

Referentes principales sobre la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria.

Main referents about geometry teaching in secondary education.

Manuel Barrantes López (1), Idalgo Balletbo Fernández (2)

(1) Dto. Dtca. De las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Extremadura.

(2) Facultad de Ciencias Aplicadas. Universidad Nacional de Pilar. Paraguay.

Fecha de recepción 29-03-2012. Fecha de aceptación 14-12-2012

Resumen.

A partir de un trabajo más amplio relativo a una revisión bibliográfica sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en la última década, hemos extraído los principales referentes respecto a la enseñanza de esta materia en Secundaria. Éstos pueden servir como referencia de base teórica para tesis, proyectos y otros trabajos académicos o como un material nuevo al alcance del docente que le garanticen mejores resultados en su actividad docente y de desempeño en el aula.

Palabras clave: Educación matemática; enseñanza; aprendizaje; geometría; materiales; recursos.

Summary.

From a broader analysis where we conducted a bibliographical review on the teaching and learning of geometry during the last decade, we have scrutinized the main references concerning the teaching of this academic subject in Secondary Education. These can serve as a reference for theoretical theses, projects and further academic research or as a new material available for the teachers in order to achieve better results in teaching and classroom practice.

Keywords: Mathematics education; teaching; learning; geometry; materials; resources.

1.- INTRODUCCIÓN

La educación matemática en la última década ha sido objeto de varias investigaciones en el ámbito de la caracterización y clasificación de contenidos específicos relacionados a potenciar la enseñanza-aprendizaje, en especial en el área de la Geometría, la cual es parte integrante de la cultura de la humanidad, no solo por su función instrumental sino también porque incentiva el desarrollo del pensamiento crítico y creativo, a fin de comprender y modificar el entorno.

Consideramos que la geometría, además de estar presente en múltiples facetas de la vida actual, tiene una gran influencia en el desarrollo del educando, sobre todo en las capacidades relacionadas con la comunicación y la relación con el entorno. La geometría favorece y desarrolla en los alumnos una serie de capacidades como la percepción visual, la expresión verbal, el razonamiento lógico y la aplicación a problemas concretos de otras áreas de Matemáticas o materias.

El estudio que mostramos en el pre-

sente artículo corresponde a un apartado de un estudio más completo (Barrantes y Balletbo, 2011) cuyo objetivo era proveer un recurso didáctico de consulta, que pudiera servir de guía para la obtención de información, en relación a las tendencias e investigaciones realizadas en la enseñanza y aprendizaje de la geometría en los últimos años.

La investigación se realizó en base a las revistas de mayor impacto indicadas en In-Recs (<http://ec3.ugr.es/in-recs/informacion/que-es1.htm>), e identificación de las revistas con artículos relacionados con la enseñanza aprendizaje de la geometría mediante Redined (<http://www.redined.mec.es/es/informacion.htmlaqui>). La revisión y estudio de los artículos se hizo a través de las revistas físicas de la hemeroteca y biblioteca virtual de la Universidad de Extremadura.

Una vez encontrados los artículos, campo de nuestra investigación, se les dio una estructura y una codificación, mediante la que nos fuera sencillo encontrar un artículo determinado. Todo esto queda resumido en el Cuadro 1.

Nº	Revistas	Codificación	Cantidad de Artículos	Porcentaje %
1	Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y Experiencia didáctica	E.C	11	11
2	Revista de Educación	R.E	2	2
3	SUMA	S.	61	63
4	Campo Abierto	C.A.	4	4
5	Revista de Enseñanza Universitaria	R.E.U.	2	2
6	Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas	U.	15	16

7	Números	N.	2	2
	TOTAL		97	100

Cuadro 1º: Codificación de revistas y cantidad de artículos por revistas

A partir de los artículos y la bibliografía consultada se elaboró una estructura formada por tres clasificaciones, en las que se ha enmarcado los artículos leídos. Estas clasificaciones son: por niveles educativos, por temática correspondiente a cada uno de los niveles educativos y, según materiales y recursos geométricos utilizados en los diferentes niveles educativos.

