Escritos Contables y de Administración, ISSN 1853-2063, vol. 6, n.° 2, 2015, págs. 81 a 109.

OPCIONES REALES Y FUNCIÓN ISOELÁSTICA DE UTILIDAD PARA VALUAR I&D E INTANGIBLES

REAL OPTIONS AND ISOELASTIC UTILITY FUNCTIONS TO VALUE R&D AND INTANGIBLES

Gastón S. Milanesi[1]

Fecha de recepción: 12-07-2016
Fecha de aceptación: 10-10-2016

Resumen

Se propone un modelo que incorpora preferencias frente al riesgo con funciones de utilidad isoelásticas (CRRA) en un modelo de valoración binomial desde la perspectiva del inversor individual. Primero, se presentan las principales nociones sobre funciones de utilidad, coeficientes de aversión al riesgo y función isoelástica de utilidad. Luego se desarrolla el conjunto de ecuaciones correspondiente al modelo, aplicándolas sobre un proyecto biofarmaceútico con opciones secuenciales y paralelamente un análisis de sensibilidad del coeficiente de aversión y el valor de la opción. Finalmente, se concluye que el modelo desarrollado es un soporte para la toma de decisiones, porque captura la flexibilidad estratégica mediante opciones reales y se ajusta al grado individual de aversión al riesgo a través de la función isoelástica de utilidad.

Palabras clave: opciones reales, función isoelástica de utilidad, valuación neutral al riesgo.

[1] Departamento de Ciencias de la Administración, Universidad Nacional del Sur (UNS). E-mail: milanesi@uns.edu.ar

Abstract

This paper proposes a model that incorporates risk preferences with isoelastic utility functions (CRRA) into the binomial model, from the individual investor's perspective. First, the main notions of utility functions, risk aversion coefficients and isoelastic utility function are presented. Then, the group of equations related to the model is developed, applying them on a biopharmaceutical project with sequential options and, at the same time, an analysis of sensitivity of the risk aversion coefficient and the option value is performed. Finally, it is concluded that the developed model contributes to decision-making because it captures strategic flexibility through real options and it adjusts to the individual degree of risk aversion through isoelastic utility function.

Keywords: real options, isoelastic utility function, risk aversion coefficient.

JEL: G30, G32.

1. Introducción

La Teoría de Opciones aplicada a la valuación de activos reales ha dejado de ser un conjunto de métodos complejos y conocidos por una minoría en el campo de las finanzas, convirtiéndose en una de las herramienta indispensables para valorar contratos, estrategias, intangibles, proyectos y desarrollos derivados de la función I&D de las firmas. Esto ha dado origen a un prolífero campo de investigación plasmado en clásicos libros relacionados con el tema, desde los trabajos seminales de Dixit y Pindyck (1994); Trigeorgis (1997); Amram y Kulatilaka (1998); Boer (2002); Borison (2003); Smit y Trigeorgis (2004); pasando por manuales modernos como Mun (2004); Shockley (2006); Kodukula y Chandra (2006); Graeme (2009); Num (2015); Salahaldin (2016), entre otros, además de las tradicionales publicaciones en revistas científicas[2].

Para su efectiva implementación, los clásicos modelos de valuación de opciones financieras y, por carácter transitivo, las opciones reales requieren de la perfecta correlación entre los cambios en el valor de la opción en relación con cambios en el precio del subyacente. El concepto es válido si se cumple el supuesto de mercados completos que brindan la posibilidad de construir estrategias de *hedging* continuas y sin costos de transacción. Un mercado es completo si se cumple la condición en donde la cantidad de activos puros linealmente independiente sea igual al número de estados contingentes o futuros. Conocido el precio de los activos puros, el valor de cualquier otro activo simple o compuesto en estructura puede ser estimado a partir del

[2] El enfoque reconoce sus raíces en el modelo de valoración de opciones financieras de Black y Scholes (1972, 1973) y Merton (1973). El primer trabajo sobre opciones es desarrollado por Myers (1977) para el supuesto de la estrategia (opción) de crecimiento. En la literatura se pueden encontrar diferentes propuestas analíticas para el tratamiento de categorías específicas de opciones, entre ellas los trabajos seminales han sido: (a) Opción de Diferimiento (McDonal y Siegel, 1986; Paddock, Siegel y Smith, 1988; Ingersoll y Ross, 1992); (b) Opción de Crecimiento (Myers, 1977; Trigeorgis, 1988; Smit, 1996); (c) Opción de Abandono (Myers y Majd, 1990); (d) Opciones de expandir-contraer o extensión de la vida útil (Trigeorgis y Mason, 1987; Keema, 1988); (e) Opción de cierre temporario o corte del proceso productivo (Brennam y Schwartz, 1985); (f) Opción de intercambio (Margrabe, 1978; Kulatilaka, 1988; Kulatilaka y Trigeorgis, 1994); Opciones financieras de insolvencia (Mason y Merton, 1985; Trigeorgis, 1993). Paralelamente, el enfoque de opciones reales se complementa con el análisis de decisiones y riesgos (Smith y Nau, 1995); empleo de simulación aplicando el enfoque MAD, *Marketed Asset Disclaimer* (Copeland y Antikarov, 200; Copeland y Tuffano, 2004) y el análisis de Opciones Reales y Teoría de Juegos (OR y *Games Theory*) (Smit y Trigeorgis, 2004).

vector de flujos correspondientes a cada estado contingente (Copeland, Weston y Shastri, 2004)[3], por ejemplo el valor de un instrumento derivado, un proyecto de inversión o estrategia. En un mercado completo se pueden construir derivados a partir de carteras combinadas con simples instrumentos, y a la vez, si se invierte la ecuación, el resultado obtenido devenga ratios de coberturas perfectas, dando origen a carteras libres de riesgo. Si el mercado es incompleto, el valor del derivado no puede replicarse directamente de la conjunción de sencillos instrumentos financieros[4] (Wilmott, 2009). La valuación neutral al riesgo requiere de mercados completos, con el fin de obtener una variable fundamental de los modelos de valuación de opciones como el riesgo. Para ello debe existir una cartera de activos financieros con perfecta correlación relativa a los flujos del proyecto, ya que mediante el precio de mercado del *portfolio* se deriva la dimensión del riesgo asimilable al activo real.

En términos generales y aplicados, los mercados son mayoritariamente incompletos, en particular si se habla de activos reales y más aún de tipologías como empresas de base tecnológica, *start-up*, intangibles o simplemente

[3] La Teoría de los Estados Preferentes (Debreu, 1959; Arrow, 1964; Pratt, 1964) permite derivar los precios de equilibrio de todos los activos de la economía a partir del vector de precios correspondientes a los activos puros. Los activos puros son los que reflejan el valor que los individuos, en equilibrio, asignan a cada riesgo, estos últimos representados por los estados contingentes o preferentes. Esos precios son determinados a partir de las preferencias intersubjetivas consumo-inversión de los individuos, las creencias individuales agregadas respecto de las probabilidades relacionadas con los estados contingentes y las preferencias de los agentes relacionadas con el riesgo y el nivel de riesgo sistémico del mercado.

[4] El único factor aleatorio es el precio del subyacente. Construyendo una cartera de arbitraje con una posición larga en la opción y una corta en el subyacente se anula el riesgo producto de la cobertura de la acción sobre la opción. La cartera es libre de riesgo en tanto se estime correctamente el ratio delta con sus continuos rebalanceos. En el *mundo* propuesto en los modelos de Black y Scholes (1972), realizando la correcta cobertura, todo el riesgo es eliminado; en equilibrio no es dable esperar compensación por riesgo, consecuentemente todo crece al tipo sin riesgo. Los modelos tradicionales de valuación (lognormal con volatilidad constante y binomial) permiten replicar contratos o flujos de pagos. En el modelo binomial la opción se puede valuar replicando sus flujos combinando *delta* acciones y bonos o se puede *cubrir* la opción con *delta* acciones para generar *bonos libres de riesgo.* La posibilidad de cobertura es una interesante propiedad matemática en el modelo binomial (Cox, Ross y Rubinstein, 1979). La probabilidad de ascenso y descenso correspondiente al precio del subyacente no afecta al valor de la opción. Los agentes pueden estar en desacuerdo con las probabilidades, pero una vez estimados el movimiento de ascenso y descenso, construyendo carteras de cobertura, se arriba al valor del derivado; solo se necesita tener la misma percepción de la volatilidad del derivado.

empresas cerradas. En este contexto, el modelo de valoración neutral al riesgo empleado en el marco de la teoría de opciones reales presenta una fuerte debilidad. No se verifica la existencia de carteras réplicas o activos financieros gemelos perfectamente correlacionados con los flujos de fondos del activo real objeto de valuación, que permitan inferir todos los riesgos contenidos en los flujos del proyecto y consecuentemente su valor (Wang y Halal, 2010). Atendiendo a dicha situación, se puede citar al trabajo de Smith y Nau (1995), que resulta pionero en clasificar los riesgos para valorar opciones en "*mercado*" y "*privados*". En los primeros, existen activos financieros con perfecta correlación que permiten su réplica aplicando el concepto de valuación neutral al riesgo. En los segundos, los autores sugieren el uso de funciones de utilidad y equivalentes ciertos para su valoración apoyándose en los conceptos vertidos por Keeney y Raiffa (1976, 1993). Otro camino ampliamente divulgado en la literatura especializada ha sido el adoptar el enfoque MAD (*marketed asset disclaimer*). El punto de partida de este enfoque es que el valor obtenido por el tradicional método de descuentos de flujos de fondos es el precio *justo* al que se negociaría el mismo. Consecuentemente, el dato volatilidad surge de la simulación de la tasa rendimiento generada por el proyecto (Copeland y Antikarov, 2001)[5]. Un tercer camino implica abandonar el paradigma de la probabilidad y adaptar los modelos de opciones a la teoría de conjuntos borrosos (Dubois y Prade, 1980; Buckley, 1987), suponiendo ambigüedad o falta total de información para estimar la volatilidad del subyacente[6].

