

# Modelo dinámico para estimar la estructura óptima de capital para una PYME minera

\* ESE, IPN

fvenegas1111@yahoo.  
com.mx  
salvador.ake22@gmail.  
com

\*\* Fideicomiso

de Fomento Minero  
jsegovia@ffomi.gob.mx

**Francisco Venegas Martínez\***

angel.damian@icbuap.buap.mx

**Salvador Cruz Aké\***

bramirez@colpos.mx

**Juan Segovia Aldape\*\***

bramirez@colpos.mx

## RESUMEN

Este trabajo replantea el concepto de estructura óptima de capital para las pequeñas y medianas empresas del sector minero (PYMES mineras) a través del uso de la optimización dinámica estocástica. Se encuentra, bajo los supuestos de una estructura plana de la tasa de interés, mercados perfectos y normalidad de la fuente de riesgo, que se cumple la «irrelevancia de la estructura de capital» propuesta por Modigliani y Miller. También se muestra en forma empírica el impacto sobre el empleo del uso del crédito y la inclinación de las empresas por créditos de mayores montos conforme el plazo aumenta, lo que habla de una preferencia empírica por una estructura de capital. Se demuestra que dicha preferencia es ajena al proceso de optimización, con lo que se asume que es causada por imperfecciones del mercado. Para ello, el valor de los activos de la empresa es tratado como el subyacente de una opción real y la PYME minera es vista como un portafolio de inversión integrado por dos opciones reales (de expansión y de abandono) y dos bonos a tasa fija (de corto y largo plazos). En este marco se desarrolla una estrategia para administrar el riesgo de incumplimiento de obligaciones con los acreedores de la PYME minera a través de coberturas delta y un esquema de intercambio del pago de intereses por opciones.

Clasificación JEL: G31, G32.

**Palabras clave:** Opciones reales, estructura óptima de capital, valuación de empresas, cobertura de deuda.

---

Fecha de recepción:

5 de septiembre

Fecha de aprobación:

21 de octubre

## 1. Introducción

El crecimiento económico y el desarrollo regional están vinculados con la creación y el mantenimiento de las llamadas micro, pequeñas y medianas empresas, las cuales participan ampliamente en la generación de empleo y en la producción de muchos y muy diversos bienes y servicios. Por lo anterior, se considera a estas empresas como uno de los pilares de la actividad económica. No obstante, también se observa que estas empresas son vulnerables ante cambios drásticos del entorno financiero, por lo que es imprescindible generar los instrumentos necesarios para que estas empresas se cubran y se desenvuelvan en un ambiente más propicio en donde se asegure su perdurabilidad con mayores niveles de competitividad y productividad. Como consecuencia de lo anterior y con el objeto de fomentar no sólo la creación de PYMES, sino también su consolidación a través del tiempo, se emitió en 2002 un decreto por medio del cual se sentaron las bases para la planeación y ejecución de las actividades encaminadas al desarrollo de las micro, pequeñas y medianas empresas, con base en: 1) una cultura empresarial, 2) el acceso al financiamiento, 3) la innovación tecnológica y 4) la creación de cadenas productivas.

De acuerdo con la Ley para el Desarrollo de la Competitividad de la Micro, Pequeña y Mediana Empresa, publicado en el Diario Oficial de la Federación el 30 de diciembre de 2002, el criterio para determinar el tamaño de una empresa es el número de empleados con que cuenta, haciendo una diferenciación entre las empresas de los sectores de manufacturas, servicios y comercio.

Clasificación de empresas por tamaño				
Tipo de empresa/ No. empleados	Micro	Pequeña	Mediana	Grande
Manufactura	0-10	11-50	51-250	Más de 250
Servicios	0-10	11-50	51-100	Más de 100
Comercio	0-10	11-30	31-100	Más de 100

Fuente: DOF, 30 diciembre de 2002.

La clasificación anterior incluye productores agrícolas, ganaderos, forestales, pescadores, acuicultores, artesanos y de bienes culturales, así como prestadores de servicios turísticos y culturales. Con base en esta clasificación, se estima que en 2006 existían en México poco más de 4 millones de empresas, de las cuales el 99.7% son micro y pequeñas empresas, con una participación en el empleo y el PIB, respectivamente, del 67% (personal ocupado) y 57% (PIB).

Universo empresarial en México			
Empresa	% Unidad económica	Personal ocupado%	% PIB
Micro	97	47	31
Pequeña	2.7	20	26
Mediana	0.2	11	12
Grande	0.1	22	31

Fuente: Secretaría de Economía, Diagnóstico de las Micro, Pequeñas y Medianas Empresas, 2007

Las microempresas son las que predominan dentro del total de empresas, se observa una mayor proporción en el sector servicios (98.1%) y un poco menor en el sector industrial (94.1%). Mientras que la mayor participación de las pequeñas empresas se da en los sectores comercial e industrial.

Para el caso del sector minero, la clasificación de PYMES es diferente a la utilizada en la Ley para el Desarrollo de la Competitividad de las PYMES. De acuerdo con el artículo 9 del Reglamento de la Ley Minera (publicado en el DOF el 15 de febrero de 1999), se considera pequeño o mediano minero a quien, respectivamente, satisfaga cualquiera de las características siguientes:

- I. Obtenga ingresos brutos por ventas anuales de minerales o sustancias sujetos a la aplicación de la Ley inferiores a cinco mil o veinte mil veces el salario mínimo general vigente en el Distrito Federal elevado al año;
- II. Extraiga mensualmente hasta tres mil o doce mil toneladas de mineral, o
- III. Aporte hasta el 1.0 o 4.0% de la producción nacional anual del mineral o sustancia de que se trate.

## 2. Importancia del crédito en las PYMES mineras

Una vez establecido el concepto de PYME minera bajo las normas establecidas por el gobierno federal mexicano, es posible evaluar el impacto que factores como la tasa de interés y el plazo tienen sobre los créditos solicitados por las empresas, así como el impacto de estos créditos en la generación de empleos. Es decir, se desea mostrar, con base en un estudio empírico y teórico la importancia del crédito en las PYMES mineras.

La muestra de créditos a PYMES mineras para el análisis fue obtenida del FIFOMI (Fideicomiso de Fomento Minero) ocultando cualquier posible referencia a los acreditados y dejando sólo información estadística anónima. Esta muestra consta de cincuenta y siete créditos otorgados por este organismo a pequeñas y medianas empresas entre octubre de 2005 y Agosto de 2008.

La primera relación examinada fue la del número de empleos

generados por las PYMES mineras en función del monto del crédito otorgado, del cuadrado del monto del crédito, el plazo y la sobretasa. Uno de los resultados encontrados es que sólo el monto del crédito es significativo (incluso se aprecian posibles rendimientos cuadráticos) para las PYMES mineras.

El hecho de que el parámetro asociado a la sobretasa sea estadísticamente igual a cero puede ser explicado por la poca variación presente en las sobretasas dentro de la muestra, mientras que la inexistencia de rendimientos cuadráticos puede ser discutida, pues aunque son significativos en una regresión hecha por MCO, su presencia vuelve no significativa a la constante.

Fuente	Suma de cuadrados	G. de libertad	Error medio	Número de obs.	=	57
Modelo	19142.899	4	49035.7233	F(4,52)	=	7.96
Residuales	320203.142	52	6175.75273	Prob. > F	=	0.0000
Total	516246.035	56	9220.46491	R-cuadrado	=	.3222
				Raz. de EMC	=	78.471

Emptot	C. coeficiente	Error estándar	T	P >  z	Intervalo de confianza del 95%
credmill	34.41762	6.587081	5.23	0.000	21.19967 47.63556
credmill 2	-1.456253	.3244831	-4.35	0.000	-2.127442 -.7850635
sobretasa	1.785406	55.04547	.03	.974	-108.6714 112.2422
días	-.0104603	.0324963	-.32	.749	-.075673 .0547523
_const	24.48911	194.8848	.13	.900	-366.5759 415.5541

Regresión 1:  $\text{empleo total}_i = \beta_1 (\text{crédito millones})_i + \beta_2 (\text{crédito millones})_i^2 + \beta_3 (\text{sobretasa})_i + \beta_4 (\text{días})_i + \epsilon_i$

Por otra parte, el hecho que el parámetro asociado al plazo resulta estadísticamente no significativo puede deberse a la posibilidad de refinanciar, *i. e.* «roll over» los créditos o bien a la poca variabilidad dentro de la muestra.

Una vez desechadas las variables no significativas y determinados los parámetros significativos para el monto del crédito y su cuadrado, aunque no para la constante, se realizó la prueba de heteroscedasticidad diseñada por Breusch y Pagan (1980), en la cual se rechaza la hipótesis nula de homoscedasticidad. Esto se ve en la siguiente regresión:

Fuente	Suma de cuadrados	G. de libertad	Error medio	Número de obs.	=	57
Modelo	195288.869	2	97644.4344	F(2,54)	=	16.42
Residuales	321057.166	54	5945.90308	Prob. > F	=	0.0000
Total	516246.035	56	9220.46491	R-cuadrado	=	.3782
				Raz. de EMC	=	77.107

Emptot	C. coeficiente	Error estándar	T	P >  z	Intervalo de confianza del 95%
credmill	33.77408	6.225018	5.43	0.000	21.29367 46.25449
credmill 2	-1.436447	.3189831	-4.50	0.000	-2.075969 -.796924
_const	14.98721	16.2684	.92	.361	-17.62897 47.60938

Prueba de heteroscedasticidad de Breusch-Pagan / Cook - Weisberg

H0: Varianza Constante  
Variables:  $\hat{y}$  y los ajustados de  $\text{emptot}$   
Chi(1) = 13.73  
Probabilidad > chi2 = .0001

Regresión 2:  $\text{empleo total}_i = \beta_1 (\text{crédito millones})_i + \beta_2 (\text{crédito millones})_i^2 + \epsilon_i$

Prueba para homoscedasticidad de Breusch-Pagan

**MODELO DINÁMICO PARA ESTIMAR LA ESTRUCTURA ÓPTIMA DE CAPITAL PARA UNA PYME MINERA**

Para corregir el modelo se hizo una regresión a través de mínimos cuadrados ponderados en la que se elimina la constante por ser no significativa. Esta eliminación es teóricamente correcta pues no se crearía ningún empleo si no se tiene el préstamo necesario para el proyecto de expansión.

A través de la regresión anterior se establece la importancia del monto del préstamo en la generación de empleos dentro de las PYMES mineras, así como los rendimientos cuadráticos en la misma. Dados los signos de los parámetros, se tiene una importancia creciente a tasas crecientes del crédito en la generación de empleos, lo que refleja una industria intensiva en capital y con economías a escala. Los resultados son los siguientes:

Regresión de mínimos cuadrados ponderados por varianza				Número de obs. = 57	
Bondad de ajuste $Chi^2(2)$	=	13.65	$Chi^2(2)$ de modelo	=	1264.39
Probabilidad > $Chi^2$	=	0.0011	Prob. > $Chi^2$	=	0.0000
Emplojo	Coefficiente	Error estándar	t	P >  t	Intervalo de confianza 95%
credmill	14.27117	1.427312	10.00	0.000	11.47369 - 17.06865
credmill 2	3.327154	1.307151	2.55	0.011	.7651857 - 5.889123

Regresión 3: empleo total / crédito millones =  $\beta_1 (1 / \text{crédito millones}) + \beta_2 (\text{crédito millones})^2 / \text{crédito millones} + \epsilon$

Consecuentemente, la relación a analizar es el monto de crédito como función de la sobretasa y el plazo medido en días. En la muestra se encuentra, tal vez, por la poca variabilidad en las sobretasas, que estas sobretasas no son estadísticamente significativas, lo cual puede apreciarse en la siguiente regresión:

Fuente	Suma de Cuadrados	G. de libertad	Error medio	Número de obs. = 57	
Modelo	237.708833	2	118.854417	F(2,54)	= 5.58
Residuales	1150.68838	54	21.3127514	Prob. > F	= 0.0063
Total	1388.59741	56	24.7963823	R-cuadrado	= .1712
				R-cuadrado ajustado	= .1405
				Ratz de E MC	4.6166
credmill	Coefficiente	Error estándar	t	P >  t	Intervalo de confianza del 95%
días	.0057495	.0017422	3.30	0.002	.0022565 - .0092425
sobretasa	5.45636	3.088735	1.77	0.083	-.7361815 - 11.6489
_const	-21.94082	10.80893	-2.03	.047	-43.61142 - -.2702235

Regresión 4: crédito millones =  $\beta_1 (\text{días}) + \beta_2 (\text{sobretasa}) + \epsilon$

Una vez desechada la sobretasa como variable explicativa, se hace un análisis a través de MCO y posteriormente se realiza una prueba de heteroscedasticidad, la cual resulta en el rechazo de la hipótesis nula de varianza constante. Esto se puede observar en la siguiente regresión.

