio menos importante en la participación de Barcelona TV.

Contrastemos la distribución inicial de poder dada por la fila (0) con las siguientes. En primer lugar, la compra por parte del Ayuntamiento de Barcelona de un 5 por 100 de acciones a cada una de las demás empresas coloca al ente público en posición de dictador, lo que queda perfectamente reflejado en la distribución de poder de la fila (1).

La venta de un 5 por 100 de acciones del Grupo Zeta al Ayuntamiento no produce ninguna variación en la lista de las coaliciones ganadoras minimales ni, por tanto, en la distribución de poder, dada ahora por la fila (2), que depende exclusivamente de esa lista. En cambio, el paso de ese 5 por 100 de acciones del Grupo Zeta a TVC trastorna totalmente la situación: convierte al Grupo Zeta en un jugador nulo, y por tanto con poder 0, y en jugadores equivalentes a las otras tres empresas pese a las diferencias notables en los porcentajes de acciones que controlan. La fila (3) refleja adecuadamente esta equivalencia y vemos que TVC no consigue superar en poder al Ayuntamiento de Barcelona pero sí igualarlo, al tiempo que esta operación aumenta la importancia estratégica de la Cadena SER sin que esta empresa haya intervenido en ella.

La segunda tabla nos indica de nuevo, en su primera fila numérica, el porcentaje inicial de peso de cada empresa. Después muestra la distribución inicial de poder en la fila (1/2) y las distribuciones de poder cuando se producen las variaciones de cuota indicadas en el ejemplo 11, es decir:

(3/5) Se exige una mayoría de 3/5, es decir, del 60 por 100 de acciones, para la aprobación de una propuesta. El juego es ahora $u_{3/5} \equiv [60;\ 36{,}25,\ 34{,}50,\ 15{,}50,\ 13{,}75]$ y, por tanto,

$$W^m_{3/5} = \{\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3,\ 4\},\ \{2,\ 3,\ 4\}\}.$$

(2/3) Se exige una mayoría de 2/3, es decir, del 66,66 por 100 de acciones, para la aprobación de una propuesta. El juego es ahora $u_{2/3} = [66{,}66;\ 36{,}25,\ 34{,}50,\ 15{,}50,\ 13{,}75]$ y, por tanto,

$$W^m_{2/5} = \{\{1,\ 2\}\}.$$

	Ayuntamiento de Barcelona %	Televisió de Catalunya %	Cadena SER %	Grupo Zeta %
Peso	36,25	34,50	15,50	13,75
(1/2)	41,66	25,00	25,00	8,33
(3/5)	33,33	33,33	16,66	16,66
(2/3)	50,00	50,00	0,00	0,00

Como vemos en la tabla, el aumento de la mayoría exigida minimiza aún más las diferencias entre los porcentajes de acciones. Con mayoría de 3/5, el Ayuntamiento de Barcelona y TVC quedan con el mismo poder, y lo mismo les ocurre a la Cadena SER y el Grupo Zeta, que pasan a ser también jugadores equivalentes. Al pasar a mayoría de 2/3, las dos empresas principales en la participación adquieren veto, mientras las otras dos pasan a ser jugadores nulos y aquéllas se reparten equitativamente todo el poder.

Creemos que este ejemplo detallado demuestra que el índice de Shapley-Shubik es una buena medida numérica del poder (léase importancia estratégica) de los agentes que intervienen en un mecanismo de toma de decisiones. También demuestra que el índice posee una acusada *sensibilidad* a los cambios que se producen en el juego: en este caso, cambios en la distribución del accionariado o en la condición de mayoría exigida. (Esta observación es extensible al valor de Shapley como concepto de solución para *todos* los juegos cooperativos en general.)

8. JUEGOS IMPROPIOS

Ejemplo 23 (Un juego impropio). El juego simple más sencillo entre los que no pueden representarse como juegos de mayoría ponderada es el que hemos propuesto en el ejemplo 7. Es un juego u con n = 4 jugadores cuya lista de coaliciones ganadoras minimales es

$$W^m = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}.$$

En este caso, hay dos pares de jugadores equivalentes entre sí: 1 y 2 por una parte, y 3 y 4 por otra. Calculando mediante pivotes la distribución de poder, el lector obtendrá fácilmente

$$\Phi_1[u] = \Phi_2[u] = \Phi_3[u] = \Phi_4[u] = 1/4.$$

Esto ilustra que ser jugadores equivalentes es suficiente pero no necesario para tener igual poder. (De hecho, en casos como éste existe una simetría «de orden superior» a la mera equivalencia que es la que provoca que el poder sea constante.)