En línea con las propuesta de Smith y Nau (1995), y siguiendo el modelo de opciones y funciones *CRRA* de Henderson y Hobson (2002) y Grasselli (2011), el presente trabajo incorpora las preferencias de los agentes mediante la función

[5] Este enfoque es propuesto inicialmente por Copeland y Antikarov (2001); Copeland y Tufano (2004), Brandao y Dyer (2005); Brandao, Dyer y Hahn (2005); Smith (2005); Brandao, Dyer y Hahn (2008), siendo la variable a simular $z = \log(VP_1/VP_0) - 1$, el rendimiento producto del cociente entre los valores actuales.

[6] Existe un conjunto de trabajos donde se avanza sobre el modelo binomial en los cuales la ambigüedad reflejada en el parámetro volatilidad asume el comportamiento de un número borroso. Entre otros, se pueden citar las adaptaciones sobre el modelo binomial realizadas por Muzzioli y Torricelli (2004); Yoshida, Yasuda, Nakagami y Kurano (2006); García Sastre y Roselló Miralles (2007); Liao y Ho, (2010); Zdnek (2010); Shine Yu, Ming, H, Li, y Chen (2011); Milanesi (2013, 2014 y 2015). Respecto de los modelos en tiempo continuo, se encuentran los trabajos de Carlsson y Fuller (2003); Carlsson, Fuller, Heikkila y Majlender, (2007); Collan, Fullér y Mezei (2009), entre otros.

de utilidad isoelástica (*CRRA*) sobre las magnitudes obtenidas aplicando el modelo binomial de valoración de opciones, permitiendo incorporar diferentes grados de aversión al riesgo de acuerdo con las preferencias de los agentes. En otras palabras, priorizando la visión de un inversor individual que tanto impacta en las valuaciones de innovaciones, investigaciones y desarrollo, empresas de base tecnológica, adquisiciones o transferencias de intangibles[7]. El modelo supone que los mercados no son completos, eficientes y perfectos. Por lo tanto, no se cumple la ley del precio único en el sentido que dos activos con diferente estructura pero similar riesgo y flujos deben valer lo mismo, ni se verifica el teorema de la cartera de inversión o teorema de la separación de Tobin (1958)[8], siendo este la base del primer modelo de equilibrio de valoración de activos de capital (CAPM). No se puede dejar de advertir que una razón que justifica la propuesta de trabajar con funciones de utilidad, en la valoración de la flexibilidad estratégica contenidas en activos reales, reside en el carácter ilíquido de las opciones. En un sentido aplicado, la no liquidez aporta complejidad al modelo de valuación, ya que a menudo los parámetros del mismo no se obtienen directamente de la observación de precios y momentos estocásticos derivados de transacciones de mercados "de opciones reales". A diferencia de un instrumento financiero los activos reales no reúnen características propicias para su liquidez como la fungibilidad y divisibilidad.

[7] En principio una empresa tiene por objetivo maximizar una función de beneficios vinculada a sus ingresos y costos esperados. El modelo propuesto fusiona la maximización de beneficios con la percepción que el inversor individual tiene del riesgo. La propuesta se ajusta para aquellos proyectos donde la figura del titular y el administrador se confunden e influyendo el capital humano en el valor intrínseco del bien. En este tipo de activos intangibles, el resultado del modelo es una apreciación subjetiva del inversor, que luego de un proceso de negociación con la contraparte y vía el flujo informativo de los mercados, se transforma en un elemento objetivo como es el precio. En este tipo de proyectos, tal objetivación es difícil de observar en los mercados, habida cuenta la inexistencia de mercados completos, perfectos y eficientes para este tipo de activos intangibles, además caracterizados por su iliquidez.

[8] Tobin plantea que los agentes pueden diversificar sus inversiones entre un activo libre de riesgo y una cartera única de títulos con riesgo siendo esta la misma cartera eficiente para todos. Entonces diferentes actitudes frente al riesgo resultan simplemente en diferentes combinaciones del título sin riesgo y de la cartera de títulos con riesgo. Esto es válido si los resultados posibles de las inversiones siguen una distribución normal, ya que en este caso las curvas de indiferencia de media y variancia de un inversor adverso al riesgo son convexas. El teorema de separación es la base del primer modelo de valoración de títulos en condiciones de equilibrio del mercado, dos fondos mutuos para asignar precios por riesgos en equilibrio como el CAPM (Sharpe, 1964).

El modelo propuesto aporta una gama de resultados ajustados a diferentes conductas frente al riesgo: adversos, neutrales y afectos; y permite analizar el impacto de las preferencias sobre el valor de la flexibilidad estratégica. El modelo es concebido justamente para valuar activos intangibles; empresas de base tecnológicas, *start-up*, en su mayoría son dominadas por riesgos *privados*, en mercados emergentes.

La estructura del trabajo es la siguiente: primero, se revisan las principales nociones sobre funciones de utilidad, coeficientes de aversión al riesgo y función isoelástica de utilidad. Seguidamente, se presenta el modelo propuesto con el conjunto de ecuaciones empleadas. En tercer término, se analiza un caso donde el objeto de valoración es un proyecto tecnológico con opciones secuenciales, desde la etapa de diseño experimental hasta su lanzamiento. Se aplica el modelo propuesto y se procede a sensibilizar el valor del coeficiente de aversión al riesgo suponiendo tres conductas: valores de $\gamma > 0$ adversos; $\gamma = 0$ neutral e $\gamma < 0$ afecto al riesgo. Se observa la manera en que se comporta el valor estratégico y las opciones reales frente a diferentes valores del coeficiente. Finalmente se arriba a las principales conclusiones.

2. Aversión al riesgo y la función de utilidad isoléstica (*CRRA*)

Von Neumann y Morgenstern (1944), partiendo de las nociones seminales de Daniel Bernoulli (1954), a partir de la Teoría de la Utilidad Esperada como sostén teórico, desarrollan un mecanismo racional de toma de decisiones en condiciones de incertidumbre, explicando la conducta de los agentes con el objetivo de llegar sistemáticamente al óptimo de la decisión[9]. Esta teoría ha

[9] Previo a estos trabajos, los primeros conceptos relativos a utilidad se remontan a los estudios de Huygens (1657), quien introduce el concepto de valor esperado de la decisión. No obstante, es Daniel Bernoulli (Dehling, 1997) quien presenta las primeras críticas a la teoría del valor esperado como medida en el proceso decisorio, mediante su conocida paradoja de St. Petersburgo. Bernoulli introduce la noción de utilidad, ya que considera que la noción de valor esperado en términos de precios es una medida incorrecta. El precio es un fenómeno observable, similar para todos los agentes. La utilidad es un concepto subjetivo e individual condicionado al estado de riqueza en que se encuentra el individuo. Bernoulli sostiene que no hay dudas de que la ganancia de 1.000 ducados va a ser más significativa para un hombre pobre que para un hombre rico, aunque en términos absolutos ambos perciban la misma cantidad de dinero. (Bernoulli, 1954; traducción del latín para la revista *Econometrica* por Louise Sommers desde "Specimen

evolucionado, revisando la definición matemática de la función, pasando por los supuestos sobre el comportamiento hasta la incorporación de sesgos y heurísticas en la toma de decisiones, dando lugar a la rama conocida como Finanzas Conductuales (*Behavioral Finance*)[10].

No obstante, en términos generales la caracterización básica del comportamiento de los agentes frente a la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre reconoce conductas promedio. En primer término los agentes prefieren poseer más riquezas o ganancias a menos. Si se define la función de utilidad como $U(.)$, la riqueza como W y se presentan dos alternativas, $A = W + a$ y $B = W + b$ siendo $a > b$ sumas adicionales de riqueza; la $U(A) > U(B)$. Esto implica que la curva de la función en la parte de las ganancias es creciente y por lo tanto su derivada primera positiva $U'(.) > 0$.

En segundo lugar, es conocido que existen tres actitudes clásicas frente al riesgo: adverso, neutral o afecto, siendo la función cóncava, lineal o convexa. La forma funcional es producto de las preferencias entre dos magnitudes utilidad de la riqueza esperada (cierto); $U(W)$ y la utilidad esperada de la riqueza (probable) $E[U(W)]$. Las desigualdades que se originan son $U(W) > E[U(W)]$ adverso, $U(W) = E[U(W)]$ neutral y $U(W) < E[U(W)]$ afecto al riesgo.[11] El premio por riesgo para un individuo es la diferencia entre la riqueza esperada menos el equivalente cierto[12] $E[U(W)] - U(W)$.

Theoriae Novae de Mensura Sortis", Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tomus V (Papers of the Imperial Academy of Sciences in Petersburg, Vol. V [1738], pp. 175-192). Estas son las obras seminales tomadas por Von Neumann y Morgenstern (1944).