Fuente	S de Cuadrados	G. de libertad	Error Medio	Número de Obs. = 57	
Modelo	171.19926	1	171.19926	F(1,54)	= 7.73
Residuales	1217.39815	55	22.1345118	Prob. > F	= 0.0074
Total	1388.59741	56	24.7963823	R-cuadrado	= 0.1233
				R-cuadrado ajustado	= 0.1073
				Ratz de E MC	4.7047
credmill	Coefficiente	Error estándar	t	P >  t	[95% Intervalo de Confianza]
días	.004542	.0016332	2.78	0.007	.0012691 - .007815
_const	-3.414818	2.667552	-1.28	0.206	-8.760712 - 1.921075

Regresión 5: crédito millones =  $\beta_1 (\text{días}) + \epsilon$

Prueba para homocedasticidad de Breusch-Pagan

Una vez corregido el problema de la heteroscedasticidad, se puede apreciar que el monto del crédito es sensible al plazo al que se otorga, aunque existe un componente autónomo del crédito solicitado, el cual es representado por la constante. Este monto autónomo puede ser visto como la cantidad de crédito mínima necesaria para mantener el negocio funcionando. Este hecho puede ser apreciado en la siguiente regresión:

Regresión de mínimos cuadrados ponderados por varianzas						Número de obs.	=	57		
Bondad de ajuste $R^2$ (2)						=	5.335	$\chi^2$ (2) de modelo	=	9.46
Probabilidad > $\chi^2$						=	0.1494	Prob. > $\chi^2$	=	0.0021
coeficiente	Coefficiente	Error estándar	Z	P >  z	Intervalo de confianza del 95%					
dias	.0033061	.0010751	3.08	0.002	.0011989	.0054132				
_cons	-2.567579	1.260673	-2.04	0.042	-5.038453	-.0967045				

Regresión ó: crédito mill / días =  $-1$  (1 / días) +  $z + 1$

A lo largo de esta sección, se ha establecido, de forma empírica, la importancia del crédito en la generación de empleo en las PYMES mineras, además de destacar la relación existente entre el monto de crédito solicitado y el plazo al cual se otorga el mismo. También se vio que la sobretasa no resulta relevante para el monto de crédito solicitado, este hecho puede deberse a la poca variabilidad de los datos de la muestra, o a que las empresas, de forma natural por la capacidad de refinanciamiento, desestiman la sobretasa cuando ésta es suficientemente pequeña.

En las siguientes secciones, se verificará la «irrelevancia de la estructura de capital» propuesta por Modigliani y Miller (1958) bajo los siguientes supuestos: las empresas pueden en el largo plazo refinanciarse continuamente, la fuente de riesgo se distribuye de forma normal, la estructura de plazo de la tasa de interés es plana y los mercados son fuertemente eficientes.

### 3. Valuación de PYMES usando flujos de efectivo descontados

En junio de 1958, Franco Modigliani y Merton Miller revolucionaron el mundo de las finanzas corporativas con su artículo seminal «The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment», publicado en el «American Economic Review». En este artículo, los autores establecen que el valor de la firma no cambia independientemente de la forma en que se financien sus actividades, *i. e.* el valor de la firma desapalancada es el mismo que el de la firma apalancada,  $V_L = V_U$ , siempre y cuando la empresa se encuentre en un entorno carente de impuestos, costos de quiebra y asimetrías de información. A este principio se le conoce como principio de «la irrelevancia de la estructura de capital».

Aunque en artículos posteriores Modigliani y Miller (1958) fueron simplificando sus supuestos iniciales proporcionando mayor relevancia a la estructura de capital a través de elementos como el «escudo fiscal».

La revolución causada por el principio de la irrelevancia de la estructura de capital dio rienda suelta al apalancamiento de las empresas, dejando para después el control del riesgo como elemento de valor de la misma. Varios años después, en 1964, el cuerpo teórico de las finanzas corporativas fue enriquecido con la aparición del «Capital Asset Pricing Model», propuesto de forma independiente por Jack Treynor (1962), William Sharpe (1964), John Lintner (1965) y Jan Mossin (1966). En dicho planteamiento el rendimiento esperado de un activo está dado por la ecuación de la línea de mercado<sup>1</sup>, la cual tiene como intercepto la tasa libre de riesgo crédito, como pendiente la  $\beta$  del activo y como puntos en el eje de las abscisas el diferencial entre el rendimiento del mercado y el activo libre de riesgo, también llamado «premio al riesgo de mercado», esto es:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i [E(R_m) - R_f]$$

El CAPM permite incorporar la noción de riesgo de mercado no diversificable a la valuación de activos al descontar los flujos derivados de la actividad de la empresa con la tasa adecuada, v. g. los flujos de efectivo antes de intereses e impuestos serían descontados con la tasa esperada resultado del CAPM, mientras que los flujos operativos (después de intereses e impuestos) serían valuados usando la tasa ponderada de costo de capital, WACC, que a su vez pondera la tasa del CAPM con la de la deuda, en función a la estructura de capital.

Dada la metodología anterior, es posible valorar los flujos de un proyecto,  $f_i, i = 1, 2, \dots, n$ , utilizando el método de flujos de efectivo descontados (DCF, por sus siglas en inglés), el cual consiste básicamente en obtener un estimado de los flujos futuros del proyecto, con base en los estados financieros pro-forma y algunos supuestos sobre el comportamiento del negocio. Una vez obtenidos estos flujos (el flujo de efectivo en el tiempo cero representa la inversión inicial en la empresa) son descontados con la tasa correcta,  $r$ , dada la naturaleza de los mismos. Esto es,

$$V_L = \sum_{i=0}^n f_i (1+r)^{-i} \quad (1)$$

La elección de la tasa correcta es uno de los puntos delicados de la técnica de flujos de efectivo descontados, pues puede subestimar (sobrestimar) el valor del proyecto si se elige una tasa mayor (menor) a la asociada con los flujos de efectivo que se usaron. Para ahondar en el tema, imagine que se realiza la estimación de los flujos de efectivo después de impuestos, que no toman en cuenta el costo del capital, y son descontados usando la WACC, que toma en cuenta el costo de

<sup>1</sup>Véase el modelo de Markowitz (1970) con un activo libre de riesgo crédito.

capital. Por lo general, la WACC sería menor que la tasa requerida por el CAPM, que supone un financiamiento con base en capital puro, una vez desapalancada. Este cambio en tasas llevará a una sobreestimación del valor de los flujos.

Una vez desarrollado el análisis de la PYME minera haciendo uso de la técnica de DCF (ecuación (1)) se ha incorporado el riesgo de mercado a la valuación de la empresa a través del CAPM y el efecto de los impuestos incorporando el «escudo fiscal». Sin embargo, se deja de lado el valor que la flexibilidad de decisión y las oportunidades representan para una empresa nascente. Este valor es recogido por las opciones reales usadas como complemento de la técnica del DCF.

#### 4. Aspectos relevantes de las opciones reales

El término de «opciones reales» fue acuñado por el profesor Stewart Mayers del MIT, Sloan School of Management, alrededor de 1977. El concepto básico detrás de esta técnica es la aplicación de la tecnología de opciones financieras, desarrollada por Black y Scholes (1973) y Merton (1973a), a un proyecto cuya realización depende del desarrollo (incierto) del proyecto principal (véase también Copeland y Antikarov (2001) y Copeland, Koller y Murrin (1991).

A continuación se hará un breve esbozo de la naturaleza de las opciones reales haciendo una analogía con las opciones financieras. Aclarando que, por su naturaleza, una opción real es similar a una opción americana, pues los proyectos son ejecutables en cualquier punto en el tiempo, no sólo al final del periodo de valuación (véase Bhattacharya, 1978). Por lo tanto, el uso de opciones europeas es una mera aproximación del valor del proyecto secundario al no tomar en cuenta el valor de la ejecutabilidad inmediata (véase, también, Dixit y Pindyck (1994), (1995) y (2000), Dixit (1993a) y (1993b), Angelis (2000), Kaslow y Pindyck (1994), Kulatilaka (1995), Gardner y Zhuang (2000) y Bell (1995).

En el caso de una opción europea su valor está dado por el valor presente del valor esperado condicionado a la información disponible al tiempo  $t$ ,  $F_t$ , de la función de pago evaluada en el tiempo  $T$ , es decir:  $E[(S_T - K)e^{-r(T-t)} | F_t]$ . Si se toma una aproximación al valor de la opción real,  $P$  (opción americana por naturaleza), con una opción europea, se tiene que el valor del subyacente al momento de la compra de la opción,  $S_t$  es el valor del proyecto que se encuentra en operación,  $V$ . Mientras que el precio de ejercicio,  $K$ , está dado por la inversión,  $D$ , necesaria para arrancar el proyecto complementario (ampliación o abandono son los casos más frecuentes entre las PYMES mineras). Siguiendo con la analogía, la tasa de dividendos pagados por el subyacente,  $y$ , representa los flujos del nuevo proyecto,  $d$ , como proporción del proyecto en funcionamiento, a la vez que la volatilidad del subyacente,  $\sigma$ , representa la volatilidad del proyecto,



$\sigma_P$ . Por último, se toma como tiempo para expiración de la opción  $T-t$ , al tiempo de fenecimiento de la oportunidad de inversión, y  $r$  es la tasa libre de riesgo.

### 5. Ecuación diferencial parcial que satisface una opción real

De acuerdo con la notación de la sección anterior, se obtendrá la ecuación diferencial parcial que deberá satisfacer, al igual que cualquier derivado, la opción real. El desarrollo inicia con la ecuación diferencial estocástica que siguen los rendimientos tanto del proyecto en funcionamiento, como del proyecto secundario, a saber:

$$\begin{aligned} dV_t &= (\mu_v dt + \sigma_v dW_t) V_t \\ dP(V_t, t) &= \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial V_t} dV_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial V_t^2} dV_t^2 \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $W_t \sim N(0, t)$ . Después de llevar a cabo las sustituciones correspondientes de la ecuación diferencial estocástica del rendimiento del proyecto,  $dV_t$ , en la ecuación diferencial del rendimiento del proyecto secundario, y aplicando las reglas básicas del cálculo estocástico (véase Lamberton y Lapeyre (1996), Gikhman y Skorokhod (2003) y Mikosch (1998), se tiene que:

$$dP(V_t, t) = \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial V_t} \mu_v V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial V_t^2} \sigma_v^2 V_t^2 \right) dt + \frac{\partial P}{\partial V_t} \sigma_v V_t dW_t. \quad (3)$$

Ahora suponga que se construye un portafolio de inversiones,  $\Pi_t$  que se compone del proyecto en funcionamiento,  $V_t$ , y una opción de expansión del mismo proyecto que es representado por el proyecto secundario (expansión),  $P$ . En este caso,  $\Pi_t = \omega_1 V_t + \omega_2 P_t$ . Si se busca el cambio marginal en el valor de este portafolio, suponiendo que los ponderadores  $\omega_i$ ; no son alterados, se encuentra que el diferencial en el valor del portafolio, obtenido mediante la sustitución de los diferenciales de cada proyecto, está dado por:

$$d\Pi_t = \left( \mu_v V_t \omega_1 + \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial V_t} \mu_v V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial V_t^2} \sigma_v^2 V_t^2 \right) \omega_2 \right) dt + \left( \omega_1 + \omega_2 \frac{\partial P}{\partial V_t} \right) \sigma_v V_t dW_t \quad (4)$$

Dado que se desea eliminar el riesgo de este portafolio, se desea que la parte estocástica del mismo sea anulada. Esto se consigue cuando  $\omega_1 + \omega_2 (\partial P / \partial V_t) = 0$ , lo que se logra si los ponderadores son  $\omega_1 = -\partial P / \partial V_t$  y  $\omega_2 = 1$ , en cuyo caso, se tiene que

$$d\Pi_t = \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial V_t^2} \sigma_v^2 V_t^2 \right) dt \quad (5)$$

Por otro lado, dado el supuesto de no arbitraje y, por lo tanto, la completitud del mercado, se puede obtener del sistema bancario una tasa libre de riesgo,  $r$ , para un depósito por un monto equivalente al portafolio,  $\Pi_t$ . Si se busca el rendimiento marginal de esta inversión, es posible observar que éste asciende a:

$$d\Pi_t = \left( -\frac{\partial P}{\partial V_t} V_t + P \right) r dt. \quad (6)$$

Después de igualar las ecuaciones (5) y (6) para obtener la ecuación diferencial parcial que debe cumplir cualquier derivado (incluidas las opciones reales, véase, al respecto, Abel (1983), se obtiene que

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial V_t^2} \sigma_v^2 V_t^2 + r \frac{\partial P}{\partial V_t} V_t + Pr = 0 \quad (7)$$

La solución de esta ecuación diferencial parcial de segundo orden es la conocida fórmula de Black y Scholes (1973) para valuar una opción europea. En el caso de la opción real de expansión, se supone que se posee una opción europea de compra para aproximar el valor de la opción real. Mientras que para la opción de abandono, se supone que también se posee una opción de venta europea. La lógica detrás de esta afirmación se explica a continuación.