Este juego tiene una característica singular entre todos los que hemos estudiado: existen coaliciones ganadoras disjuntas, es decir, sin elementos comunes, que en este caso son $\{1, 2\}$ y $\{3, 4\}$. Se dice que estos juegos simples son *impropios* porque pueden presentar dificultades de interpretación como representación de mecanismos de toma de decisiones, por lo que dedicaremos a este punto la observación siguiente. Recordando la definición de juego superaditivo, no es difícil demostrar esta propiedad:

- *Un juego simple u es superaditivo, es decir, verifica* $u(S \cup T) \geq u(S) + u(T)$ *cuando* $S \cap T = \varnothing$, *si y sólo si cada dos coaliciones ganadoras minimales tienen intersección no vacía:* $S \cap T \neq \varnothing$ *para cualesquiera* $S, T \in W^m$.

Observación 24. Los mecanismos de decisión colectiva por votación suelen aplicarse en dos tipos de situaciones: 1) cuando se presentan dos alternativas y hay que elegir una de ellas forzosamente; 2) cuando se presenta una sola propuesta para modificar un *statu quo* ya existente.

Como ilustración, supongamos que los socios que participan en Barcelona TV se enfrentan a la cuestión siguiente: elegir, entre dos candidatos bien cualificados, al sustituto del director general de programación de la emisora, que acaba de presentar una dimisión irrevocable. Ésta es una situación del tipo 1. Supongamos, en cambio, que deben decidir sobre la propuesta de extender la programación de forma que se emita ininterrumpidamente las 24 horas del día. Ésta es una situación del tipo 2, porque la desestimación de la propuesta simplemente deja las cosas como estaban *(statu quo).*

En el primer caso, es esencial que el mecanismo corresponda a un juego simple superaditivo, ya que de lo contrario podría darse un conflicto si una coalición ganadora apoyase la primera de las dos alternativas (candidatos, en la ilustración anterior) y otra coalición, ganadora también, apoyase la segunda: ¿cuál debería entonces escogerse?

En este caso, conviene incluso que el juego sea *fuerte,* es decir, tal que dada una coalición y su complementaria una de las dos sea ganadora. Un juego superaditivo y fuerte se denomina *decisivo,* y podemos resumir las dos condiciones a la vez en una sola: un juego simple u, definido por la colección W, es decisivo si y sólo si se cumple que

$$S \in W \Leftrightarrow N \setminus S \notin W \text{ para toda } S \subseteq N.$$

Si el juego es superaditivo pero no decisivo, puede darse la posibilidad de que ninguna de las alternativas cuente con votos suficientes para ser elegida. Esta dificultad, no tan grave como la que se derivaría de un juego impropio, puede subsanarse reformulando la disyuntiva (por ejemplo, abriendo un nuevo período de presentación de candidaturas en la ilustración anterior).

En el caso de la cuestión 2, la superaditividad no es crucial. Se da, simplemente, una lista de las coaliciones que pueden *promover* una acción: si alguna de ellas vota afirmativamente, la acción (modificación del *statu quo*) se lleva a cabo; si no, las cosas siguen como antes. Podríamos decir que en este caso no hay *urgencia de decidir.* Cualquier juego simple no nulo es, en principio, adecuado para tomar decisiones de esta índole. Si el juego, superaditivo o no, no es fuerte, la consecuencia es solamente una pérdida de *decisividad* semejante a la que ya hemos comentado con respecto a la cuestión 1.

En definitiva, la medida de poder que hemos propuesto se aplica perfectamente tanto a juegos (simples) superaditivos como a juegos impropios, puesto que no tiene nada que ver con el tipo de cuestión sobre el que deciden los agentes del sistema que representamos mediante un juego simple.

Ejemplos 25. Ilustraremos el comentario anterior mediante dos ejemplos de lo que podríamos llamar también *poder de acción.*

1. Supongamos que una empresa se encuentra en mala situación económica. Sus acreedores son las empresas 1, 2, 3 y 4. Supongamos que, por el volumen de las deudas acumuladas, las coaliciones mínimas de acreedores que pueden instar ante un juez, con garantías de éxito, la declaración de quiebra o suspensión de pagos de la empresa deudora son las siguientes:

$$W^m = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

Esta lista define un juego simple (impropio) u. Aplicando el índice de poder de Shapley-Shubik a este juego obtenemos

$$\Phi[u] = (9/12, 1/12, 1/12, 1/12),$$

lo que nos muestra de forma numérica precisa la *capacidad* individual de cada empresa para lograr el objetivo: la declaración de quiebra o suspensión de pagos por parte del juez. (Conviene observar en este juego que, aunque el jugador 1 forma por sí solo una coalición ganadora, *no* es dictador, porque existen otras coaliciones ganadoras minimales. Esto es posible porque el juego es impropio, y se dice a veces que un jugador de este tipo es un jugador *capaz.* Encontramos esta situación también en el ejemplo siguiente.)