Así pues, se obtuvieron datos y resultados, y algunas conclusiones que se presentan en Barrantes y Balletbo (2011), así como referencias bibliográficas, una relación de páginas web de Bases de Datos, Asociaciones y Revistas de Educación de las Matemáticas de interés para el investigador y el docente.

En el presente artículo nos centramos en los resultados obtenidos para el nivel de Secundaria y los distintos referentes que consideramos más importantes: la resolución de problemas; la Geometría y la historia; Geometría, otras partes de las matemáticas y otras materias; enseñanza aprendizaje de la geometría; elementos manipulativos y recursos tecnológicos.

2.- LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN SECUNDARIA

Atendiendo a la clasificación por niveles educativos en Barrantes y Balletbo (2011), los trabajos realizados en Educación Secundaria superan ampliamente a los demás niveles con un 48% (70 artículos). Estos datos nos indican que el profe-

sorado de la Educación Secundaria es un colectivo interesado en plasmar en artículos sus experiencias e investigaciones que muestran sus innovaciones y resultados. Estos profesores están preocupados por desarrollar mediante una metodología activa diferentes materiales y recursos que hacen que las actividades realizadas con ellos generen un aprendizaje significativo en los alumnos.

La línea general de trabajar la geometría es desde una metodología de resolución de problemas, mediante la que el alumno, además de estar motivado, aprende. En este sentido, el trabajo realizado nos muestra un número importante de artículos, en los que esta temática está presente.

Por ejemplo, Irazo y Fortuny (2009) analizan parte de una investigación sobre la interpretación del comportamiento de los estudiantes de Bachillerato Tecnológico en la resolución de problemas de geometría plana, mediante el análisis de la relación entre el uso de GeoGebra, la resolución en lápiz y papel, y el pensamiento geométrico. Los autores buscan una relación entre las concepciones de los alumnos y las técnicas que utilizan en las estrategias de resolución de problemas.

De manera distinta, Torregrosa, Haro y Llinares (2010) buscan las concepciones de los profesores de Secundaria sobre la demostración matemática. Dichas concepciones se manifiestan cuando los profesores participaban en un entorno virtual de aprendizaje. Estos autores describen la

influencia que sobre estas concepciones tiene la resolución de problemas de probar usando software dinámico.

También, Flores (2002) muestra el interés matemático de los puzles ligado a sus cualidades topológico-métricas, que ponen a los alumnos frente a originales situaciones problemáticas en el espacio tridimensional, mediante las cuales pueden desarrollar un conjunto de aprendizajes y desarrollo de destrezas y habilidades espaciales que se contemplan en los Currículos oficiales

Relacionado con la cinematografía, Thibaut (2004) desarrolla el Proyecto Cube: una introducción a la geometría tridimensional. Dicho proyecto es una propuesta de trabajo a partir de la película “Cube” donde se desarrollan una serie de actividades de introducción a la geometría analítica tridimensional y a la visualización espacial geométrica. Las características de la propuesta hacen que se presente como un proyecto abierto a la interdisciplinariedad e idóneo para la práctica del aprendizaje significativo en un contexto de prácticas procedimentales.

Hay una serie de artículos en los que se presentan actividades muy educativas para este nivel de secundaria. Por ejemplo, Ibañes (2001) a partir de la demostración de un teorema clásico “Los puntos medios de los lados de un romboide definen un rectángulo” se pueden sugerir el descubrimiento de otros resultados. Es decir la demostración en Geometría como medio de descubrimiento.

Por su contenido didáctico, resaltamos el trabajo con alumnos de cuarto de Secundaria, de Real (2004) que presenta las cónicas como formas geométricas que se pueden generar de múltiples formas y que verifican propiedades que son uti-

lizadas en la vida cotidiana. Después de conocer las distintas cónicas y su forma de generación, el autor procede a enseñar a los alumnos algunas propiedades de cada cónica e intenta que consigan distinguir cada cónica según sus propiedades y componentes.