## 6. La PYME minera vista como un portafolio de bonos y opciones

Hasta el momento, se ha tratado a la PYME minera como un proyecto inflexible cuyo valor depende únicamente de sus flujos esperados de efectivo. Si se toma en cuenta la flexibilidad que tiene la empresa para expandir o cerrar el negocio, además de los pagos que continuamente se hacen a distintos acreedores, la empresa se puede ver como un portafolio de inversión. Este portafolio consta de una posición larga en el activo subyacente (el proyecto original, del cual se es dueño), una posición corta (se hacen pagos de intereses y capital a un tercero) en un bono a tasa fija,  $r_d$ , que representa los pagos destinados a cubrir deudas de largo plazo<sup>2</sup>, una posición corta (también se adeuda este instrumento) en otro bono a tasa fija y libre de riesgo crédito,  $r$ , que representa los pagos hechos a proveedores y otras erogaciones.

En cuanto a las opciones, se iniciará el análisis suponiendo que el negocio resultó exitoso y, en este momento,  $t$ , es posible pensar en una expansión. Si el negocio se expande, se obtendrá un flujo de

<sup>2</sup> En la literatura de finanzas corporativas, sólo las deudas a largo plazo son consideradas como parte de la elección de estructura de capital que hace la firma.

efectivo futuro mayor al actual,  $V_t$  adicional al proyecto original, que será el valor del subyacente en  $T$ . A este flujo adicional, se puede acceder mediante una inversión,  $D$ , que hace las veces de un precio de ejercicio. En el caso de que la expansión no funcione, no se obtendría beneficio alguno de la inversión. Estas condiciones se pueden expresar como  $\max(V_T - D, 0)$ . Para obtener el valor presente de esta flexibilidad, es necesario valorar esta función de pago en el tiempo  $t$ , y con base en los supuestos tradicionales de la valuación de opciones<sup>3</sup>, se tiene que el valor de esta flexibilidad está dado por una posición larga (se posee el derecho, mas no la obligación de adquirir los flujos del nuevo proyecto) de una opción europea de compra, es decir,  $P = e^{-r(T-t)}E[\max(V_T - D, 0)|F_t]$ . La solución a este problema, está dada por:

$$P = V_t \Phi(d_1) - D e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (8)$$

donde la función  $\Phi(d)$  es la función de distribución acumulada de  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ , es decir,

$$\Phi(d) = \mathbb{P}_t\{\varepsilon \leq d\} = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1 - \Phi(-d), \quad (9)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v \sqrt{T-t}} \quad (10)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_v \sqrt{T-t} \quad (11)$$

Por otro lado, en caso de que el negocio comience a tener problemas de financiamiento, la firma puede ser liquidada, sus activos vendidos a un precio de liquidación,  $L$ , que por simplicidad se supone como el valor de la deuda, y con este recurso liquidar hasta donde sea posible a los acreedores de la PYME minera. Esta situación puede ser representada, al tiempo  $T$ , como  $\max(L - V_T, 0)$ . Al valorar esta función de pago en  $t$ , se obtiene una opción de venta europea,  $S_p$ , de la cual el dueño del negocio es poseedor, pues si así lo desea, se declara en bancarrota y entrega la empresa a los acreedores, recibiendo a cambio el máximo entre el diferencial del valor de la firma y el precio de liquidación y cero, es decir:

<sup>3</sup> Tradicionalmente, se hace el supuesto de mercados completos para asegurar la aplicabilidad de la opción, eficiencia de mercado y ausencia de costos de transacción, así como una estructura de largo plazo plana y normalidad de los rendimientos del subyacente.

$$S_t = e^{-r(T-t)} E \left[ \max (L - V_T, 0) \mid F_t \right] \quad (12)$$

La solución de este problema está dada, tal y como indicaron Black, Scholes y Merton (1973), por

$$S_t = L e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - V_t \Phi(-d_1), \quad (13)$$

donde  $d_1$  y  $d_2$  están dados por las ecuaciones (10) y (11), respectivamente. Como se puede ver, el portafolio está conformado por posiciones largas en el «strangle»<sup>4</sup> y el subyacente más posiciones cortas en los bonos. Este portafolio no está hecho con fines de cobertura, sino de especulación, pues se cubre sólo parcialmente contra caídas en el negocio y apuesta por el crecimiento de éste al mantener el activo y las opciones.

Al ver a la PYME minera como un portafolio de inversión es importante determinar la cantidad de deuda óptima para la empresa. Esto equivale a probar la validez de las proposiciones de Modigliani y Miller dentro del marco del productor racional que busca una optimización dinámica de su función de beneficio sujeto a una restricción de gastos. Este punto será tratado en la siguiente sección.

## 7. Optimización dinámica estocástica de la función de beneficios de una PYME minera racional

Tal y como se planteó al inicio de esta investigación, las PYMES mineras están sujetas a los vaivenes de las economías locales, sus beneficios y gastos están sujetos tanto a las condiciones macroeconómicas (variables aleatorias para la empresa), como a las decisiones estratégicas de sus propietarios. Estas últimas se suponen racionales e informadas. Dada esta racionalidad y perfección en el conjunto de información disponible para la empresa, el problema a resolver es la maximización, en un entorno incierto, *i. e.*, estocástico, los beneficios de la misma, vista como un portafolio de inversión formado por posiciones largas en un subyacente,  $V_t$ , y opciones de expansión,  $P_t(V_t, t)$ , además de estar corto en una opción de cierre,  $S_t(V_t, t)$ , todo sobre el mismo subyacente pero con distinto precio de ejercicio, y posiciones cortas sobre un bono,  $D_t(r_g)$ , destinado a cumplir con las obligaciones de largo plazo que en promedio tienen una tasa de interés,  $r_g$ , y otro bono dedicado a cumplir con el resto de las obligaciones de

<sup>4</sup> Un «strangle» es la suma de dos posiciones largas en opciones, en una opción de compra y otra en una opción de venta sobre el mismo subyacente, pero con distinto precio de ejercicio. Esta estrategia espera poca volatilidad en el subyacente y apuesta por el crecimiento de la empresa.

la compañía a una tasa libre de riesgo,  $r$ .

Para este ejercicio de optimización dinámica estocástica, se supondrá que el rendimiento del proyecto principal (la PYME minera), puede ser modelado como un movimiento geométrico browniano con tendencia, esto es:

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW_t. \quad (14)$$

Este supuesto conduce a que el precio de la opción de expansión,  $P_t$ , sea una función de una variable aleatoria  $V_t$  por lo que es necesaria la aplicación del lema de Itô, esto lleva a:

$$dP_t = \left( \frac{\partial P_t}{\partial t} + \frac{\partial P_t}{\partial V_t} \mu V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_t}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t^2 \right) dt + \frac{\partial P_t}{\partial V_t} \sigma V_t dW_t. \quad (15)$$

Por simplicidad en la notación, se define

$$\left( \frac{\partial P_t}{\partial t} + \frac{\partial P_t}{\partial V_t} \mu V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_t}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t^2 \right) \frac{1}{P_t} = \mu_p$$

como la tendencia instantánea de la opción de expansión, y

$$\left( \frac{\partial P_t}{\partial V_t} \sigma V_t \right) \frac{1}{P_t} = \sigma_p,$$

como la volatilidad instantánea de la misma. Por lo tanto, la ecuación (15) queda finalmente como:

$$dP_t = \mu_p P_t dt + \sigma_p P_t dW_t. \quad (16)$$

Para obtener la ecuación diferencial estocástica que modelará el rendimiento instantáneo de la opción de cierre<sup>5</sup> de la PYME minera (opción de venta),  $S_t$ , se realiza un ejercicio de cálculo de Itô similar al de la ecuación (15). Resulta importante mencionar que la fuente de riesgo en ambas opciones es la misma y que, por lo tanto, aunque se trata de un problema con varios activos, sólo existe una fuente de riesgo. Después de realizar la expansión por serie de Taylor hasta el

<sup>5</sup> En este caso, se dice que la PYME «vende» sus activos a los acreedores al ejercer la opción de cierre cuando estos toman el control de la empresa si se declara en bancarrota.

segundo término y hacer las sustituciones pertinentes, se llega a:

$$dS_t = \left( \frac{\partial S_t}{\partial t} + \frac{\partial S_t}{\partial V_t} \mu V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_t}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t^2 \right) dt + \frac{\partial S_t}{\partial V_t} \sigma V_t dW_t \quad (17)$$

lo que por simplicidad en la notación, también puede ser reescrito como

$$dS_t = \mu_g S_t dt + \sigma_g S_t dW_t \quad (18)$$

En este caso se sustituyeron la tendencia y volatilidad instantáneas dadas, respectivamente, por:

$$\left( \frac{\partial S_t}{\partial t} + \frac{\partial S_t}{\partial V_t} \mu V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_t}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t^2 \right) \frac{1}{S_t} = \mu_g \quad \text{y} \quad \left( \frac{\partial S_t}{\partial V_t} \sigma V_t \right) \frac{1}{S_t} = \sigma_g$$

Para continuar con el planteamiento del problema se harán explícitas las ecuaciones diferenciales (deterministas) que siguen los dos bonos. El bono destinado al pago de la deuda de largo plazo,  $D_t$  es conducido por

$$dR_D = r_d dt \quad (19)$$

mientras que el bono destinado a pagar el resto de los compromisos financieros de la empresa,  $g_t$ , es conducido por

$$dR_g = r dt \quad (20)$$

Por congruencia con el premio a la liquidez, se supone que la tasa pagada por el bono de largo plazo es mayor o igual a la del bono de corto plazo, es decir:  $r_d \geq r$ . En ambos casos, se trata de tasas compuestas de forma continua que permanecen fijas a lo largo del tiempo.

Ahora se procede a nombrar a las proporciones de la riqueza en el tiempo  $t$ ,  $a_t$ , que la PYME minera asigna a la tenencia de cada uno de los activos que posee en su portafolio. Se denotará por  $\omega_{1t} = V_t/a_t$  a la proporción  $V_t$  de la riqueza que se asigna al proyecto principal (la PYME),  $\omega_{2t} = P_t/a_t$  a la proporción de la riqueza asignada a la posibilidad de expandir el proyecto original (opción de expansión),  $\omega_{3t} = S_t/a_t$  a la proporción de la riqueza destinada a la posibilidad de cerrar el negocio recuperando el valor en libros de los activos (opción de cierre),  $\omega_{4t} = D_t/a_t$  a la proporción dedicada al bono de largo plazo

(deuda de largo plazo) y, por último,  $(1 - \omega_{1t} - \omega_{2t} - \omega_{3t} - \omega_{4t}) = g_t / a_t$ , la proporción de la riqueza destinada al bono de corto plazo. En todos los casos, son admisibles los valores negativos, los cuales implican posiciones cortas en el respectivo subyacente.

Para hacer analíticamente tratable este problema, se supone una función de beneficios;  $\Pi_t$  creciente a tasas decrecientes, *i.e.* cóncava. Esto permite suponer que el punto alcanzado en las condiciones de primer orden (punto crítico) es también un máximo, sin necesidad de calcular las condiciones suficientes (segundo orden). También se supone que la PYME minera es un agente económico de vida infinita que descuenta sus beneficios (flujos de efectivo) a una tasa WACC,  $\omega_t$ , que cambia en el tiempo con el bono  $D$ . La forma de la función de beneficios puede ser vista como una consecuencia de las diseconomías de escala en la industria, aun cuando la PYME, por definición, es precio aceptante.