[10] Si bien no es el objetivo del presente trabajo abordar en profundidad la evolución de la Teoría de la Utilidad, a modo de síntesis, el cuerpo teórico propuesto por Von Neumann y Morgenstern, evolucionó a partir de los trabajos sobre Friedman y Savage (1948) y Markowitz (1952). El último relaciona los conceptos de maximización de la utilidad esperada con el Paralelamente, la Teoría de la Utilidad Esperada fue revisada en sucesivas ocasiones (Allais, 1953, 1988; Savage, 1954; Simon, 1955 y 1979). Las investigaciones sobre toma de decisiones en condiciones de incertidumbre evolucionan hacia la rama de las finanzas conocida como conductual (*Behavioural Finance*), a partir de los trabajos seminales de Tversky y Kahneman (1974 y 1981); Kahneman y Tversky (1979); Thaler (1985); Shefrin y Statman (1985; 2000); Thaler y Johnson (1990); Shiller (2005); Shefrin (2010), entre otros. Un desarrollo de la evolución de la Teoría de la Utilidad Esperada se puede encontrar en Milanesi y El Alabi (2016).

[11] Esta propiedad se puede entender con un sencillo ejemplo. Supóngase un agente que se enfrenta a dos inversiones: A implica invertir en activo riesgoso $1 y donde en $t=1$ devuelve $2 o $0 con 50 % de probabilidad. B: invertir $1 en un activo libre de riesgo. El valor esperado en este caso es $E(W) = 0.5 \times \$2 + 0.5 \times \$0 = \$1$. La conducta de un individuo adverso al riesgo es no invertir, ya

Sobre la base de lo explicado precedentemente y para conductas adversas al riesgo, la forma funcional de la curva de utilidad reúne dos propiedades: a) se prefiere más a menos (riqueza/ganancia), por lo tanto la función de utilidad es creciente con una derivada primera positiva $U'(W) > 0$; b) la aversión al riesgo hace que la figura sea cóncava, derivada segunda negativa $U''(W) < 0$.

Caracterizada la curva de utilidad para un sujeto adverso al riesgo y definida la forma de cuantificar el premio por riesgo a partir de las funciones de utilidad, es necesario brindar una definición de aversión al riesgo. La misma fue desarrolla por Pratt (1964) y Arrow (1971) a partir de su derivación de premio por riesgo y arribando a los conceptos de coeficiente de aversión al riesgo absoluta (*CARA*) y relativa (*CRRA*).[13] La *CARA* es igual a la siguiente expresión:

que prefiere \$1 ciertos a \$1 probable. Matemáticamente esta conducta es explica por la forma cóncava de su curva de utilidad. La *E(U)* de no invertir es mayor a la *E(U)* de invertir: $U(\$1) > 50\,\%\, U(\$2) + 50\,\%\, U(\$0)$ reordenando y multiplicando por 2 ambos lados se tiene que $U(\$1) - U(\$0) > U(\$2) - U(\$1)$. Indica que genera más utilidad un incremento en la riqueza de \$0 a \$1 que de \$1 a \$2. Si bien la función es creciente (primera derivada), la pendiente es negativa (segunda derivada). El individuo adverso acepta si el costo es inferior al valor esperado, en este caso una cifra inferior a \$1. Una persona neutral al riesgo, en cambio, es indiferente entre la inversión segura y probable: $U(\$1) = 50\,\%\, U(\$2) + 50\,\%\, U(\$0)$ reordenando y multiplicando por 2 ambos lados se tiene que $U(\$1) - U(\$0) = U(\$2) - U(\$1)$. Indica que la utilidad es la misma en ambos tramos del incremento. La segunda derivada es igual a cero y la forma funcional lineal creciente. En el caso de una persona afecta al riesgo: $U(\$1) < 50\,\%\, U(\$2) + 50\,\% U(\$0)$ reordenando y multiplicando por 2 ambos lados se tiene que $U(\$1) - U(\$0) < U(\$2) - U(\$1)$. Indica que genera menos utilidad un incremento en la riqueza de \$0 a \$1 que de \$1 a \$2. La segunda derivada es negativa, y está dispuesto a asumir la apuesta por lo que puede pagar más que el valor esperado, por ejemplo y siguiendo con el ejemplo, \$2 a cambio de \$1 probable (Elton y Gruber, 1995).

12 Una magnitud es equivalente a certeza si la cantidad obtenida con certidumbre total genera la misma utilidad en relación a la satisfacción devuelta por un valor aleatorio. Cuando las cantidades de riqueza son aleatorias, con una probabilidad de ocurrencia asociada, se puede establecer que monto de ganancia cierta tiene la misma utilidad que la utilidad esperada del valor esperado de los pagos probables; $U(W_c) = E[U(W)]$. La magnitud cierta e incógnita en la igualdad es W_c, y se conoce como *equivalente cierto* de la riqueza. Si se relaciona esta magnitud con el coeficiente de aversión al riesgo, por ejemplo: $U(W_c) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma W}$; siendo $U(W) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma W}$ y γ el coeficiente de aversión al riesgo, a mayor gamma menor equivalente cierto (Wilmott, 2009).

13 El planteo surge del concepto de premio por riesgo para el individuo adverso. Suponiendo un sujeto con una riqueza *W* y un activo riesgos *Z* neutral al riesgo (*Z* = *0*); la pregunta que emerge es la siguiente: ¿qué monto de premio por riesgo $\pi(W, Z)$ se debe añadir para hacer indiferente la utilidad de una cifra cierta y probable? Matemáticamente, el premio por riesgo π es un valor que satisface la siguiente igualdad: $E(U(W + Z) = U[W + E(Z) - \pi(W, Z)]$. El lado izquierdo significa el nivel de utilidad esperada dado la riqueza actual y el valor probable, el

$$CARA = -\frac{U''(W)}{U'(W)}(1)$$

Se conoce por absoluta, ya que mide la aversión para un nivel dado de riqueza y su utilidad reside en explicar el comportamiento de esta medida ante cambios en la riqueza. Empíricamente, se sostiene que ante incrementos en la riqueza *CARA* disminuye, esta es una de las propiedades que caracteriza la función para sujetos adversos al riesgo. Multiplicando *CARA* por el nivel de riqueza se obtiene *CRRA*:

$$CRRA = -W\frac{U''(W)}{U'(W)}(2)$$

Se supone que la *CRRA* es constante en su comportamiento para sujetos adversos al riesgo. Esto implica que el individuo tiene una aversión al riesgo constante para pérdidas de riqueza, en el sentido de que la pérdida y la ganancia absolutas sean proporcionales.

Definida una *CARA* esta es decreciente ante aumentos de W y *CRRA* constante. Las propiedades indicadas permiten testear y corrobar diferentes tipos de funciones de utilidad empleadas en la literatura. Una forma muy difundida de funciones de utilidad son la cuadráticas de la forma $U(W) = aW - bW^2$; en este caso las derivadas $\frac{d(CARA)}{dW} > 0$ y $\frac{d(CRRA)}{dW} > 0$ hace que no tenga sentido tal comportamiento[14]. Trabajos tales como Friend y Blume (1975), Rabin (2000), Vendrik y Woltjes (2007), Wakker (2008), Suen (2009) y Boyce, Wood, Bank, Clark y Brown (2014) arrojan resultados consistentes con la familia de funciones exponenciales y logaritmicas $U(W) = -w^x$, o $U(W) = \log(w)$. Esta

lado derecho de la igualdad presenta la utilidad de la suma entre el nivel de riqueza actual (cierto) más el valor esperado (probable) menos premio por riesgo. Empleando series de Taylor se expande la función de utilidad de la riqueza en ambos lados, y se obtiene la expresión del premio por riesgo de Pratt-Arrow: $\pi = \frac{1}{2}\sigma_Z^2\left(-\frac{U''(W)}{U'(W)}\right)$. Donde es la varianza del valor del activo riesgoso es σ_Z^2; la expresión entre paréntesis, el cociente entre la derivada segundo y primera de la riqueza. Recuérdese que para un individuo adverso al riesgo la derivada segunda es negativa y la primera es positiva, al ser $\frac{1}{2}\sigma_Z^2$ positivo, el signo del premio por riesgo en este caso siempre será positivo. En el caso de un sujeto afecto al riesgo la expresión entre paréntesis es negativa ya que la derivada segunda es positiva; por lo tanto, el premio por riesgo es negativo. Finalmente, en el caso de un sujeto neutral al riesgo, al ser la derivada segunda igual a cero, el premio por riesgo es nulo.

[14] Si *CRRA* un sujeto puede ser más adverso a una magnitud porcentual dada de pérdida de riqueza ante incrementos de riqueza. En ese sentido, un millonario que pierde la mitad de su riqueza, quedando ahora con u$ 400 millones de dólares, perdería más utilidad que una persona que comienza con u$ 10.000 y termina obteniendo de riqueza acumulada u$ 5.000.

familia de funciones genera resultados satisfactorios relativos a pruebas empíricas y cumple con las propiedades intuitivas que el marco teórico, en promedio, propone para los sujetos adversos al riesgo: la utilidad marginal de la riqueza es positiva, $U'(W) > 0$; decrece a medida que aumenta la riqueza $U''(W) < 0$; la medida *CARA* decrece ante aumentos de riqueza $\frac{d(CARA)}{dW} < 0$ y la *CRRA* se mantiene constante $\frac{d(CRRA)}{dW} = 0$. No obstante, de las clases de funciones mencionadas las que mejor se ajustan a las condiciones planteadas son las funciones exponenciales, en particular la función isoelástica de utilidad. Esta función es un caso especial de la hiperbólica aversión absoluta al riesgo (*HARA*)[15] (Merton, 1992); y también se conoce como función de utilidad *CRRA*. Su forma funcional es la siguiente:

$$U(W) = \begin{cases} \frac{W^{\gamma}-1}{1-\gamma} \rightarrow \gamma > 0; \gamma \neq 1 \\ log(W) \rightarrow \gamma = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Donde γ representa el nivel de aversión al riesgo. Esta función cumple con la condiciones de Inada[16], es decir la utilidad marginal del consumo se aproxima a infinito, para valores de consumo cercanos a cero, por lo que se asegura la condición de no optimalidad relativa a consumos cero en ningún momento del tiempo (Suen, 2009). Además permite la elasticidad de sustitución intertemporal constante como condición para asegurar la existencia de equilibrio balanceados (Ljungqvist y Sargent, 2000).