Queremos, ahora, prestar atención a un número importante de artículos relacionados con los fractales, entendidos como materiales para resolver problemas. Partimos de Redondo y Haro (2004, 2005) o Moreno (2002) que ofrecen actividades relacionadas con la geometría fractal dirigidas a alumnos de secundaria, presentando diferentes formas de generar fractales y algunas de sus aplicaciones. Este mismo autor (Moreno, 2003a) plantea una propuesta de actividades para un trabajo de investigación en secundaria, a través del estudio de familias de triángulos y tetraedros fractales de algoritmo lineal común.

Por otra parte, Moreno (2003b) utiliza el juego del caos en la calculadora gráfica. El algoritmo conocido como juego del caos es un método muy sencillo y eficaz para la generación de figuras fractales, consistente en realizar una sucesión de transformaciones sobre un sólo punto. Se desarrolla el juego del caos porque se pueden trabajar las transformaciones lineales en el plano, uno de los objetivos de las Matemáticas en Secundaria

En esta misma línea, hemos encontrado una serie de artículos en los que se presentan propuestas muy educativas para Secundaria. Suelen ser actividades puntuales relacionadas con las figuras geométricas (Grupo Alquerque, 2001; Fernández y Reyes, 2001; 2005) o se refieren a métodos, estrategias, aproximaciones, etc. que el alumno descubre,

realiza, ... mediante la resolución de problemas (Grupo Alquerque, 2003, 2005; Cortés y Calvo, 2004; Munné, 2002; Redondo y Haro, 2002; Pinyol, 2007, Romero, 2001; Escribano, 2000; Mercado y Custodio, 2005)

En definitiva con artículos de corte teórico como Escribano (2000) que nos presenta tres demostraciones sobre el valor de la potencia de un punto, hasta artículos prácticos como Mercado y Custodio (2005) que nos enseña a diseñar camisetas teniendo en cuenta la geometría nazarí, el alumno adquirirá una actitud positiva, valorará y comprenderá la utilidad de las herramientas matemáticas, experimentando satisfacción por su uso, ya que éstas le posibilitan para organizar y comprender la información que le hace conocer la realidad de una forma más plena, pues nos basamos en un aprendizaje globalizador. El alumno experimenta como las Matemáticas surgen de las situaciones reales.

En definitiva, deberíamos intentar crear un ambiente que permita la generación del conocimiento a partir de la comunicación y contraste de ideas, de la participación y de la creatividad como nos muestran los artículos referidos.

3.- LA GEOMETRÍA Y LA HISTORIA

La historia y la evolución del edificio matemático, las curiosidades matemáticas, la relación con otras materias o con las mismas matemáticas, son poderosos instrumentos motivadores y harán que el alumnado tenga interés por la adquisición de los conocimientos matemáticos. En la última década han seguido apareciendo trabajos relacionados con la historia y las matemáticas, nosotros nos centramos en

aquellos relacionados con la Geometría y en el siguiente apartado veremos los relacionados con otras materias o con las mismas matemáticas.

Algunos artículos relacionados con la historia, nos recuerdan a civilizaciones importantes o personajes que se han relacionado muy directamente con la Geometría. Así, Illanas (2008) hace un recorrido por las Matemáticas que se desarrollaron en Mesopotamia, el sistema de numeración de base sexagesimal y el estudio, mediante las tablillas babilónicas, de áreas de triángulos y trapecios, longitud de la circunferencia y área del círculo entre otros aspectos matemáticos.

Estos artículos sobre la historia, no suelen solamente tratar la figura de algún matemático conocido, sino que de forma práctica presentan y muestran algunos de sus trabajos. Por ejemplo, Gutiérrez (2006) nos presenta la figura de Jacob Bernoulli, matemático muy relacionado con esta disciplina. El autor hace énfasis en la resolución de Bernoulli de un problema relacionado con la determinación de las curvas, y nos habla de las espirales, por las que Bernoulli sentía gran atracción, terminando el artículo con la distribución binomial que lleva su nombre. También, Usón y Ramírez (2005) analizan el origen del Triángulo de Pascal poniendo en duda que este matemático fuera el autor de este concepto, para ello, hacen un recorrido histórico hasta el origen del triángulo.