Si se conjuntan todos los supuestos anteriores, se obtiene el problema de optimización dinámica estocástica que resuelve una PYME minera maximizadora de beneficios,  $\Pi_t$ , la cual está restringida a una riqueza,  $a_t$ , que debe repartir en proporciones,  $\omega_{it}$ , entre los diversos activos dentro de su portafolio de inversión. A saber (véanse Merton (1973b) y (1974)):

$$\text{Maximizar } E \left[ \int_t^{\infty} \frac{\Pi_t^\gamma}{\gamma} e^{-\omega_t u} du \mid F_t \right] \quad (21)$$

sujeto a:

$$da_t = a\omega_1 dR_v - a_t \omega_2 dR_p - a_t \omega_3 dR_s - a_t \omega_4 dR_D - a_t (1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)) dR_x + \Pi_t \quad (22)$$

Si se sustituyen los rendimientos,  $dR_j$ , en la restricción presupuestal y se agrupan los términos deterministas y estocásticos, se tiene que:

$$da_t = \left( -r + \alpha_1 (r - \mu) + \alpha_2 (r - \mu_p) + \alpha_3 (r - \mu_s) + \alpha_4 (r - r_D) + \frac{\Pi_t}{a_t} \right) a_t dt - a_t (\sigma \alpha_1 + \sigma_p \alpha_2 + \sigma_s \alpha_3) dW_t \quad (23)$$

Si se supone que

$$\omega_{it} = \omega t \quad (24)$$

Entonces, el Hamiltoniano asociado al problema de decisión de la empresa está dado por

$$H = 0 = \frac{\Pi_t^r}{\gamma} - \omega \frac{\beta a_t^r}{\gamma} + \beta a_t^r \left( -r + \omega_1 (r - \mu) + \omega_2 (r - \mu_p) + \omega_3 (r - \mu_s) + \omega_4 (r - r_d) + \frac{\Pi_t^r}{a_t} \right) + \frac{1}{2} \beta a_t^r (\gamma - 1) (\sigma \omega_1 + \sigma_p \omega_2 + \sigma_s \omega_3)^2. \quad (25)$$

Para caracterizar las cantidades óptimas de la riqueza destinadas a cada activo, se deriva el Hamiltoniano con respecto de cada una de las variables de control, obteniendo con ello las condiciones de primer orden, a saber:

$$\frac{\partial H}{\partial \Pi_t^r} = 0 = \Pi_t^{r-1} - \beta a_t^{r-1}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_{1t}} = 0 = \beta a_t^r (r - \mu) + \beta a_t^r (\gamma - 1) (\sigma \omega_1 + \sigma_p \omega_2 + \sigma_s \omega_3) \sigma, \quad (27)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_{2t}} = 0 = \beta a_t^r (r - \mu_p) + \beta a_t^r (\gamma - 1) (\sigma \omega_1 + \sigma_p \omega_2 + \sigma_s \omega_3) \sigma_p, \quad (28)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_{3t}} = 0 = \beta a_t^r (r - \mu_s) + \beta a_t^r (\gamma - 1) (\sigma \omega_1 + \sigma_p \omega_2 + \sigma_s \omega_3) \sigma_s, \quad (29)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_{4t}} = 0 = \beta a_t^r (r - \mu_D). \quad (30)$$

Antes de continuar con la determinación de las cantidades óptimas de cada uno de los activos, se resalta un importante resultado que se desprende de las condiciones de primer orden dado por la presencia de una ecuación diferencial parcial de segundo orden para cada uno de los derivados implicados en este portafolio. Para obtener dichas ecuaciones, se despejará el premio al riesgo contenido en las ecuaciones (27), (28) y (29). Esto es,

$$\frac{(r - \mu)}{\sigma} = \frac{(r - \mu_p)}{\sigma_p} = \frac{(r - \mu_s)}{\sigma_s} = (1 - \gamma) (\sigma \omega_1 + \sigma_p \omega_2 + \sigma_s \omega_3).$$

Como se puede observar, los premios al riesgo en las proporciones de las opciones de expansión, de cierre y el subyacente son los mismos. Más aun, si se igualan entre sí los premios al riesgo, se sustituyen las definiciones de medias y volatilidades instantáneas de las opciones de expansión y cierre, y se reordenan los términos, se tiene que:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial V_t} \mu V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t^2 - rP_t = 0 = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial V_t} \mu V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t^2 - rS_t. \quad (31)$$



La ecuación (31) es la ecuación diferencial parcial que cumple la opción de expansión igualada con la ecuación diferencial parcial parabólica de la opción de cierre, igualada a su vez con cero. Se puede observar que estas dos ecuaciones son a su vez versiones de la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes (1973) para valorar opciones europeas.

Una vez establecido que las opciones de expansión y cierre están dadas como resultado de un proceso de optimización dinámica estocástica y que, por lo tanto, su uso no es arbitrario, se procede a obtener la trayectoria óptima de los beneficios de la PYME minera que representa uno de los objetivos de estudio. Para ello se parte de la ecuación (26), de donde se despejan los beneficios, con lo cual se llega a

$$\Pi_t = (\beta \alpha_t^{\gamma-1})^{\frac{1}{\gamma}} \quad (32)$$

donde permanece como una incógnita sin develar la trayectoria estocástica de la riqueza. Si se sustituye la trayectoria óptima de los beneficios en la ecuación (25), se tiene que

$$0 = \frac{\Pi_t^\gamma}{\gamma} - \omega \frac{\beta \alpha_t^\gamma}{\gamma} + \beta \alpha_t^\gamma \left( -r + \omega_1 (r - \mu) + \omega_2 (r - \mu_p) + \omega_3 (r - \mu_s) + \omega_4 (r - \mu_d) + \frac{\Pi_t}{\alpha_t} \right) + \frac{1}{2} \beta \alpha_t^\gamma (\gamma - 1) (\sigma \omega_1 + \sigma_p \omega_2 + \sigma_s \omega_3)^2,$$

de donde al despejar  $\beta^{\frac{1}{\gamma-1}}$ , se obtiene que:

$$\beta^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{1 + \gamma}{\omega - \gamma \Gamma - \left( \left( \frac{\gamma^2 - \gamma}{2} \right) (\sigma \omega_1 + \sigma_p \omega_2 + \sigma_s \omega_3)^2 \right)} \quad (33)$$

donde  $\Gamma = (-r + \omega_1 (r - \mu) + \omega_2 (r - \mu_p) + \omega_3 (r - \mu_s) + \omega_4 (r - \mu_d))$ . Para examinar los resultados de las condiciones de primer orden (con las que se determinan las proporciones óptimas de cada activo para maximizar el beneficio), se reescribirán como un sistema de ecuaciones, esto es:

$$\Pi_t = \beta^{\frac{1}{\gamma-1}} \alpha_t \quad (34)$$

$$(1 - \gamma) \sigma \omega_1 + (1 - \gamma) \sigma_p \omega_2 + (1 - \gamma) \sigma_s \omega_3 = \frac{(r - \mu)}{\sigma} = \frac{(r - \mu_p)}{\sigma_p} = \frac{(r - \mu_s)}{\sigma_s} \quad (35)$$

$$(r - r_D) = 0 \quad (36)$$

Por otro lado, se puede observar que la primer ecuación del sistema arroja como resultado el valor de  $\beta$ , dejando la trayectoria del beneficio de la PYME minera como función de constantes conocidas al tiempo de valuación  $t$  y, por lo tanto, develando la trayectoria de los beneficios de la empresa.

Tal vez el resultado más interesante es la condición de primer orden para determinar la proporción óptima de deuda para la empresa (ecuación (36)). En esta condición, desaparece cualquier referencia a una proporción óptima, dejando sólo que el diferencial de los bonos de deuda sea cero dado que se trata de bonos de la misma empresa cuando la estructura de capital no es producto de un proceso de optimización. La afirmación anterior resulta sorprendente; si no se enmarcara dentro de las propuestas de Modigliani y Miller. En ellas, se establece la irrelevancia de la estructura de capital para la empresa. A pesar de que este resultado fue demostrado en la década de los cincuentas, el hallazgo del presente trabajo resulta interesante, pues comprueba la validez de las propuestas de Modigliani y Miller (1958) en el contexto de un productor racional que optimiza de forma dinámica en un ambiente estocástico, además de comprobar que los derivados involucrados en el portafolio cumplen con las ecuaciones parciales diferenciales parabólicas propias de los derivados y que encuentran solución en las fórmulas de valuación de Black y Scholes (1973).

Como explicación a la desaparición del diferencial entre los bonos de corto y largo plazo, cuando ambos son documentos a tasa fija, se puede recurrir a la estructura (plana) de plazo de la tasa de interés de la que se vale el modelo de Black y Scholes. Esta estructura de plazo implica la inexistencia del premio por liquidez y una perfecta replicación de los documentos a largo plazo a través de documentos de corto plazo, *i. e.* un «*roll over*» perfecto que anula el diferencial. Este fenómeno puede ser eliminado del modelo haciendo una de las tasas de interés estocástica.

Una vez que se ha establecido la racionalidad dentro de la selección del portafolio y la irrelevancia de la estructura de capital (bajo los supuestos antes mencionados), se procederá a establecer estrategias tanto para el productor como para el prestamista que proporciona los recursos que apalancan a la empresa.

## 8. Estrategias de cobertura para la PYME minera

En las secciones anteriores, se estableció que la empresa es un portafolio formado por un subyacente (el proyecto original), posiciones largas en las opciones de expansión y cierre y cortas en los bonos para pago de deudas. Si el problema es enfocado desde el punto de vista de

la PYME minera, la posición larga en la opción de cierre indica que si así lo desea, puede declararse en quiebra, entregar el negocio que por lógica tendrá un valor menor que el de la deuda (por racionalidad del empresario que prefiere mayor riqueza a menos) y obtener el máximo entre cero y el remanente después de pagar deudas. Si la opción es del tipo americano, la quiebra se dará justo en el momento en que el valor de la deuda sobrepase al de los activos de toda la firma, mientras que en el caso de la opción europea, dada su ejecutabilidad sólo en  $T$ , la quiebra puede darse mucho después de que el valor de la deuda sobrepase al de los activos.

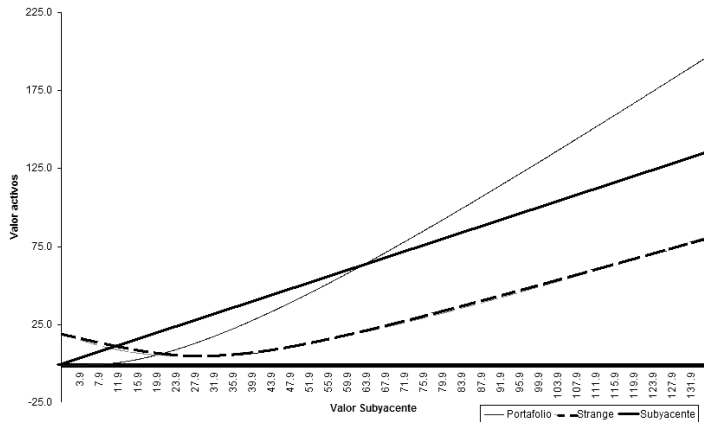
En el caso de la opción de expansión, la empresa tiene la posibilidad de acceder al valor presente de nuevos flujos de efectivo, que son riqueza nueva, a través del pago de una inversión determinada, aunque ésta se dará sólo si el negocio marcha bien.

Otra fuente de incertidumbre que puede arrojar variaciones en el valor de la firma es la volatilidad del mismo proyecto (la cual se supone constante) que se transmite a sus dos derivados, teniendo como probabilidad de ejecución  $a$  en el caso de  $N(d_2)$  la opción de expansión y a  $N(-d_2)$  en el caso de la opción de cierre.

En el caso de los bonos, se supone que estos mantendrán su valor nominal hasta que entren en incumplimiento, por lo que son tratados como constantes en la construcción del portafolio de la PYME minera. El valor de los bonos, también se usa como precio de ejercicio en el caso de la opción de cierre por la naturaleza, antes explicada, del derivado. La dinámica del portafolio anteriormente descrito puede explicarse en la siguiente gráfica.

**Gráfica 1.**

PYME como portafolio



La PYME minera vista como portafolio de activos ( $r = 0.05$ ,  $T - t = 1$ ,  $\sigma = 0.7$ ,  $K_1 = 60$ ,  $K_2 = 20$ ).

Como se puede observar, el subyacente está representado por la línea recta con pendiente unitaria, mientras que el «stradle» elabora una parábola suave, la cual se eleva cuando el subyacente supera los precios de ejercicio de ambas opciones, *i.e.* el valor de los activos es superior al monto de la deuda para la opción de cierre y menor que la masa crítica para entrar al proyecto de inversión secundario.

Desde el punto de vista de las contrapartes, la PYME minera es un portafolio ligeramente diferente, pues para la opción de expansión (opción de compra), no existe una contraparte que deba entregar el valor presente de los flujos del nuevo proyecto al ejecutarse la inversión, sino que estos son, como se mencionó anteriormente, riqueza nueva. Este no es un punto menor, pues para las contrapartes, la PYME minera es un portafolio que consta de posiciones largas en la opción de venta y el subyacente y posiciones cortas en los bonos; siendo los acreedores de la PYME las contrapartes que se encuentran cortas en la opción de venta y largas en los bonos.