---

15 *HARA* es una forma de representar matemáticamente la aversión al riesgo, donde las funciones cuadráticas, exponenciales e isoelásticas son casos particulares. Se dice que una función de utilidad presenta una aversión al riesgo hiperbólica si la tolerancia al riesgo $\tau(W)$, que es la recíproca de la aversión al riesgo, presenta un comportamiento lineal con la riqueza *W*. Por lo tanto la tolerancia al riesgo es $\tau(W) = \frac{1}{\frac{U''(W)}{U'(W)}} = \frac{W}{1-\gamma} + \frac{b}{a}$. Una función de utilidad es *HARA* si tiene la forma $U(W) = \frac{W}{1-\gamma}\left(\frac{aW}{1-\gamma} + b\right)^{\gamma}$, donde los parámetros actúan como restricción al comportamiento de la riqueza, a>0 y $\frac{aW}{1-\gamma} + b$>0, poniendo límites inferior y superior a la riqueza respectivamente para $\gamma < 1$ e $\gamma > 1$. Para el caso de que el límite de aversión al riesgo tienda a *1* ($\gamma \rightarrow 1$); por la regla de LH'ospital se convierte lineal a la riqueza y para $\gamma \rightarrow 0$ se convierte en logarítmica; $U(W) = \log(aW + b)$.

16 Por el economista japonés Ken-Ichi Inada, estableciendo condiciones sobre la función de producción que garantiza crecimiento económico en los modelos neoclásicos de crecimiento en donde el valor de la función es cero en cero; es diferenciable en todos sus puntos, creciente en x, con derivada decreciente (cóncava), el límite de la derivada cercana al origen es infinito y el límite de la derivada hacia el infinito positivo es cero.

La medida de aversión al riesgo (γ) es crucial en la ecuación 3 y es objeto de innumerables calibraciones. En teoría γ fluctúa entre -1 y 1 (Pratt, 1964); no obstante, la calibración del coeficiente depende de las características del individuo, donde lo valores negativos representan sujetos amantes del riesgo y los positivos individuos adversos. El valor cero corresponde a personas neutrales al riesgo[17].

3. Modelo binomial y la función isolelástica de utilidad. Un modelo para valuar opciones reales

El modelo binomial reconoce diversas formulaciones en función de la definición de sus parámetros (Chance, 2007)[18]. La versión más difundida es la desarrollada por Cox, Ross y Rubinstein (1979), conocida como CRR. A partir del modelo de Black-Scholes, se supone que el activo subyacente (V) sigue un proceso geométrico browniano, en tiempo discreto explicado por la distribución de probabilidad binomial. Consecuentemente, los movimientos del activo están dados por los coeficientes de ascenso u y descenso d:

$$u = e^{r\sqrt{\Delta t}} \quad (4)$$

$$d = e^{-r\sqrt{\Delta t}} \quad (5)$$

Siendo r la tasa libre de riesgo y $\Delta t = m/n$, la frecuencia o pasos en los cuales se divide el intervalo de tiempo n. Los coeficientes equivalentes ciertos son calculados:

---

17 Existen varias pruebas empíricas respecto del valor del coeficiente; por ejemplo, Harrison, Johnson McInnes y Rustrom (2005) obtuvieron valores de γ=0.45; Harrison, Lau y Rutstrom, (2007) obtuvieron valores de γ=0.67 para la población dinamarquesa; Harrison, Humphrey y Verschoor (2009) para países subdesarrollados obtuvieron un γ=0.536; Andersen, Harrison, Lau y Rutstrom (2010) para pruebas de laboratorio obtienen valores de γ=0.79 y como valor medio en la muestra de la población γ=0.63; Harrison, Lau, Rutstrom y Tarazona Gómez (2013) encuentran en un experimento en la universidad de Oxford valores en promedio positivos para el índice. Estos experimentos evidencian un grado de aversión al riesgo del individuo medio.

18 Si bien la versión de mayor difusión es la conocida como CRR (Cox, Ross y Rubinstein, 1979), existen diversas formulaciones según la definición de los parámetros como el comportamiento de los coeficientes neutrales al riesgo p y el crecimiento del desvío en relación con los intervalos de tiempo $\sigma\sqrt{\Delta t}$. En ese orden de ideas están los modelos binomiales de Rendleman, Bartter (1979); Jarrow, Rudd (1982); Jabbour, Kramin, Young (2001); trinomiales de Boyle (1988); Kamrad, Ritchken (1991); Derman, Kani, Chriss (1996); Hull (2005), una reseña de estos modelos se puede encontrar en Whaley (2006); Van der Hoek, Elliot (2006); Chance (2007).

$$p = \frac{e^r - d}{u - d} \text{(6)}$$

Con su respectivo complemento $(1-p)$. El proceso recursivo para la valoración parte del valor terminal $ro_T = \max(V_T - X, 0)$ o $ro_T = \max(X - V_T, 0)$; para flujos de pagos asimilables a opciones de compra y venta respectivamente, donde ro presenta el valor de la opción y X el precio de ejercicio. La ecuación sintética de valuación es:

$$ro_0 = \left[\sum_{j(T)=0}^{J(T)=n} ro_T \frac{j!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}\right] e^{-rT} \text{(7)}$$

En esta ecuación, T representa el horizonte final y $j = (0,,t,t+1,T-1)$, los j-ésimos nodos de la rejilla binomial[19]. Si el proceso recursivo es por paso, la ecuación precedente es:

$$ro_t = \left[(ro_{i,t+1} \times p) + (ro_{j,t+1} \times 1 - p)\right] \times e^{-rt} \text{(8)}$$

Las ecuaciones 4 a 8 son los insumos del modelo binomial para estimar el valor de la opción bajo el supuesto de neutralidad frente al riesgo. Para incorporar las preferencias del individuo es menester definir su función de utilidad. En el caso de opciones reales función de utilidad expresada en la ecuación 3[20], para coeficientes de aversión $\gamma \neq 1$ es:

$$U\left(ro_{i,j(t)}\right) = \frac{{ro_{i,j(t)}}^{\gamma - 1}}{1-\gamma} \text{(9)}$$

Donde $ro_{i,j(t)}$ representa el valor de la opción en cada nodo correspondiente a la rejilla binomial en el momento *t*. Aplicando los coeficientes obtenidos en la ecuación 6, se tiene la utilidad esperada ponderada para cada nodo,

$$EU\left(ro_{i,j(t)}\right) = \left\{\left[p \times U\left(ro_{i(t)}\right)\right] + \left[(1-p) \times U\left(ro_{j(t)}\right)\right]\right\} \text{(10)}$$

Seguidamente, se estima el equivalente cierto a la utilidad esperada de la ecuación anterior:

$$CE(ro_{i,j(t)}) = \left\{EU\left(ro_{i,j(t)}\right) \times (1-\gamma)\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \text{(11)}$$

19 En rigor, el valor de la opción es la sumatoria de los valores terminales ponderados por su probabilidad de ocurrencia y actualizados al tipo sin riesgo.

20 Se calcula la utilidad correspondiente a cada nodo de la rejilla binomial (Ochoa y Vasseur, 2014).

Siguiendo a Grasselli (2011), para estimar el valor actual correspondiente a la cifra equivalente cierto, se supone que el valor tiempo del dinero surge de una tasa *r* propia del rendimiento de una colocación de dinero a la vista[21]:

$$CE(ro_{i,j(t-1)}) = CE(ro_{i,j(t)}) \times e^{-r} (12)$$

La utilidad que genera la magnitud monetaria anterior para $\gamma \neq 1$

$$U(ro_{i,j(t-1)}) = \frac{CE(ro_{i,j(t-1)})^{\gamma}-1}{1-\gamma} (13)$$

4. Valoración de un proyecto biofarmacéutico con opciones secuenciales y funciones isoelásticas de utilidad

Los emprendimientos biofarmacéuticos deben su valor en el mercado a los beneficios que generan los productos que comercializan y a las patentes que desarrollan, las cuales les aportan una ventaja competitiva frente al resto de las empresas del sector (Rubio Martín y Lamothe Fernández, 2010). En el presente trabajo se utilizó como caso de estudio para ilustrar el funcionamiento del modelo, un desarrollo tecnológico de un nuevo fármaco elaborado por la firma *X*.[22] En el caso en cuestión, las fases del proyecto son: *diseño experimental* (I), duración dos años, donde se prevén probabilidades de éxito del 60 % y fracaso del 40 %, con una inversión de $3.7 (millones); *desarrollo del prototipo* (II), duración dos años, con probabilidad de éxito del 55 % y fracaso del 45 %, con una inversión de $25,8 (millones); *aprobación* (III), duración estimada de un año, donde existen probabilidades de autorización del producto por las autoridades de control del 85 % y de fracaso del 15 %, con una inversión de

---

[21] No existe un activo libre de riesgo en el sentido estricto de la palabra dado que el mercado es incompleto. El valor tiempo del dinero se representa por el interés que rinde una cuenta bancaria a la vista con valor $\beta = e^{r(t-t_0)}$, para una tasa de interés constante $r \geq 0$. Para un activo de valor V_t su valor actual es igual a V_t/β. Ver Grasselli (2011), pág. 742.