2. Supongamos ahora que cuatro empresas, 1, 2, 3 y 4, dominan el mercado relativo a un producto determinado y que, por su implantación, los grupos mínimos de empresas que disponen de capacidad para influir en los consumidores e imponer alguna moda o alguna tendencia en ellos son los siguientes:

$$W^m = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.$$

Aplicando de nuevo el índice de Shapley-Shubik resulta

$$\Phi[u] = (1/2, 1/6, 1/6, 1/6),$$

y esta valoración indica también aquí la *capacidad* individual de cada empresa para influir en los consumidores en el sentido que hemos indicado.

9. LECTURAS ADICIONALES

El concepto de juego cooperativo y los fundamentos del valor de Shapley como concepto de solución pueden verse en [1]. Un cuerpo teórico mucho más extenso y, en ocasiones complejo, se encuentra en [10], un clásico de la Teoría de Juegos.

El trabajo original de Shapley [12] y su colaboración con Shubik para definir el índice de poder [14] han sido reeditados recientemente e incluidos en [11]. El tratamiento propuesto por Shapley para los juegos simples y que hemos seguido aquí puede hallarse en [13]. La axiomatización del índice de poder como solución restringida a los juegos simples fue propuesta en [8].

La continuación natural de las aplicaciones del índice de poder se basa en la idea de valor coalicional introducida por Owen [9]. Pueden encontrarse aplicaciones de esta índole en [2], [3], [4], [5] y [6].

Por último, [7] es una introducción no técnica a la Teoría de Juegos que contiene un último capítulo dedicado a los sistemas de decisión y las distribuciones de poder. Su lectura es amena.

REFERENCIAS

1. Amer, R., F. Carreras y A. Magaña: «Juegos cooperativos y valor de Shapley», *Alta Dirección*, pendiente de publicación, 2002, y Documento de Trabajo MA2-IT-01-00003, Universidad Politécnica de Cataluña, 2001.
2. Carreras, F.: «Cooperación y Defensa», *Qüestiió*, 17, 1993, 103-134.
3. Carreras, F. y G. Owen: «Evaluation of the Catalonian Parliament, 1980-1984», *Mathematical Social Sciences*, 15, 1988, 87-92.
4. Carreras, F. y G. Owen: «Valor coalicional y estrategias parlamentarias», *Revista Española de Investigaciones Sociológicas*, 71-72, 1995, 157-176.
5. Carreras, F. y G. Owen: «An analysis of the Euskarian Parliament», en *Collective Decision-Making: Social Choice and Political Economy*, editado por N. Schofield, Kluwer Academic Publishers, 1996, 251-263.
6. Carreras, F., I. García-Jurado y M. Pacios: «Estudio coalicional de los Parlamentos Autonómicos de Régimen Común», *Revista de Estudios Políticos*, 82, 1993, 159-176.
7. Davis, M. D.: *Introducción a la teoría de juegos*, 4.ª ed., Alianza Editorial, 1986.
8. Dubey, P.: «On the uniqueness of the Shapley value», *International Journal of Game Theory*, 4, 1975, 131-139.
9. Owen, G.: «Values of games with a priori unions», en *Essays in Mathematical Economics and Game Theory*, editado por R. Henn y O. Moeschlin, Springer-Verlag, 1977, 76-88.
10. Owen, G.: *Game Theory*, 3.ª ed., Academic Press, 1995.

11. ROTH, A. E. (ed.): *The Shapley value: Essays in honor of Lloyd S. Shapley,* Cambridge University Press, 1988.
12. SHAPLEY, L. S.: «A value for *n*-person games», en *Contributions to the Theory of Games II,* volumen especial editado por H. W. Kuhn y A. W. Tucker, *Annals of Mathematical Studies,* 28, 1953, 307-317.
13. SHAPLEY, L. S.: «Simple games: an outline of the descriptive theory», *Behavioral Science,* 7, 1962, 59-66.
14. SHAPLEY, L. S. y M. SHUBIK: «A method for evaluating the distribution of power in a committee system», *Americal Political Science Review,* 48, 1954, 787-792.