Por el momento, como se mencionó anteriormente, se supondrá que los bonos conservan su valor nominal mientras no se presenta un evento de incumplimiento, además de que los acreedores pueden monitorear a la empresa de manera tal que si el valor de los activos es menor que el de la deuda, entonces se ejecuta la opción de venta y se salvaguarda el valor de los bonos. Estos supuestos dejan a los acreedores expuestos únicamente a la posición corta en la opción de venta, la cual puede ser parcialmente subsanada usando coberturas «delta» y «gamma» para la opción<sup>6</sup>. La «delta» de una opción europea (la americana se obtiene con derivadas numéricas) es descrita mediante:

$$\partial S_t / \partial V_t = -N(-d_1), \quad (37)$$

mientras que la “gamma” de la misma opción, que no es otra cosa sino el cambio de la curvatura de la misma ante cambios en el subyacente, es modelada mediante:

$$\frac{\partial^2 S_t}{\partial V_t^2} = -\frac{\Phi'(d_1)}{\sigma V_t \sqrt{T-t}} \quad (38)$$

Por lo que el suscriptor de la opción de venta, *i. e.*, el acreedor, se cubre al vender  $\partial S_t / \partial V_t$  unidades del subyacente. En la realidad, resulta imposible realizar esta cobertura de manera directa, pues por lo general, las PYMES no están listadas en bolsa<sup>7</sup> o en caso de estarlo, no son

<sup>6</sup> Las «griegas» de una opción miden la sensibilidad con los parámetros involucrados en la opción; véase, al respecto, Venegas-Martínez (2008).

<sup>7</sup> En México existe un índice de empresas de mediano tamaño que han colocado instrumentos en la bolsa local (BMV), aunque hasta el momento no ha sido un índice con mucha liquidez.

empresas líquidas. La solución al problema anterior, ya implementada de forma común en el mercado, está dada por el CAPM, el cual relaciona la volatilidad de un activo con la volatilidad del mercado a través de la  $\beta$  del activo. No es objetivo de este trabajo el explicar el funcionamiento del CAPM, basta con decir que para realizar la cobertura, el prestamista puede vender títulos de una empresa listada en bolsa, con adecuada liquidez y de giro similar, ajustando por el cociente de la  $\beta$  del activo a cubrir,  $V_p$ , y el activo (la PYME minera) de cobertura,  $M_t$  (la empresa listada), es decir, que para realizar la cobertura “delta” se necesitan:

$$\frac{\beta_V \partial S_t}{\beta_M \partial V_t} \quad (39)$$

unidades del activo bursátil. Como se puede observar, la cobertura es por naturaleza local, por lo que la cobertura dinámica implica costos de transacción que pueden hacerla prohibitiva<sup>8</sup>. La cobertura gamma, es realizada bajo la misma lógica, e implica el uso de

$$\frac{\beta_V \partial^2 S_t}{\beta_M \partial V_t^2}, \quad (40)$$

unidades del activo bursátil. La incorporación de estos activos al portafolio del acreedor, requerirán de un pequeño ajuste en las coberturas. Un punto interesante en esta relación entre la PYME minera y sus acreedores, está dado por la creación de nueva riqueza que depende del proyecto representado por la opción de expansión. Como se estableció anteriormente, no existe una contraparte en la misma, pero resulta interesante pensar que su existencia en el portafolio de la PYME minera sea un incentivo para que el acreedor baje los costos financieros de la empresa a través de una tasa de interés menor, otorgada a cambio de una participación en estas opciones. Con esta transferencia de riqueza actual, los ahorros por conceptos de interés, a cambio de la posibilidad de riqueza futura, el valor presente de los flujos del proyecto de expansión, se alinean los intereses de la PYME minera con el de los acreedores, pues estos dejan de ser espectadores del desarrollo de la PYME para convertirse en posibles accionistas de la misma. En este punto del razonamiento, surge la duda de la cantidad de opciones que se cambiarán por cada peso de reducción de intereses, afortunadamente, dentro del desarrollo de la fórmula de Black y Scholes se encuentra que  $N(d^2)$  representa la probabilidad de que la

<sup>8</sup> Véase Hull (2006).

opción termine con un valor positivo, por lo que la razón de cambio al tiempo  $t$  de suscripción de las opciones es  $C_t = N(d_2)V_t$ .

## 9. Conclusiones

A lo largo de esta investigación se ha trabajado con PYMES mineras resaltando la importancia empírica del financiamiento en la creación de empleo y la relevancia del plazo en el monto del crédito. Se encontró que una empresa maximizadora de beneficios que enfrenta una restricción de riqueza dada por la diferencia entre sus ingresos y los pagos a diferentes fuentes de financiamiento, una estructura de plazo plana, un mercado financiero perfecto en un ambiente dinámico y estocástico, no contempla la estructura de capital como una de las decisiones estratégicas del negocio si tiene a su alcance opciones reales de abandono y expansión.

El punto anterior refuerza la proposición hecha por Modigliani y Miller, en la década de los cincuentas, referente a la irrelevancia de la estructura de capital y dice que en un ambiente ideal como el dado por los supuestos de Modigliani y Miller o Black y Scholes, la empresa no distinguirá entre bonos de corto y largo plazo, dada la posibilidad del refinanciamiento (“roll over”). Esta afirmación es avalada por los resultados de la optimización dinámica estocástica cuando la estructura de plazo es plana (supuesto de Black y Scholes) y los mercados son perfectos.

Observe que el resultado del proceso de optimización es incompatible con la evidencia empírica mostrada, lo cual conduce a pensar que son las imperfecciones del mercado y los problemas de agencia los que conducen a una preferencia de las PYMES mineras por mayores plazos en créditos grandes. Esta última aseveración se desprende del hecho de que tanto los resultados de Modigliani y Miller como de la optimización dinámica estocástica, parten de los supuestos restrictivos anteriormente mencionados, por lo que se demuestra formalmente que son razones ajenas a la optimización dinámica estocástica (entiéndase por ello, las imperfecciones de mercado) las que provocan que empíricamente las empresas no cumplan con los supuestos de Modigliani y Miller.

Por último, partiendo de la visión de la PYME minera como un portafolio de inversión, se hace una propuesta para convertir al acreedor en posible socio capitalista de la PYME si el negocio prospera a través del intercambio de opciones por una menor tasa de interés, anulando con ello el riesgo que corre un socio tradicional. Sobre esta misma línea de investigación se hace una discusión de la forma en que el acreedor puede cubrir su exposición al riesgo de mercado que surge por ser acreedor de la PYME mediante el uso de las opciones financieras y del modelo CAPM.

## Bibliografía

- Abel, A. B. (1983). "Optimal Investment under Uncertainty", *American Economic Review*, Vol. 73, No. 1, pp. 228-233.
- Angelis, D. I. (2000). "Capturing the Option Value of R&D", *Research Technology Management*, Vol. 43, No. 4, pp. 31-34.
- Bell, G. K. (1995). Volatile Exchange Rates and the Multinational Firm: Entry, Exit, and Capacity Options. *Real Options in Capital Investments: Models, Strategies, and Applications*, Ed. by L. Trigeorgis, Praeger Publisher, Westport, pp.163-181.
- Bhattacharya, S. (1978). "Project Valuation with Mean-Reverting Cash-Flow Streams" *Journal of Finance*, Vol. 33, No 5, pp.1317-1331.
- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3. pp.637-659.
- Breusch, T. S. and A. R. Pagan (1980). "The Lagrange Multiplier Test and its Applications to Model Specifications in Econometrics", *Review in Economics Studies*, Vol. 47 , pp. 239-253.
- Copeland, T. and V. Antikarov (2001). *Real Options, A Practitioner's Guide*", Texere LLC Publishing.
- Copeland, T., T. Koller, and J. Murrin (1991) . *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies*, John Wiley & Sons.
- Dixit, A. K. and R. S. Pindyck, (2000): *Expandability, Reversibility, and Optimal Capacity Choice, Project Flexibility, Agency, and Competition*, *New Developments in the Theory and Applications of Real Options*, Eds. Brennan & Trigeorgis, Oxford University Press.
- Dixit, A. K. and R. S. Pindyck (1994). *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, N. J.
- Dixit, A. K. and R. S. Pindyck (1995). "The Options Approach to Capital Investment", *Harvard Business Review*, May-June.
- Dixit, A. K. (1993a). "Choosing among Alternative Discrete Investment Projects Under, Uncertainty", *Economic Letters*, Vol.41, pp.265-288.
- Dixit, A. K. (1993b): *Irreversible Investment and Competition Under Uncertainty*, *Capital, Investment and Development*, *Essays in Memory of S. Chakravarty*, Baku et al., Eds., Blackwell.
- Gardner, D. and Y. Zhuang (2000). "Valuation of Power Generation Assets: A Real Options Approach", *Algo Research Quarterly*, Vol.3, No. 3, pp. 9-20.
- Gikhman, I. I. and A. V. Skorokhod (2003). *Introduction to the Theory of Stochastic Process*, Dover Edition (Printed in 1996. Original in Russian, 1965), 1969, 516 pp.
- Greene, W. H. (2003): "Econometric Analysis", Prentice-Hall, Inc., Fifth Ed.
- Hull, J. C. (2006). *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall, 6th ed. USA.
- Kaslow, T. and R. S. Pindyck (1994): "Valuing Flexibility in Utility Planning", *The Electricity Journal*, Vol.7, March, pp.60-65.
- Kulatilaka, N. (1995). *Operating Flexibilities in Capital Budgeting: Substitutability and Complementarity in Real Options*", *Real Options in Capital Investments: Models, Strategies, and Applications*, Ed. by L. Trigeorgis, Praeger Publisher, Westport, Conn.
- Lintner, J. (1965). "The Valuation of Risk Assets and The Selection of

- Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets”, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, No. 1, pp.13-37.
- Lamberton, D. and B. Lapeyre (1996): *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall Eds., (English version of 1991 original French version).
- Markowitz H. M. (1970). “Portfolio Selection, Efficient Diversification of Coverage Policies and Taxes”, *Journal of Finance*, Vol. 25, pp. 1005-1027.
- Merton, R. C. (1973a): “Theory of Rational Option Pricing”, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp.141-183.
- Merton, R. C. (1973b): “An Intertemporal Capital Asset Pricing Model”, *Econometrica*, Vol. 41, No 5, pp.867-887.
- Merton, R. C. (1974): “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates”, *Journal of Finance*, Vol. 29, No 2, pp.449-470.
- Mikosch, T. (1998): *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific Publishing.
- Modigliani, F. and M. H. Miller (1958). *The Cost of Capital, Corporation Finance and The Theory of Investment*, *American Economic Review*, Vol. 48, No. 3, pp. 261-97.
- Mossin, J. (1966). “Equilibrium in a Capital Asset Market”, *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, pp. 768-783.
- Sharpe, W. F. (1964). “Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk”. *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3. pp. 425-442.
- Treynor, J. L. (1962). *Toward a Theory of Market Value of Risky Assets*. Unpublished manuscript. A final version was published in 1999, in *Asset Pricing and Portfolio Performance: Models, Strategy and Performance Metrics*. Robert A. Korajczyk (editor) London: Risk Books.
- Venegas-Martínez, F. (2006): *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, 2da. Edición, Cengage Learning (anteriormente Thomson), México.



# Estimación de la tasa natural de desempleo mediante la Ley de Okun

## Una aplicación a la economía mexicana, 2000-2007

FEVAQ r  
monge@umich.mx  
FEVAQ  
hildaguerrero@fevaq.  
net

**Rodrigo Gómez Monge**

**Hilda R. Guerrero García Rojas**

«Quien tiene un porqué para vivir, soporta casi cualquier cómo»

**Friedrich Nietzsche**

### RESUMEN

A partir de la aplicación de la Ley de Okun, y haciendo uso de técnicas utilizadas en series de tiempo, se estima para la economía mexicana, la tasa natural de desempleo. Primeramente presentamos algunos planteamientos teóricos sobre la Ley de Okun para pasar al diseño estadístico para estimar el Producto Interno Bruto Potencial. En el tercer apartado se estima la tasa natural de desempleo y en el cuarto se calcula el patrón de comportamiento irregular-estacional de esta tasa y sus principales implicaciones. Finalmente se presentan algunas conclusiones relacionadas con la aplicación de la Ley de Okun a la economía mexicana.