[22] El caso en cuestión se adaptó del caso presentado por Borissiouk y Peli (2002). *Real option approach to R&D project valuation: case study at Serono International SA.* Tesis de maestría, University of Lausanne. Disponible en: //www.ibrarian.net/navon/paper/Master Thesis Real Option Approach to R&D Projec.pdf?paperid=14754232. Estos proyectos, por lo general, se dividen en las siguientes fases: descubrimiento, fase preclínica de diseño experimental, fase clínica de desarrollo del prototipo y pruebas experimentales, fase regulatoria y lanzamiento del producto. El mismo también es tratado en Pareja Vasseaur y Cadavid Pérez (2016). *Valoración de Patentes Estratégicas a través de Opciones Reales: equivalente a certeza y funciones de utilidad.* Contaduría y Administración 61, 794-814 (en prensa).

\$1,34 (millones); seguidamente, en *t=5* se proyecta el *lanzamiento* (comercialización del producto). Este arroja \$145,36 (millones).

Para llegar a dicho valor se procedió a proyectar hacia *t=5* la estructura de ingresos y costos que tendría un producto similar. Los estudios de mercado y el análisis mediante *benchmark* de productos similares sugieren ingresos por un valor actual de \$345 (millones) y se supone una estructura de costos de 25 % de los ingresos correspondientes a costos variables y 59 % a costos fijos. Los primeros ascienden a \$85 (millones) y \$205 (millones) para los fijos. Asimismo, se supone que los ingresos y costos variables siguen un procesos geométrico browniano, en tiempo discreto explicado por un proceso binomial. Para obtener los insumos necesarios para la proyección se simuló el valor actual de ingresos y costos, suponiendo una distribución lognormal, con valores de volatilidad de ingresos $\sigma_i = 39{,}17\%$ y costos $\sigma_c = 23{,}50\%$. Con estos datos y mediante las ecuaciones 4 y 5 se estiman los coeficientes de ascenso y descenso para proyectar ingresos y costos; a saber: para ingresos: $u_i = 1{,}479$; $d_i = 0{,}675$ y para costos: $u_c = 1{,}264$; $d_c = 0{,}790$. En las siguientes tablas, se presentan las rejillas binomiales proyectadas de ingresos y costos:

Tabla 1. Proyección ingresos: evolución estocástica

Fase I+D				**Aprobación**	**Lanzamiento**
0	1	2	3	4	5
\$ 345,00	\$ 510,43	\$ 755,17	\$ 1.117,27	\$ 1.653,00	\$ 2.445,60
	\$ 233,19	\$ 345,00	\$ 510,43	\$ 755,17	\$ 1.117,27
		\$ 157,61	\$ 233,19	\$ 345,00	\$ 510,43
			\$ 106,53	\$ 157,61	\$ 233,19
				\$ 72,01	\$ 106,53
					\$ 48,67

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2. Proyección costos: evolución estocástica

Fase I+D				**Aprobación**	**Lanzamiento**
0	1	2	3	4	5
\$ 85,00	\$ 107,52	\$ 136,00	\$ 172,03	\$ 217,60	\$ 275,24
	\$ 67,20	\$ 85,00	\$ 107,52	\$ 136,00	\$ 172,03
		\$ 53,13	\$ 67,20	\$ 85,00	\$ 107,52
			\$ 42,00	\$ 53,13	\$ 67,20
				\$ 33,20	\$ 42,00
					\$ 26,25

Fuente: elaboración propia.

El valor en *t=5* surge de calcular el valor esperado de ingresos y costos para dicho período. Para ello se ponderan valores en nodos por probabilidad de ocurrencia con la siguiente expresión para ingresos $I_{\mathrm{t=5}} = \left[\sum_{j(T)=0}^{J(T)=n} I_{t=5} \frac{j!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}\right]$ y costos variables $CV_{\mathrm{t=5}} = \left[\sum_{j(T)=0}^{J(T)=n} CV_{t=5} \frac{j!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}\right]$. Los valores obtenidos a partir de la tabla 2 son:

Tabla 3. Valor esperado ingresos y costos variables según distribución binomial

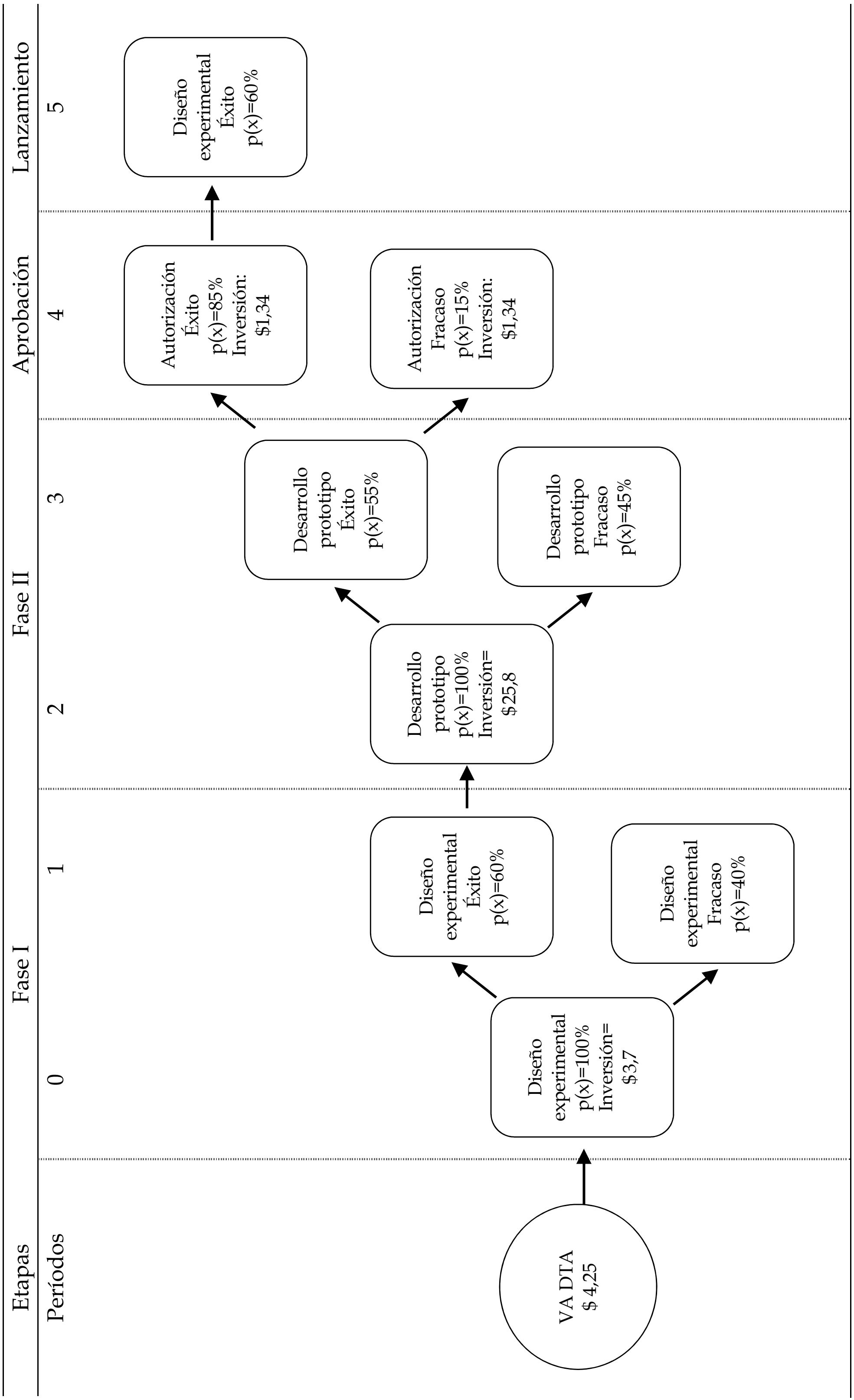
Nodos	p(x)	p(x) x I	p(x) x CV
5	2,1864 %	$ 53,47	$ 6,02
4	12,5511 %	$ 140,23	$ 21,59
3	28,8196 %	$ 147,10	$ 30,99
2	33,0876 %	$ 77,16	$ 22,23
1	18,9938 %	$ 20,23	$ 7,98
0	4,3613 %	$ 2,12	$ 1,14
	Valor esperado	***$ 440,32***	***$ 89,95***

Fuente: elaboración propia.

El valor a fecha de lanzamiento surge de la expresión $E(V_T) = E(I_T) - E(CV_T) - CF$; se supone que los costos fijos son determinísticos y no existe variación proyectada en el nivel de precios. La diferencia entre ingresos y costos arroja un valor esperado en *t=5* de $145,36 millones. Para obtener el valor actual se aplica la técnica de árboles de decisiones (*Decisión Tree Analysis*), la tasa de actualización se estima en un 14, 50 % y surge del costo del capital para activos con similar riesgo; en este caso, tasas de descuento empleadas para evaluar proyectos de la industria farmacológica[23]. El cuadro con los sucesivos cálculos y la gráfica de las etapas del proyecto se exponen a continuación.