**Palabras clave:** Series de Tiempo, Producto Interno Bruto Potencial y Real, Promedios Móviles y Ponderados, Tasa Natural y Real de Desempleo, Ley de Okun.

**Clasificación JEL:**  
C22, E23, E24, J21, J64.

---

Fecha de recepción:  
28 de julio  
Fecha de aprobación:  
30 de septiembre

## I. Aspectos teóricos sobre la Ley de Okun

Rodríguez y Peredo (2007) inician su trabajo mencionando «Arthur Okun publica su artículo titulado ‘Producto Nacional Bruto (PIB) Potencial: Su Medición y Significado’ en el cual plantea lo que hoy conocemos como la Ley de Okun: ¿Cuánto puede producir la economía en condiciones de pleno empleo? El concepto y medición del Producto Nacional Bruto potencial intenta responder a esa pregunta» (Rodríguez, et. al., 2007: 60). La relación que se establece mediante esta Ley básicamente se refiere a la correlación entre el crecimiento del PIB (lado derecho de la igualdad en la ecuación (1) con la tasa de desempleo (lado izquierdo de la misma ecuación).

$$(u_{real} - u_{natural}) = \beta_o [(PIB_{real} - PIB_{potencial}) / PIB_{potencial}] \quad (1)$$

En donde:

$u_{real}$  = Tasa de desempleo real.

$u_{natural}$  = Tasa de desempleo natural.

$\beta_o$  = Valor del coeficiente estimado mediante la Ley de Okun.

$PIB_{real}$  = Producto Interno Bruto real.

$PIB_{potencial}$  = Producto Interno Bruto potencial.

Arthur Okun en su artículo de 1962, estima diversos valores para el valor de  $\beta_o$ , los cuales se muestran en el cuadro 1.

La Ley de Okun, según rescatan Rodríguez y Peredo (Rodríguez, et. al., 2007: 62), tiene implícitas dos ideas económicas básicas:

1. La primera es conocer el nivel en donde se emplea la totalidad de la capacidad productiva de una economía, lo cual implica saber el nivel de producción que maximiza el uso del factor trabajo;
2. La segunda implica determinar el costo asociado al nivel de desempleo, determinándose así, un punto de equilibrio económico con estabilidad. (Rodríguez, et. al., 2007: 60).

**Cuadro 1**  
**Estimación de los parámetros de la Ley de Okun (1962)**

Forma de medición	$\beta_o$
• Variaciones de la tasa de desempleo en dos periodos consecutivos y la tasa de crecimiento de la producción	0.3
• Tasa de desempleo con la brecha relativa existente entre las producciones potencial y observada	0.36
• Tasa de ocupación observada, relativa a la potencial o de pleno empleo como una función del cociente entre la producción observada y la producción potencial	0.35-0.40

Fuente: Elaboración propia a partir de: Belmonte, Ana y Clemente Polo (2004), «Formulaciones de la ley de Okun y resultados para España», Mimeo. Barcelona, España.

La importancia de la Ley de Okun radica en el hecho de ser «una propuesta de aproximación al desempleo de equilibrio; por un lado, se sabe que la expansión económica precisa trabajadores adicionales, lo cual disminuye el desempleo y si esta ley, se inserta en el marco analítico adecuado, permite calcular la tasa de crecimiento de la producción necesaria para reducir la tasa de desempleo en un determinado porcentaje» (Rodríguez, et. al., 2007: 60).

Otra de las principales contribuciones de la Ley de Okun es la considerada por Belmonte y Polo (2004) ya que es «una guía útil de política económica para analizar la aplicación de las políticas monetaria y fiscal, porque éstas pueden detonar la expansión económica y disminuir el desempleo, por tanto es importante conocer hasta qué momento dichas políticas pueden forzar el crecimiento (aumentando el empleo) sin generar incrementos de precios» (Belmonte, et. al., 2004: 23).

## **II. Modelo de Series de Tiempo (promedios móviles y promedios móviles ponderados): Un mecanismo predictor del Producto Interno Bruto Potencial**

A partir de la ecuación 1, tenemos que una parte esencial de la medición de la Ley de Okun, es la estimación del Producto Interno Bruto Potencial

De esta manera Valastegui (2006) precisa que «una forma de cuantificar la producción potencial, es analizar los movimientos cíclicos del producto observado, los cuales muestran cimas y valles, que a través del tiempo suponen mayor o menor uso de los recursos productivos, por tanto, estudiar la tendencia y los ciclos del producto, conduce a la posibilidad de proponer una serie de cifras de la producción potencial» (Valastegui, 2006: 20).

De esta manera existe una controversia sobre la mejor manera de medir la producción potencial. Rodríguez y Peredo<sup>1</sup> (2007) precisan que «todas las metodologías propuestas llevan a resultados puntuales de alguna manera diferentes; muchas de las diferencias se explican por los intervalos de tiempo de las series, pues no es lo mismo analizar datos mensuales, trimestrales o anuales. Sin embargo en el largo plazo, los resultados de las mediciones del producto potencial resultan tendencialmente similares» (Rodríguez, et. al., 2007: 63).

A partir de lo planteado anteriormente, surge la inquietud de la estimación del PIB potencial. Rodríguez y Peredo (2007) lo definen como el producto que puede generar una economía sin causar presiones

---

<sup>1</sup> En el trabajo realizado por Rodríguez y Peredo, éstos aplican la Ley de Okun para el caso de México con datos anualizados y utilizando diversos supuestos econométricos. En la presente investigación, sin embargo, los supuestos de cálculo son esencialmente estadísticos, utilizando datos trimestrales.

inflacionarias. La producción potencial también puede ser una aproximación a la mayor utilización de recursos productivos y considerarse una variable de oferta, ya que ésta no refleja la posibilidad de respuesta ante incrementos ilimitados de demanda agregada, porque si bien la economía en el corto plazo puede crecer por presiones inflacionarias, la idea del equilibrio de óptima utilización de los recursos productivos, se basa en la estabilidad de precios y en condiciones de libre mercado (Rodríguez, et. al., 2007: 62). Por su lado Okun en su trabajo de 1962 propone que «aunque existan mediciones más precisas de los logros económicos, ninguna puede sustituir por completo al concepto de producción potencial. Para juzgar el vigor de una economía en expansión es importante y esclarecedor el estudio de las habituales mediciones del ciclo» (Okun, 1962: 98).

El presente trabajo rescata la metodología utilizada en series de tiempo, específicamente lo referente al suavizamiento de datos. Tomando en consideración lo anterior, se propone la utilización de los promedios móviles simples y ponderados<sup>2</sup> como un mecanismo predictor del PIB potencial.

La metodología de los promedios móviles simples emplea el promedio de los  $n$  valores más recientes de datos en la serie de tiempo como pronóstico de su mismo periodo. El cálculo matemático es el siguiente:

$$\text{Valor suavizado simple} = \frac{\sum_{i=1}^n n \text{ valores más recientes}}{n} \quad (2)$$

A partir de la ecuación (2) se calcula el índice irregular-estacional para cada uno de los datos trimestrales dentro del periodo de análisis<sup>3</sup>. Este será un índice que expresa el diferencial, en términos relativos, entre los valores reales del PIB con respecto a sus valores potenciales. El proceso matemático consiste en:

$$\text{Índice irregular - estacional} = \frac{\text{Valor}_{\text{real}}}{\text{Valor}_{\text{suavizado simple}}} \quad (3)$$

Tomando en consideración la ecuación (3), del índice irregular-estacional individual se estima un índice irregular-estacional general para cada uno de los cuatro trimestres del año, calculándose como el promedio de todos los índices del paso anterior. La forma matemática será:

$$\text{Índice irregular - estacional general} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Índice irregular - estacional}_i}{n} \quad (3)$$

<sup>2</sup> Consiste en una pequeña variación de los promedios móviles simples, como se verá más adelante.

<sup>3</sup> Es decir, se utilizan los trimestres que componen el lapso de 2000 a 2007.

La siguiente etapa calcula un índice irregular-estacional corregido, el cual consiste en que la sumatoria de los cuatro índices trimestrales sea exactamente cuatro. La expresión matemática es la siguiente:

$$\text{Índice irregular - estacional corregido} = \frac{(\text{Índice irregular - estacional general}) \cdot (4)}{\sum_{i=1}^4 \text{Índices irregulares - estacionales generales}_i} \quad (4)$$

Por lo que respecta a los promedios móviles ponderados, será el mismo procedimiento que se siguió para el caso de los promedios móviles simples; la única diferencia es que al momento de calcular el promedio ponderado se selecciona un distinto factor de ponderación para cada valor y a continuación se calcula un promedio ponderado de los  $n$  valores más recientes como pronóstico.

En la mayoría de los casos, la observación o dato más reciente es la que recibe el mayor peso, disminuyendo éste conforme los datos sean más antiguos.

Matemáticamente tenemos:

$$\text{Valor suavizado ponderado} = \sum_{i=1}^n (\text{Factores de ponderación}_i) (\text{Valores más recientes } i) \quad (5)$$

En donde:

$$\sum_{i=1}^n \text{Factores de ponderación}_i = 1 \quad (6)$$

Con estos índices se desestacionaliza la serie original mediante:

$$\text{Valor desestacionalizado} = \frac{\text{Valor}_{real}}{\text{Índice irregular - estacional corregido que le corresponda}} \quad (7)$$

Con los valores desestacionalizados se estima una regresión lineal, calculando de nuevo los valores de la serie y utilizando al tiempo como variable explicativa del modelo. La estructura será:

$$\text{Valor desestacionalizado}_{calculado} = \alpha_0 + \alpha_1(\text{tiempo}) + e_i \quad (8)$$

Finalmente, a partir de la estimación de los datos anteriores se estacionaliza la serie haciendo uso de la ecuación 10:

$$\text{Valor estacionalizado}_{resultado} = (\text{Valor desestacionalizado}_{calculado}) (\text{Índice irregular - estacional corregido que le corresponda}) \quad (9)$$

Este valor estacionalizado y calculado será el Producto Interno Bruto Potencial de una economía específica (en este caso, la mexicana).

### III. Ley de Okun y la economía mexicana durante el periodo 2000-2007: Estimación de la Tasa Natural de Desempleo

En el cuadro 2 se muestran los valores reales del Producto Interno Bruto (PIB) trimestral para el caso de México. Utilizando las ecuaciones (2), (6) y (7) se estiman los promedios móviles simples y ponderados<sup>4</sup> de la serie de tiempo.

**Cuadro 2**  
**Producto interno bruto trimestral**

Miles de pesos a precios de 1993.

Periodo	Serie real	Serie suavizada Promedios móviles simples	Serie suavizada Promedios móviles ponderados
2000/01	\$ 1,571,295,897.00		
2000/02	\$ 1,617,057,388.00		
2000/03	\$ 1,579,482,685.00	\$ 1,608,629,309.63	\$ 1,602,908,023.55
2000/04	\$ 1,651,503,308.00	\$ 1,612,746,428.63	\$ 1,610,335,938.00
2001/01	\$ 1,601,651,818.00	\$ 1,610,497,005.25	\$ 1,615,226,725.50
2001/02	\$ 1,619,638,419.00	\$ 1,605,120,217.75	\$ 1,611,077,614.00
2001/03	\$ 1,558,906,267.00	\$ 1,597,732,227.75	\$ 1,599,539,479.90
2001/04	\$ 1,629,065,426.00	\$ 1,597,005,318.50	\$ 1,594,083,559.90
2002/01	\$ 1,564,985,780.00	\$ 1,604,155,342.88	\$ 1,600,036,759.85
2002/02	\$ 1,650,489,183.00	\$ 1,611,505,299.63	\$ 1,607,044,541.10
2002/03	\$ 1,585,255,698.00	\$ 1,620,174,048.50	\$ 1,616,303,919.30
2002/04	\$ 1,661,515,649.00	\$ 1,624,643,823.75	\$ 1,623,066,456.20
2003/01	\$ 1,601,885,548.00	\$ 1,626,569,578.50	\$ 1,626,545,311.40
2003/02	\$ 1,649,347,617.00	\$ 1,633,017,191.88	\$ 1,630,397,918.75
2003/03	\$ 1,601,803,302.00	\$ 1,644,687,416.38	\$ 1,635,592,645.90
2003/04	\$ 1,696,548,952.00	\$ 1,659,673,220.38	\$ 1,649,215,301.05
2004/01 <sup>p/</sup>	\$ 1,660,214,041.00	\$ 1,676,298,548.38	\$ 1,669,504,536.60
2004/02	\$ 1,710,905,556.00	\$ 1,695,513,761.63	\$ 1,688,039,590.45
2004/03	\$ 1,673,247,987.00	\$ 1,710,812,834.75	\$ 1,701,012,125.75
2004/04	\$ 1,778,825,973.00	\$ 1,722,609,092.13	\$ 1,715,831,843.20
2005/01	\$ 1,700,329,605.00	\$ 1,735,958,532.88	\$ 1,733,384,547.75
2005/02	\$ 1,765,160,051.00	\$ 1,748,080,514.25	\$ 1,742,193,961.45
2005/03	\$ 1,725,789,018.00	\$ 1,765,253,622.63	\$ 1,752,464,794.90
2005/04	\$ 1,823,100,793.00	\$ 1,787,723,671.75	\$ 1,774,455,832.40
2006/01	\$ 1,793,599,652.00	\$ 1,808,174,359.38	\$ 1,799,535,762.35
2006/02	\$ 1,851,650,597.00	\$ 1,827,537,449.63	\$ 1,820,772,780.00
2006/03	\$ 1,802,904,173.00	\$ 1,842,986,835.88	\$ 1,834,627,425.35
2006/04	\$ 1,900,890,360.00	\$ 1,855,202,918.38	\$ 1,847,658,582.90
2007/01	\$ 1,839,405,175.00	\$ 1,870,140,940.13	\$ 1,864,804,044.95
2007/02	\$ 1,903,573,534.00		
2007/03	\$ 1,870,485,210.00		

<sup>p/</sup> Cifras preliminares a partir de la fecha que se indica.