[23] Cabe destacar que la tasa de actualización surge de los precios de activos con riesgo equivalente, producto del grado de aversión al riesgo de los agentes, estimada a partir de modelos de equilibrio como el clásico CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) (Sharpe, 1964) y sus derivados MAPT (*Multifactor Asset Pricing Model*) (Fama y French, 1992, 1996, 2004). Por ejemplo, el CAPM no abandona el objetivo de maximización de la utilidad esperada del inversor $E[U(x)]$ y el concepto de aversión al riesgo. Pero en lugar de trabajar directamente con funciones de utilidad del inversor, aplica el criterio de elección *media-varianza*, propuesto por la Teoría Moderna de la Cartera (TMC) (Markowitz, 1952 (a), (b), 1991, 2014). Para ello emplea los precios observados de los activos tranzados en el mercado. Entonces, desde la perspectiva neoclásica de la Teoría Financiera y suponiendo mercados eficientes, perfectos y completos, la tasa ajustada por riesgo es la consecuencia de la diversificación eficiente de la riqueza de los inversores, donde el precio del riesgo está asociado a la contribución marginal del activo objetivo a la cartera eficiente.

Ilustración 1. Esquema del árbol de decisión del proyecto



Fuente: elaboración propia.

Tabla 4. Valoración según el método de árbol de decisión (DTA)

T	V(t)	Probabilidad	Inversión
5	$ 145,37	100%	
4	$ 105,74	85%	$ 1,34
3	$ 50,31	55%	
2	$ 17,72	100%	$ 25,80
1	$ 9,20	60%	
0	*$ 4,25*		$ 3,70

Fuente: elaboración propia.

El árbol de decisiones presenta la debilidad de utilizar la misma tasa de actualización para descontar todas las alternativas proyectadas, cuando en realidad los diferentes caminos requieren diferentes tasas ajustadas por riesgo (Smith y Nau, 1995). En el caso de mercados perfectos y completos, el enfoque de opciones reales subsana la mencionada debilidad de los árboles de decisión, valuando los diferentes flujos asociados a cada estrategia, mediante carteras réplicas o coeficiente equivalentes ciertos, aplicando los conceptos de valuación neutral al riesgo. Para el caso de mercados incompletos o activos reales gobernados por riesgos "*privados*", como el caso bajo estudio, se propone trabajar con la función de utilidad isoelástica del agente incorporando la aversión al riesgo.

El procedimiento correspondiente al modelo es el siguiente: de manera recursiva los pasos consisten en calcular la utilidad que representa cada nodo (ecuación 9), el valor esperado de dicha utilidad (ecuación 10), el coeficiente equivalente cierto (ecuación 11) y luego dicha magnitud se transforma en valor presente (ecuación 12) para, sobre la magnitud obtenida, volver a determinar el grado de utilidad del agente (ecuación 9). Cabe destacar que se supuso un comportamiento neutral al riesgo, es decir un coeficiente de aversión $\gamma = 0$.

En *t*=*5* el valor terminal para cada nodo surge de la expresión $ro_T = [\max(I_T - CV_T + CF); 0]$; en este caso, los ingresos y costos variables terminales surgen de la última columna correspondientes a las tablas 1 y 2 respectivamente. Para las etapas de aprobación y lanzamiento (*t*=*4* y *t*=*5*), se tiene:

Tabla 5. Proceso recursivo etapas aprobación y lanzamiento

Aprobación				Lanzamiento	
4				**5**	
U (.) (ec.9)	$PV(CE)_t = CE_t \times p(x) - I_t$	CE (ec.11)	EU (.) (ec.10)	U (.) (ec.9)	*Max* (I-CV-F;0)
1058,31	$ 1.058,31	$ 1.310,57	1310,57	1965,35	$ 1.965,35
362,81	$ 362,81	$ 450,38	450,38	740,24	$ 740,24
73,15	$ 73,15	$ 92,13	92,13	197,91	$ 197,91
0,00	$ -	$ -	0,00	0,00	$ -
0,00	$ -	$ -	0,00	0,00	$ -
				0,00	$ -

Fuente: elaboración propia.

Para estimar la opcionalidad en la etapa de aprobación, una vez obtenido el equivalente cierto, se pondera por la probabilidad de ocurrencia de aprobación menos la inversión requerida en esa etapa $PV(CE)_t = CE_t \times p(x) - I_t$. A continuación, se avanza sobre la etapa de desarrollo del prototipo (*t*=*2* y *t*=*3*). Se parte de la $U(.)$ para calcular la utilidad esperada (ecuación 10) y así comenzar con el proceso recursivo.

Tabla 6. Proceso recursivo etapa desarrollo

Desarrollo Prototipo							
2				3			
U (.) (ec.9)	$PV(CE)_t = CE_t \times p(x) - I_t$	CE (ec.11)	EU (.) (ec.10)	U (.) (ec.9)	$PV(CE)_t = CE_t \times p(x) - I_t$	CE (ec.11)	EU (.) (ec.10)
188,59	$ 188,59	$ 225,38	225,38	359,21	$ 359,21	$ 686,59	686,59
31,45	$ 31,45	$ 60,18	60,18	108,82	$ 108,82	$ 208,00	208,00
0,00	$ -	$ 8,29	8,29	17,82	$ 17,82	$ 34,05	34,05
				0,00	$ -	$ -	0,00

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, el valor potencial del proyecto condicionado a los posibles cursos de acción es calculado en la etapa de diseño científico (*t*=*1* y *t*=*2*).

Tabla 7. Proceso recursivo etapa diseño experimental

Diseño experimental							
0				1			
U (.) (ec.9)	$PV(CE)_t = CE_t \times p(x) - I_t$	CE (ec.11)	EU (.) (ec.10)	U (.) (ec.9)	$PV(CE)_t = CE_t \times p(x) - I_t$	CE (ec.11)	EU (.) (ec.10)
26,91	$ 26,91	$ 32,26	32,26	59,70	$ 59,70	$ 104,60	104,60
				8,36	$ 8,36	$ 14,64	14,64

Fuente: elaboración propia.

El valor estratégico del proyecto asciende a $26,91 millones y en términos de utilidad también es de 26,91, ya que se supone un sujeto neutral al riesgo γ =0, similar resultado que se obtendría aplicando los conceptos de valoración neutral al riesgo. El valor de la opción real es la diferencia entre el valor estratégico menos valor actual del árbol de decisión; $RO = VE - VP = \$22{,}65 = \$26{,}91 - \$4{,}25$ (Trigeorgis, 1997).

Sensibilizar el valor del coeficiente de aversión al riesgo genera valuaciones individuales del proyecto según preferencias relativas a la asunción de riesgo. El coeficiente de aversión correspondiente a la función isoelástica puede asumir valores de $\gamma > 0$ adversos; $\gamma = 0$ neutral e $\gamma < 0$ afecto al riesgo. En la siguiente tabla, se exponen los resultados obtenidos[24]:

Tabla 8. Sensibilidad valor estratégico (VE); valor de la opción (RO) en función al coeficiente de aversión al riesgo (γ)

γ	***0***	***0,1***	***0,2***	***0,3***	***0,4***	***0,5***	***0,6***	***0,7***	***0,8***	***0,9***
VE	26,91	21,86	16,69	11,33	5,62	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
RO	22,66	17,61	12,43	7,08	1,36	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
γ	***-1***	***-0,9***	***-0,8***	***-0,7***	***-0,6***	***-0,5***	***-0,4***	***-0,3***	***-0,2***	***-0,1***
VE	74,2	69,7	65,1	60,4	55,8	51,1	46,3	41,6	36,7	31,9
RO	70,0	65,4	60,8	56,2	51,5	46,8	42,1	37,3	32,5	27,6

Fuente: elaboración propia.

El valor de la flexibilidad estratégica se diluye rápidamente en el caso de sujetos adversos al riesgo. Para $\gamma > 0{,}5$ el valor se torna cero y el comportamiento inverso se verifica para sujetos afectos al riesgo (tabla 8). A modo de ejemplo, si se trabaja con valores de gamma equivalentes a los generados por pruebas empíricas, por ejemplo $\gamma = 0{,}53$ (Andersen *et al.*, 2010), este proyecto no debería ser elegible para sujetos con dicho coeficiente de aversión. Situación diferente al valor que arroja trabajar el con concepto de neutralidad al riesgo $\gamma = 0$, cuya lógica indica aceptar el proyecto.

Si la opción se asimila a un seguro, a simple vista los resultados obtenidos en la tabla 8 son un tanto contradictorios, ya que para sujetos adversos al riesgo, el valor del seguro decrece a medida que aumenta el grado de aversión. Esto es propio de la mecánica del modelo, en donde los valores de utili-

[24] El enfoque de opciones reales supone un comportamiento neutral al riesgo consecuentemente la tasa de actualización refleja el valor tiempo del dinero y el riesgo es aplicado al flujo de fondos de la firma mediante los coeficientes equivalentes ciertos. En el caso de suponer grados alternativos de aversión la función de utilidad ajusta, según las preferencias del agente, el valor "neutral al riesgo" del enfoque de opciones, conforme surge de la tabla 8.

dades de la función isoelástica, desde *t=T* hasta *t=0* correspondientes a las magnitudes monetarias proyectadas, se reducen ante incrementos en el coeficiente de aversión al riesgo. Al incorporar la flexibilidad de abandono, donde en determinados nodos el valor del proyecto es nulo su utilidad con opciones tiene como piso un valor de cero. Esto es diferente al caso del proyecto sin flexibilidad estratégica, en donde la utilidad esperada es el producto de resultados positivos y negativos irreversibles a los que se enfrenta el sujeto[25].