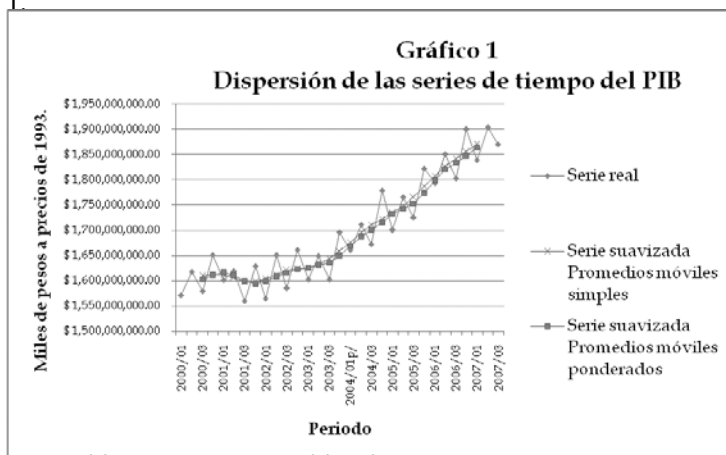
<sup>q/</sup> De base anual que debido al ajuste estadístico, en las series suavizadas mediante promedios móviles simples y ponderados se pierden los dos primeros y los dos últimos datos.

Fuente: Elaboración propia con base en la información del sitio de internet <http://www.inegi.gob.mx>, fecha de consulta: 19 de diciembre de 2007.

<sup>4</sup> Cabe destacar que los factores de ponderación serán de 0.4, 0.3, 0.2 y 0.1 para los últimos 4 trimestres. De esta manera se cumple el supuesto de que el pasado reciente explica de mejor manera el comportamiento futuro de una serie de tiempo que el pasado lejano.

El suavizamiento, mediante promedios móviles simples y ponderados, que sufre la serie de tiempo se puede observar en el gráfico

1.



Fuente: Elaboración propia a partir del cuadro 2.

El comportamiento del gráfico 1 puede sintetizarse en las siguientes ideas:

1. La linealización en el comportamiento del PIB cuando empleamos promedios móviles simples y ponderados. La diferencia existente entre ambos métodos estadísticos es prácticamente nula.
2. Las diferencias existentes entre la serie real y los valores del PIB suavizados son importantes, ya que a partir de ellos se estimará el diferencial entre el PIB real de la economía y el PIB potencial de la misma.

De la misma manera y con la información del cuadro 2 se estiman los índices irregulares-estacionales generales y corregidos. El cálculo se realiza utilizando las ecuaciones (3), (4) y (5). Los índices mencionados se muestran en el cuadro 3.

**Cuadro 3**  
**Índices irregulares/estacionales**

Trimestres	Promedios móviles	Promedios móviles ponderados	Promedios móviles ajustados	Promedios móviles ponderados ajustados
I	0.9858	0.9876	0.9858	0.9848
II	1.0125	1.0146	1.0126	1.0117
III	0.9777	0.9816	0.9778	0.9788
IV	1.0237	1.0275	1.0238	1.0246
Sumatoria	3.9997	4.0113	4.0000	4.0000

Fuente: Elaboración propia.

De esta forma, mediante el uso de las ecuaciones (8), (9) y (10) se llega a la estimación del Producto Interno Bruto Potencial<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> Utilizando promedios móviles simples y ponderados.

**Cuadro 4**  
**Producto interno bruto trimestral real y potencial**  
Miles de pesos a precios de 1990.

Período	Serie real	Serie tendencial Promedios móviles	Serie tendencial Promedios móviles ponderados	Producto Interno Bruto Potencial Promedios móviles	Producto Interno Bruto Potencial Promedios móviles ponderados
200901	1,570,295,897.00	1,593,890,907.61	1,595,585,790.58	1,517,200,840.07	1,515,900,447.59
200902	1,617,057,368.00	1,596,909,107.63	1,598,290,365.00	1,569,409,246.06	1,568,284,907.04
200903	1,579,482,685.00	1,615,400,977.40	1,615,601,481.55	1,525,869,136.29	1,527,720,851.07
200904	1,631,503,508.00	1,613,120,922.59	1,611,782,400.58	1,608,638,220.69	1,610,158,861.13
200905	1,601,651,818.00	1,624,653,342.42	1,626,410,971.75	1,538,510,350.95	1,538,019,961.20
200906	1,619,630,419.00	1,599,457,979.29	1,600,841,341.29	1,612,713,877.78	1,611,479,201.18
200907	1,538,906,267.00	1,594,336,640.50	1,592,610,526.58	1,567,654,239.50	1,569,513,560.55
200908	1,629,063,426.00	1,591,204,516.64	1,589,884,185.01	1,632,390,378.12	1,633,900,004.25
200909	1,564,983,780.00	1,587,490,052.00	1,589,178,131.26	1,601,639,853.82	1,603,059,224.89
200910	1,630,480,813.00	1,629,924,347.72	1,631,204,059.82	1,635,988,290.51	1,634,669,975.51
200911	1,585,255,698.00	1,621,205,271.85	1,619,529,644.01	1,609,439,242.72	1,611,201,275.64
200912	1,661,515,649.00	1,622,900,568.00	1,621,353,903.94	1,696,142,535.75	1,697,641,207.26
200901	1,601,883,548.00	1,624,900,430.42	1,626,648,214.86	1,640,769,356.70	1,642,098,508.58
200902	1,649,347,617.00	1,628,797,005.66	1,630,205,742.52	1,699,262,903.23	1,697,860,089.64
200903	1,601,800,202.00	1,638,229,177.33	1,636,405,014.70	1,639,234,445.93	1,633,069,987.92
200904	1,696,543,952.00	1,637,119,666.31	1,635,744,638.27	1,729,894,690.38	1,730,282,260.47
200905	1,660,214,041.00	1,684,087,681.82	1,685,878,479.57	1,635,838,859.58	1,641,277,822.27
200906	1,710,905,556.00	1,689,387,942.23	1,691,049,237.02	1,742,537,415.96	1,740,050,483.57
200907	1,670,247,987.00	1,711,298,530.19	1,709,404,366.14	1,690,009,549.15	1,694,872,700.20
200908	1,778,823,973.00	1,737,484,497.18	1,736,042,784.82	1,783,646,851.01	1,785,122,550.59
200909	1,700,329,605.00	1,724,780,110.90	1,726,614,170.69	1,728,028,263.46	1,731,170,559.96
200910	1,765,160,051.00	1,743,166,424.77	1,744,674,089.28	1,785,811,928.68	1,784,240,877.70
200911	1,725,789,810.00	1,765,004,395.72	1,763,101,268.02	1,724,794,652.26	1,726,658,412.69
200912	1,823,100,799.00	1,780,720,328.50	1,779,252,735.07	1,827,599,008.64	1,828,864,726.70
200901	1,750,599,652.00	1,819,391,230.86	1,821,236,003.63	1,701,370,365.33	1,702,416,299.65
200902	1,831,634,597.00	1,828,379,124.68	1,830,160,652.13	1,829,086,441.41	1,827,401,271.85
200903	1,802,904,175.00	1,843,900,191.14	1,841,483,777.59	1,778,579,755.58	1,778,444,124.77
200904	1,900,890,260.00	1,856,712,000.76	1,855,171,257.00	1,871,131,166.27	1,872,668,899.81
200905	1,839,403,175.00	1,865,855,538.74	1,867,809,641.85	1,812,287,268.21	1,810,253,600.24
200906	1,900,373,534.00	1,879,853,307.57	1,881,481,183.50	1,872,260,954.12	1,870,621,665.97
200907	1,870,483,210.00	1,913,021,057.56	1,910,925,947.21	1,818,364,858.80	1,820,328,570.26

<sup>a</sup> GfCes pedimos permiso para el uso de los datos.

<sup>b</sup> Se hace referencia a los datos de los años de 1990.

<sup>c</sup> Fuente: Elaboración propia en base a la información de la cuenta http://www.inegi.gob.mx, fecha de consulta: 1 de diciembre de 2007.

A partir de los datos obtenidos en el cuadro 4 y utilizando la ecuación (1) es que llegamos a estimar la tasa natural de desempleo en México.

De la misma manera, resulta de suma importancia destacar que el valor de  $\hat{\alpha}_0$  tomará el valor de 0.4. Este valor está sustentado en lo planteado por Arthur Okun<sup>6</sup>, que en su artículo de 1962 estimó diversos valores para el valor de  $\hat{\alpha}_0$ . Para este caso específico tomaremos el valor máximo de  $\hat{\alpha}_0$ , ya que el tipo de variables que estamos aplicando para el caso de la economía mexicana tienen relación con los estimados por Okun para la tasa de ocupación observada, relativa a la potencial o de pleno empleo como una función del cociente entre la producción observada y la producción potencial (ver ecuación (1)).

De igual forma, es importante señalar que se estimarán dos tasas de desempleo natural, ya que se utilizaron dos metodologías distintas para estimar el PIB potencial<sup>7</sup>, sin embargo las diferencias entre ellas son mínimas. La información se presenta en el cuadro 5.

<sup>6</sup> Para mayor referencia, remitirse al cuadro 1 en el que se concentran las principales contribuciones del artículo en cuestión.

<sup>7</sup> Las metodologías utilizadas fueron las de promedios móviles simples y promedios móviles ponderados.



Cuadro 5  
Desempleo real y natural

Trimestre	Desempleo real	Diferencial entre el PIB potencial y el PIB real		Diferencial entre el PIB potencial y el PIB real		Tasa de desempleo natural	Tasa de desempleo natural
		Promedio móvil simple	Ponderado	Promedio móvil simple	Ponderado		
2000:01	---	3.55%	3.65%	1.42%	1.46%	---	---
2000:02	2.56%	3.03%	3.11%	1.21%	1.28%	1.39%	1.31%
2000:03	2.81%	3.81%	3.39%	1.46%	1.36%	1.45%	1.50%
2000:04	2.33%	2.66%	2.57%	1.07%	1.03%	1.26%	1.30%
2001:01	2.08%	2.70%	2.80%	1.08%	1.12%	1.01%	1.26%
2001:02	2.55%	0.60%	0.51%	0.17%	0.20%	2.38%	2.35%
2001:03	2.78%	-0.36%	-0.66%	-0.22%	-0.27%	3.01%	3.05%
2001:04	2.81%	-1.41%	-1.30%	-0.56%	-0.60%	3.38%	3.61%
2002:01	3.23%	-2.29%	-2.19%	-0.92%	-0.88%	4.11%	4.11%
2002:02	2.86%	-0.33%	-0.23%	-0.13%	-0.10%	2.99%	2.96%
2002:03	3.13%	-1.30%	-1.62%	-0.60%	-0.65%	3.73%	3.78%
2002:04	2.69%	-2.04%	-2.13%	-0.82%	-0.83%	3.31%	3.46%
2003:01	3.08%	-2.55%	-2.45%	-1.02%	-0.98%	4.01%	4.06%
2003:02	2.96%	-2.94%	-2.86%	-1.17%	-1.14%	4.13%	4.10%
2003:03	4.04%	-2.69%	-3.10%	-1.20%	-1.24%	5.23%	5.28%
2003:04	3.55%	-2.49%	-2.57%	-1.00%	-1.03%	4.55%	4.56%
2004:01	4.02%	-1.32%	-1.42%	-0.61%	-0.57%	4.63%	4.59%
2004:02	3.16%	-1.82%	-1.73%	-0.73%	-0.69%	4.39%	4.35%
2004:03	4.24%	-1.17%	-1.28%	-0.67%	-0.51%	4.71%	4.75%
2004:04	3.78%	-0.27%	-0.35%	-0.11%	-0.14%	3.89%	3.88%
2005:01	3.87%	-1.60%	-1.30%	-0.46%	-0.60%	4.31%	4.67%
2005:02	3.55%	-1.16%	-1.07%	-0.46%	-0.40%	4.01%	3.98%
2005:03	3.83%	-0.52%	-0.63%	-0.21%	-0.25%	4.04%	4.08%
2005:04	3.14%	-0.24%	-0.32%	-0.09%	-0.13%	3.23%	3.26%
2006:01	3.36%	1.32%	1.44%	0.53%	0.57%	3.03%	2.99%
2006:02	3.17%	1.23%	1.33%	0.49%	0.53%	2.68%	2.64%
2006:03	4.00%	1.46%	1.38%	0.59%	0.55%	3.40%	3.45%
2006:04	3.69%	1.59%	1.51%	0.64%	0.60%	3.05%	3.09%
2007:01	4.00%	1.30%	1.61%	0.60%	0.64%	3.30%	3.35%
2007:02	3.36%	1.67%	1.76%	0.67%	0.70%	2.70%	2.66%
2007:03	3.91%	2.67%	2.76%	1.15%	1.10%	2.77%	2.81%

1/ Cifras preliminares a partir de la fecha que se indica.