5. Conclusiones

La teoría de opciones reales se constituye en un poderoso instrumento que permite valorar posibles caminos alternativos derivados propiamente de la evolución de la inversión como la dinámica del contexto. Su gran debilidad es la necesidad de mercados completos, supuesto que en la mayoría de los casos no se verifica, en particular para nuevos proyectos, estrategias e intangibles. La literatura ha desarrollado varias alternativas para valuar los riesgos *"privados"* derivados de la flexibilidad estratégica de la inversión. El presente trabajo concilia el enfoque de opciones reales y preferencias frente al riesgo del agente como mecanismo de valuación de inversiones en mercados incompletos, desde la perspectiva de las preferencias del agente considerado individualmente. Respecto de las preferencia, del variado repertorio de funciones de utilidad existentes en la literatura, el trabajo se emplea la isoelástica por cumplir con los atributos de $CARA < 0$ y $CRRA = 0$.

El mecanismo de valoración propuesto implica identificar la flexibilidad estratégica, su valor terminal y consecuentemente la utilidad correspondiente a cada nodo del árbol binomial. Seguidamente, para estimar el valor intrínseco se trabaja recursivamente con el fin de obtener los valores correspondientes a la utilidad esperada y su equivalente cierto. Conforme fue explicitado en el caso analizado, el método permite sensibilizar el valor del proyecto y sus opciones, en función del coeficiente de aversión al riesgo del agente, valorando desde la perspectiva individual y utilizando funciones de utilidad. De hecho, con grados crecientes de aversión al riesgo tanto el valor estratégico como

---

25 Con las opciones el valor positivo del seguro se manifiesta en el piso de cero, alertando al sujeto altamente adverso al riesgo con relación a los posibles resultados negativos.

las opciones contenidas se diluyen, llevando en el caso analizado al rechazo del proyecto. Dicha situación no se verifica en el supuesto de neutralidad frente al riesgo, donde, inversamente, el resultado es positivo. En situaciones de valuación de inversiones en proyectos gobernados por "*riesgos privados*", como el caso de empresas en mercados emergentes, en particular cerradas, estrategias, proyectos de inversión, desarrollos tecnológicos o intangibles producto de innovaciones, activos reales, donde los mercados son incompletos o donde no existen activos comparables al objeto de valoración, el método propuesto aporta un nexo entre la función de utilidad del agente, desde sus perspectivas individuales, y las cualidades del modelo binomial de opciones constituyéndose en una útil herramienta de apoyo para la toma de decisiones.

Trabajos citados

Allais, M. (1953). Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine. *Econometrica, 21*(4), 503-546.

Allais, M. (1988). An Outline of My Main Contributions to Economic Science. *Economic Sciences*, 233-252.

Amram, M. y Kulatilaka, N. (1998). *Real Options*. Boston, Masachussets: Harvard Business School Prees.

Andersen, S., Harrison, G., Lau, M. y Rutstrom, E. (2010). Preference heterogeneity in experiments: comparing field and laboratory. *Journal of Economics, Behaviour and Organization, 73*(2), 209-224.

Arrow, K. (1964). The Role of the Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing. *Review of Economics Studies, 31*(2), 91-96.

Arrow, K. (1971). *Essays in the Theory of Riesk Bearing.* Amsterdam: New Holland.

Bernoulli, D. (1954). Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk. *Econometrica, 22*(1), 23-36.

Black, F. y Scholes, M. (1972). The Valuation of Options Contracts and a Test of Market Efficiency. *Journal of Finance*, 399-418.

Black, F. y Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 637-659.

Boer, P. (2002). *The Real Options Solutions: Finding Total Value in a High-Risk World.* New York: John Wiley & Sons Inc.

Borison, A. (2003). *Real Options Analysis: Where are the Emperor´s Clothes?* Standford: Standford University.

Boyce, C., Wood, A., Bank, J., Clark, A. y Brown, G. (2014). Money, Well being and Loss Aversion: Does an income loss has a greather effect on well being than an income gain. *Center for Economics Performance* (39), 1-16. Recuperado el 15 de junio de 2016, de http://cep.lse.ac.uk/pubs/download/occasional/op039.pdf

Boyle, P. (1988). A lattice framework for option pricing with two state variables. *Journal of Finance and Quantitative Analysis, 23*, 1-12.

Brandao L. y Dyer S. (2005). Decision analysis and real options: A discrete time approach to real option valuation. *Annals of Operations Research, 135*(1), 21-39.

Brandao, L., Dyer, J. y Hahn, W. (2005). Using binomial decision trees to solve real-option valuation problems. *Decision Analysis, 2*, 69-88.

Brandao, L., Dyer, J. y Hahn,W. (2008). Response to comments on Brandao et al. (2005). *Decision Analysis* (2), 103-109.

Brennam, M. y Schwartz, E. (1985). Evaluating Natural Resources Investment. *Journal of Business* (58), 135-157.

Buckley, J. (1987). The fuzzy mathematics of finance. *Fuzzy Sets and Systems* (21), 257-273.

Carlsson, C. y Fuller, R. (2003). A Fuzzy Approach to Real Option Valuation. *Fuzzy Sets and Systems* (139), 315-326.

Carlsson, C., Fuller, R., Heikkila, M. y Majlender, P. (2007). A Fuzzy Approach to R&D Project Portfolio Selection. *Interntational Journal of Approximating Reasoning* (44), 93-105.

Chance, D. (2007). A Synthesis of Binomial Option Pricing Models for Lognormally Distributed Assets. *SSRN http://ssrn.com/abstract=1523548*, 1-25.

Collan, M., Fuller, R. y Mezei, J. (2009). Fuzzy Pay-Off Method for Real Option Valuation. *Journal of Applied Mathematics and Decision Systems, ID 238196*, 1-14.

Copeland, T. y Antikarov, V. (2001). *Real Options*. New York: Texere LLC.

Copeland, T. y Tufano, P. (2004). A Real World to Manage Real Options. *Harvard Business School Review* (82), 90-99.

Copeland, T., Weston, F. y Shastri, K. (2004). *Financial Theory and Corporate Policy* (4.ª ed.). Estados Unidos: Pearson Addison Wesley.

Cox, J., Ross, S. y Rubinstein, M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics, 7*, 229-263.

Debreu, G. (1959). *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium.* New Haven: Yale University Press.

Derman, E., Kani, I. y Chriss, N. (1996). Implied Trinomial Trees of the Volatility Smile (Goldman-Sachs, Ed.). *Quantitative strategies research notes*.

Dixit, A. y Pindyck, R. (1994): *Investment under Uncertainty* (1 ed.). New Jersey: Princeton University Press.

Dubois, D. y Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems.* New York: Academic Press.

Elton, D. y Gruber, M. (1995). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis* (5.ª ed.). New York: John Wiley & Sons.

Fama, E. y French, K. (1992). The Cross-Section of Expected Stock Returns. *The Journal of Finance, 47*(2), 427-465.

Fama, E. y French, K. (1996). Multifactor Explanation of Asset Pricing Anomalies. *The Journal of Finance, 51*(1), 55-84.

Fama, E. y French, K. (2004). The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. *Journal of Economics Perspectives, 18*(3), 25-46.

Friedman, M. y Savage, L. (1948). The Utility Analysis of Choices Involving Risk. *The Journal of Political Economy, 56*(4), 279-304.

Friend, I. y Blume, M. (1975). The Demand of Risky Assets. *American Economic Review, 65*(5), 900-922.

Garcia Sastre, M. y Roselló Miralles, M. (2007). La lógica borrosa para valorar la incertidumbre en la técnica de valoración de opciones reales (A. E. [AEDEM], Ed.). *DIALNET OAI Articles, http://dialnet.unirioja.es/servlet/oaiart?codigo=2499409*, 1-22.

Graeme, G. (2009). *Real Options in Theory and Practice (Financial Management Association Survey and Synthesis).* Oxford: Oxford University Press.

Harrison, G., Humphrey, S. y Verschoor, A. (2009). Choice under uncertainty: Evidence from Ethiopia, India and Uganda. *The Economic Journal, 120*(543), 80-104.

Harrison, G., Johnson E., McInnes, M. y Rutström, E. (2005). Individual choice and risk aversion in the laboratory: Comment. *American Economic Review, 95*(3), 897-901.

Harrison, G., Lau, M. y Rutstrom, E. (2007). Estimating risk attitudes in Denmark: a field experiment. *The Scandinavian Journal of Economics, 109*(2), 341-368.

Harrison, G., Lau, M., Rutstrom, E. y Tarazona Gómez, M. (2013). Preference over social risk. *Oxford Economics Paper, 65*(1), 25-46.

Henderson, V. y Hobson, D (2002). Real Options with Constant Relative Risk Aversion. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27(2), 329-355.

Hull, J. (2005). *Futures, Options and other Derivatives* (5.ª ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Ingersoll, J. y Ross, S. (1992). Waiting to Invest: Investment and Uncertainty. *Journal of Business* (65), 1-29.

Jabbour, G., Kramin, M. y Young, S. (2001). Two-state Option Pricing: Binomial Models Revisited. *Journal of Futures Markets, 21*, 987-1001.

Jarrow, R. y Rudd, A. (1982): Aproximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics, 10*, 347-369.

Kahneman, D., y Tversky, A. (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk. *Econometrica, 47*(2), 263-292.

Kamrad, B. y Ritchken, P. (1991). Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables. *Management Science, 37*(12), 1640-1653.

Keema, A. (1988). *Options in Real and Financial Markets.* Working Paper Ph.D diss, Erasmus University, Finance, Erasmus.

Keeney, R. y Raiffa H. (1976, 1993). *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs* (1.ª ed.). United Kingdom: Cambridge University Press.

Kodukula, P. y Chandra, P. (2006): *Project Valuation using Real Options: A practiioner´s guide.* USA: J Ross Publishing.

Kulatilaka, N. y Trigeorgis, L. (1994). The General Flexibility To Swicht: Real Options Revisited. *International Journal of Finance* (2), 123-145.

Kulatilaka, N. (1988). Valuing the Flexibility of Flexible Manufacturing Systems. *IEEE Transactions in Engineering Management* (22), 250-257.

Liao, S. y Ho, S. (2010). Investment Project Valuation based on a Fuzzy Bionomial Approach. *Information Sciences* (180), 2124-2133.

Ljungqvist, L. y Sargent, T. (2000). *Recursive Macroeconomic Theory.* Massachussetts: MIT press.

Margrabe, W. (1978). The Value of an Option to Exchange one Asset for Another. *Journal of Finance* (33), 177-186.

Markowitz, H. (2014). Mean-variance approximations to expected utility. *European Journal of Operational Research (234),* 346-355.
Markowitz, H. (1991). Foundations of Portfolio Theory. *Journal of Finance, 46(2),* 469-477.
Markowitz, H. (1952a). Portfolio Selection. *Journal of Finance, 7(1),* 77-91.
Markowitz, H. (1952b). The Utility of Wealth. *Journal of Political Economy, 60*(2), 151-158.
Mason, S. y Merton, R. (1985). The Role of Contingent Claims Analysis in Corporate Finance. En VV. AA., *Recent Advances in Corporate Finance.* New York: Homewood Irwin.
Mc Donal, R. y Siegel, J. (1986). Investment and the Valuation of Firms when here is an Option to Shut Down. *International Economic Review* (26), 321-349.
Merton, R. (1973). The Theory of Rational Options Princing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 141-183.
Merton, R. (1992). *Continuous-Time Finance.* Wiley-Blakwell.
Milanesi, G. (2013). El modelo binomial borroso y la valuación de opciones reales: el caso de valuación de un contrato de concesión para la explotación petrolera. *Estocástica: Finanzas y Riesgo, 3*(2), 95-118.
Milanesi, G. (2014). Valoración probabilística versus borrosa, opciones reales y el modelo binomial: Aplicación para proyectos de inversión en condiciones de ambigüedad. *Estudios Gerenciales* (30), 211-219.
Milanesi, G. (2015). Modelo Binomial Borroso, el Valor del Firma Apalancada y los efectos de la Deuda. *Estocástica, 5*(1), 9-43.
Milanesi, G. y El Alabi E. (2016). Evolución de las Funciones de Utilidad para la toma de decisiones. *Escritos Contables y de Administración, 5*(2), 43-79.
Mun, J. (2004). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions*. New York: Wiley.
Muzzioli, S. y Torricelli, A. (2004). A Multiperiod Binomial Model for Pricing Options in a Vague World. *Journal of Economics and Dynamics Control* (28), 861-867.
Myers, S. y Majd, S. (1990). Abandonment Value and Project Life. *Advances in Futures and Options Research* (4), 1-21.
Myers, S. (1977). Determinants of Corporate Borrowing. *Journal of Financial Economics* (5), 147-176.

Num, J. (2015). *Real Options Analysis (Third Edition): Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions with Integrated Risk Management and Advanced Quantitative Decision Analytics* (3.ª ed.). CreateSpace Independent Publishing Platform.

Ochoa, C. y Vasseur, J. (2014). Valoración de Opciones Reales a través de Equivalentes a Certeza. Ecos de Economía (*18*) 39, 49-72.

Paddock, J., Siegel, D. y Smith, J. (1988). Option Valuation of Claims on Physical Assets: The Case of Offshore Petroleum Lease. *Quaterly Journal of Economics* (103), 479-508.

Pratt, J. (1964). Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica, 32*(1/2), 122-136.

Rabin, M. (2000). Risk aversion and Expected Utility Theory: a calibration theorem. *Econometrica, 68*, 1281-1292.

Rendleman, R. y Bartter, B. (1979). Two-state Option Pricing. *Journal of Finance* (34), 1092-1110.

Salahaldin, L. (2016). *Real Options as a Tool for Value Creation: Evidence from Sustainable Development and Information Technology Sectors.* Wiley-ISTE.

Savage, L. J. (1954). *The Foundations of Statistics.* Nueva York: John Wiley & Sons.

Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Price. A theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance, 19*(3), 425-442.

Shefrin, H. (2010). *Behavioralizing Finance.* Leavey School of Business, SCU Leavey School of Business. Virginia: Santa Clara University.

Shefrin, H. y Statman, M. (1985). The Disposition to Sell Winner Too Early and Ride Losers Too Long: Theory and Evidence. *The Journal of Finance, 40*(3), 777-790.

Shefrin, H. y Statman, M. (2000). Behavioral Portfolio Theory. *Journal of Finance and Quantitative Analysis, 35*(2), 127-151.

Shiller, R. (2005). *Irrational Exuberance.* Princeton: Princeton University Press.

Shine Yu, S. y Ming, H., Li, Y. y Chen Y. (2011). A novel option pricing model via fuzzy binomial decision tree. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 7*(2), 709-718.

Shockley, R. (2006). *An Applied Course in Real Options Valuation.* Thomson South-Western Finance.

Simon, H. A. (1955). A Behavioral Model of Rational Choice. *The Quarterly Journal of Economics, 69*(1), 99-118.

Simon, H. A. (1979). Rational Decision Making in Business Organizations. *The American Economic Review, 69*(4), 493-513.

Smit, H. (1996). The Valuating of Offshore Concessions in the Netherlands. *Financial Management* (26), 5-17.

Smit, H. y Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games*. New Jersey, Estados Unidos: Princeton University Press.

Smith, J. (2005). Alternative approaches for solving real-options problems. *Decision Analysis, 2*(2), 89-102.

Smith, J. y Nau, R. (1995). Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Anaysis. *Management Science* (5), 795-816.

Suen, R. (2009). Bounding the CRRA Utility Functions. *Munich Personal RePec Archive, https://mpra.ub.uni-muenchen.de/13260/1/Bound_CRRA.pdf*, 1-16.

Thaler, R. (1985). Mental Accounting and Consumer Choice. *Marketing Science, 4*(3), 199-214.

Thaler, R. y Johnson, E. (1990). Gambling with the House Money and Trying to Break Even: The Effects of Prior Outcomes on Risky Choice. *Management Science, 36*(6).

Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Toward Risk. *The Review of Economic Studies. 5*(2).

Trigeorgis, L. y Mason, S. (1987). Valuing Managerial Flexibility. *Midland Corporate Finance, 5*, 14-21.

Trigeorgis, L. (1988). A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting. *Advances in Futures and Options Research* (4), 145-167.

Trigeorgis, L. (1993). Real Options and Interactions with Financial Flexibility. *Financial Management* (22), 202-224.

Trigeorgis, L. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations* (2.ª ed.). Cambridge: MIT Press.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science, 185*(4157), 1124-1131.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1981). The Framing of Decisions and the Psychology of Choice. *Science, 211*(4481), 453-458.

Van der Hoek, J. y Elliot, R. (2006). *Binomial models in Finance.* New York: Springer Science.

Vasseaur, J. y Cadavid Pérez, C. (2016). *Valoración de Patentes Estratégicas a través de Opciones Reales: equivalente a certeza y funciones de utilidad.* Contaduría y Administración, 61, 794-814.

Vendrik, M. y Woltjes, G. (2007). Happiness and loss aversion: is utility concave or convex in relative income. *Journal of Public Economics, 91*, 1423-1448.

Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Wakker, P. (2008). Explaining the Characteristics of the Power (CRRA) Utility Family. *Health Economics, 17*, 1329-1344.

Wang, A. y Halal, W. (2010). Comparision of Real Asset Valuation Models: A Literature Review. *International Journal of Business and Management* (5), 14-24.

Whaley, R. (2006). *Derivatives, Markets, Valuation and Risk Management.* New Jersey: John Wiley & Sons.

Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance* (2.ª ed.). United Kingdom: John Wiley & Sons.

Wilmott, P., Howison, S. y Dewynne, J. (1995). *The Mathematics of Financial Deivatives.* USA: Cambridge University Press.

Yoshida, Y., Yasuda, M., Nakagami, J. y Kurano, M. (2006). A New Evaluation of Mean Value for Fuzzy Numbers and its Application to American Options under Uncertainty. *Fuzzy Sets and Systems* (157), 2614-2626.

Zdnek, Z. (2010). Generalised Soft Binomial American Real Option Pricing Model. *European Journal of Operational Research* (207), 1096-1103.