Nota: Se basaron para calcular en la información del sitio internet <http://www.bancomex.com>, fecha de consulta: 18 de diciembre de 2007.

#### IV. Tasa Natural de Desempleo: Determinación de un patrón irregular-estacional en la economía mexicana durante el periodo 2000-2007.

Siguiendo la misma metodología empleada en el apartado anterior, se utilizan las ecuaciones (2), (6) y (7) para estimar los promedios móviles simples y ponderados<sup>8</sup> de la serie de tiempo del desempleo natural, estimada mediante el PIB potencial calculado con los promedios

<sup>8</sup> Cabe destacar que los factores de ponderación serán de 0.4, 0.3, 0.2 y 0.1 para los últimos 4 trimestres.

**Cuadro 6**  
**Tasa de desempleo natural**  
Porcentaje de la Población Económicamente Activa

Periodo	Desempleo natural mediante promedios móviles simples	Serie suavizada Promedios móviles simples	Serie suavizada Promedios móviles ponderados
2000/01			
2000/02	1.04%		
2000/03	1.43%		
2000/04	1.20%	1.20%	1.40%
2001/01	1.00%	1.02%	1.00%
2001/02	2.00%	2.00%	2.10%
2001/03	0.01%	2.00%	2.00%
2001/04	0.00%	0.00%	0.14%
2002/01	4.13%	0.47%	0.40%
2002/02	2.00%	0.00%	0.01%
2002/03	0.70%	0.00%	0.04%
2002/04	0.21%	0.70%	0.00%
2003/01	4.10%	4.00%	0.00%
2003/02	4.10%	4.07%	4.10%
2003/03	0.20%	4.07%	4.40%
2003/04	4.00%	4.07%	4.71%
2004/01 <sup>1/2</sup>	4.00%	4.00%	4.00%
2004/02	4.00%	4.00%	4.00%
2004/03	4.71%	4.00%	4.44%
2004/04	0.04%	4.00%	4.00%
2005/01	4.01%	4.10%	4.00%
2005/02	4.01%	4.00%	4.10%
2005/03	4.04%	0.70%	0.00%
2005/04	0.00%	0.41%	0.01%
2006/01	0.00%	0.17%	0.07%
2006/02	2.00%	0.00%	0.04%
2006/03	0.40%	0.00%	0.00%
2006/04	0.00%	0.14%	0.14%
2007/01	0.40%	0.00%	0.14%
2007/02	2.70%		
2007/03	2.77%		

<sup>1/2</sup> Datos preliminares a partir de la fecha que se indica.  
<sup>3/4</sup> De las series que debido al ajuste estadístico, en las series suavizadas mediante promedios móviles simples y ponderados se pierden los tres primeros (caso por un trimestre) y los dos últimos datos.  
Fuente: Elaboración propia con base en la información del sitio de internet <http://www.inegi.gob.mx>, fecha de consulta 10 de diciembre de 2007.

móviles simples. Los resultados se presentan en el cuadro 6. El suavizamiento aplicado a las series de tiempo de la tasa natural de desempleo se puede percibir en el gráfico 2 que se muestra a



Fuente: Elaboración propia a partir del cuadro 6.

continuación.

Aquí es importante el patrón que se identifica de forma empírica. A manera de conclusión podemos inferir:

1. El comportamiento curvo que presenta la tasa natural de desempleo. Esto se traduce en que a partir del año 2000 la tasa de pleno empleo se vio incrementada hasta un máximo en el tercer trimestre del año 2003, después de esta fecha la tasa ha tendido a descender (ver primera columna del cuadro 6).
2. El incremento en la tasa natural de desempleo, durante los años 2000 al 2004, se puede explicar en función del poco crecimiento real de la economía y el aumento en la desviación con respecto al crecimiento económico potencial.
3. Por lo que respecta al lapso 2005-2007, la tasa de equilibrio ha presentado una tendencia a disminuir debido a que la brecha entre el PIB real y el potencial se ha reducido.
4. De igual forma, durante el 2007 se ve una propensión a incrementar en la tasa de pleno empleo. El anterior aumento es explicado por la desviación que se presenta entre el PIB real de la economía con respecto al PIB potencial. Es aquí en donde el cálculo de la tasa natural de desempleo puede ser un indicativo útil para analizar la mejor aplicación de las políticas monetaria y fiscal por parte del Banco de México (Banxico) y la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), respectivamente, ya que éstas pueden detonar la expansión económica y disminuir la tasa de desempleo de equilibrio que se pudiera presentar en los próximos años.

Asimismo, se pueden estimar los índices irregulares-estacionales generales y corregidos. El cálculo se realiza utilizando las ecuaciones

**Cuadro 7**  
**Índices irregulares/estacionales**

Trimestres	Promedios móviles	Promedios móviles ponderados	Promedios móviles ajustados	Promedios móviles ponderados ajustados
I	1.0412	1.0553	1.0434	1.0406
II	0.9389	0.9629	0.9409	0.9495
III	1.0768	1.0932	1.0791	1.0780
IV	0.9346	0.9451	0.9366	0.9320
Sumatoria	3.9915	4.0565	4.0000	4.0000

Fuente: Elaboración propia.

(3), (4) y (5). Los índices mencionados se muestran en el cuadro 7. Ahora, si realizamos la interpretación de los índices irregulares-estacionales<sup>9</sup> de la tasa natural de desempleo llegamos a las siguientes conclusiones:

1. El primer y tercer trimestre son los que presentan una tasa de desempleo mayor al promedio. De hecho, el trimestre que presenta mayor nivel de desempleo natural es el tercero.
2. Contrario a lo anterior, el segundo y cuarto trimestre son en los que la tasa de desempleo de equilibrio es menor; siendo el cuarto trimestre en el que la mayor cantidad de trabajadores se encuentran laborando dentro de la economía.
3. A partir de lo anterior, queda de manifiesto el sentido que deben tener las políticas monetaria y fiscal en la economía mexicana:
  - a. Expansiva durante el primer y tercer trimestre, con el propósito de que la tasa natural de desempleo se establezca con el promedio que debe presentar en el transcurso del año.
  - b. Restrictiva durante el segundo y cuarto trimestre, con la finalidad de que la tasa de equilibrio aumente y se regularice con la que se debe presentar durante el año.

## V. Conclusiones

A partir del análisis y aplicación de la Ley de Okun a la economía mexicana, resulta de singular importancia reconsiderar su utilización para guiar la aplicación de política económica. En la presente investigación se pueden inferir las siguientes conclusiones acerca de la tasa natural de desempleo:

1. A largo plazo<sup>10</sup>, en el uso de políticas económicas estructurales<sup>11</sup> para tratar de minimizar el comportamiento de la tasa natural de desempleo a largo plazo.
2. A corto plazo<sup>12</sup>, en el uso de políticas coyunturales<sup>13</sup> monetaria y fiscal expansivas/restrictivas para estimular/inhibir la tasa natural de desempleo y nivelarla con el promedio que se debe presentar en el lapso de un año.

---

<sup>9</sup> El cálculo de los índices se realizó utilizando los promedios móviles simples y ponderado, aunque las diferencias en los valores son mínimas, como se puede apreciar en el cuadro 6.

<sup>10</sup> Utilizando el comportamiento gráfico de la tasa natural de desempleo.

<sup>11</sup> Cuando hablamos de políticas estructurales nos referimos a aquellas políticas económicas cuya repercusión temporal e implicaciones para la economía en su conjunto son de largo alcance.

<sup>12</sup> Utilizando los índices irregulares-estacionales.

<sup>13</sup> Cuando hablamos de políticas coyunturales nos referimos a aquellas políticas económicas cuya repercusión temporal e implicaciones para la economía en su conjunto son de corto alcance.

Desde el punto de vista metodológico podemos concluir que la herramienta de suavizamiento de datos, ampliamente utilizada en el tratamiento de series de tiempo, es un buen instrumento para el análisis de información como la aquí tratada, ya que brinda la oportunidad de «ajustar» la serie de manera que sea un mecanismo predictor del PIB potencial para aplicar la Ley de Okun. De la misma forma, mediante la aplicación de la Ley en comento, se puede inferir la tasa de desempleo natural que existe en México durante el periodo comprendido entre 2000 y 2007.

### Bibliografía

- Abril, Juan Carlos, et. al. (1998), *Estimación de la Relación de Okun: Argentina 1980-1996*, Mimeo, Tucumán, Argentina.
- Anderson, David R., et. al. (1999) *Estadística para Administración y Economía*. Ed. Thomson, México, D.F.
- Belmonte, Ana y Clemente Polo (2004), «*Formulaciones de la ley de Okun y resultados para España*», Mimeo. Barcelona, España.
- Bernanke, Ben S. y Robert H. Frank (2007), *Macroeconomía*, Ed. McGraw Hill, México, D.F.
- Dornbush, Stanley, et. al. (1998), *Macroeconomía*, Ed. McGraw Hill, Madrid, España.
- Garavito, Cecilia (2001), «*La Ley de Okun en el Perú: 1970-2000*», Mimeo. Lima, Perú.
- Hanke, John E. y Dean W. Wichern. (2006) *Pronósticos en los Negocios*. Ed. Pearson, Prentice Hall, México, D.F.
- Krugman Paul y M. Obstfeld. (2001) *Economía Internacional. Teoría y Política*. Ed. Addison Wesley, Madrid.
- Levin, Richard I., et. al. (2004) *Estadística para Administración y Economía*. Ed. Pearson, Prentice Hall, México, D.F.
- Lind, Douglas A., et. al. (2005) *Estadística Aplicada a los Negocios y a la Economía*. Ed. McGraw Hill, México, D.F.
- Loria, Eduardo y Manuel G. Ramos (2006), «La Ley de Okun: Una relectura para México, 1970-2004» en *Estudios Económicos*, volumen 22, número 1, enero-julio 2007, pags. 19-55.
- Millán Valenzuela, Henio Gonzalo (2007), «*Notas de Temas de Macroeconomía*», Mimeo. Morelia, Michoacán, México.
- Okun, A. M., 1962, «Potential GNP: its Measurement and Significance.», *Proceedings of the Business and Economic Statistics Section of the American Statistical Association*, pags. 98-104.
- Rodríguez López Patricia y Felipe de Jesús Peredo (2007), «Estimación de la Ley de Okun para la economía mexicana» en *Análisis Económico*, volumen XXII, número 55, tercer cuatrimestre de 2007, pags. 52-87.
- Samuelson, Paul A., et. al. (2001), *Macroeconomía con aplicaciones a México*, Ed. McGraw Hill, México, D.F.
- Sitio de Internet: <http://www.inegi.gob.mx>, diversas fechas de consulta.

Valastegui Martínez, L.A. (2006), «Una Estimación de la Ley de Okun para Ecuador» en *Observatorio de la Economía Latinoamericana*, número 69, pags. 12-25.

Viscencio Brambila, Héctor (2002), *Economía para la toma de decisiones*, Ed. Thompson, México, D.F.