En la misma línea, Pérez, Álvarez y Porta (2008) pretenden, desde un enfoque competencial, despertar en el alumnado el interés por la historia de un problema matemático: la cuadratura del círculo. Este problema puede contribuir a que el alumno adquiera destrezas en el trazado de

construcciones gráficas y en el cálculo de las medidas de líneas que las componen. El artículo realiza una breve introducción histórica al problema y se describen las actividades realizadas.

Con respecto a la banda de Möbius, los autores Granados, Grau y Nuñez (2007) además de una breve biografía de este personaje, indagan y trabajan con los alumnos la famosa banda de Möbius, como herramienta para potenciar la motivación y su interés en las clases de matemáticas. Los alumnos aprenden a construirla y algunas aplicaciones.

4.- GEOMETRÍA, OTRAS PARTES DE LAS MATEMÁTICAS Y OTRAS MATERIAS

Es poco común en el aula relacionar la Geometría con otras partes de las matemáticas, pero como veremos, esta materia es una buena herramienta cuando se utiliza en materias como álgebra, probabilidad, análisis, estadística ...

Ruiz (2001) se pregunta por qué al explicar un concepto matemático no se aprovechan los conocimientos que tienen los alumnos, por ejemplo, al tratar la probabilidad nos olvidamos del área o la longitud. Hay que establecer la importancia de aprovechar los conocimientos de geometría que poseen los alumnos para explicar el concepto de probabilidad, poniendo de relieve lo adecuado que es, desde un punto de vista didáctico, la unión de la geometría y la probabilidad.

En la misma línea, Varo (2000) hace una interpretación geométrica de la regla de los signos para el producto y en Aledo y Cortés (2001) se propone un buen enfoque geométrico para iniciar a los alumnos en el tema de sumas geométricas de

series numéricas como complemento al enfoque analítico-algebraico que se vienen realizando normalmente. Redondo (2008) pretende trabajar transversalmente Álgebra y Geometría, revisando algunos aspectos históricos, propiedades y actividades sobre el número de oro y el número de plástico que pertenecen a la clase de los números mórficos.

La relación de la Geometría con otras materias es un tema poco común en los artículos salvo en los casos de la relación con las artes: pintura, escultura, arquitectura, etc. Por ejemplo, Martín (2008) hace el estudio de **El Bautismo de Cristo** desde una perspectiva matemática, donde se pone especial énfasis en formas geométricas. Cubos e hipercubos son algunos de los elementos que se relacionan con esta pintura de El Greco.

Por su parte, Corrales (2004) se centra en el análisis de las dimensiones a partir del estudio de los cuadros del Dalí o la revisión de la obra de Cornelius Escher (Corrales, 2005 a y b) inspirada en las matemáticas.

Millán (2004) nos habla de Leon Battista Alberti, uno de los principales representantes del Renacimiento italiano, parte de su obra está dedicada a las matemáticas, su principal obra *Ludi matematici* trata la geometría práctica, esto es, las reglas de medición de superficies de terrenos, altura de torres, distancias entre ciudades,...

Por último desde las construcciones, García (2005) da distintas hipótesis geométricas para interpretar como se han construido ciertos edificios medievales. Su estudio se centra concretamente, en los restos de una basílica visigoda situada en el yacimiento arqueológico del Tolmo de Minateda en Hellín y se compara lo

obtenido con otros emplazamientos históricos de otras provincias en España y Portugal.

5.- ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

En este apartado comentamos aquellos artículos que nos dan metodologías o ideas nuevas sobre la enseñanza aprendizaje de la Geometría. Así, en Barrantes (2003) se caracterizan esta enseñanza en Primaria y Secundaria indicándose los cambios que se han producido en ella y que se considera deben ser conocidos por los profesores de Primaria y Secundaria.

En la misma línea, Prada (2003) presenta un marco metodológico para la atención a la diversidad dentro del área de Matemáticas. Nos propone una didáctica, para la enseñanza de la geometría, basada en la utilización de materiales diversificados. Cada uno de los materiales se presenta con una guía para el profesor y una ficha de actividades, que va llevando al alumno desde el reconocimiento de las figuras geométricas hasta el razonamiento, siguiendo los niveles de Van Hiele.

No menos interesante es el artículo de Fortuny y Giménez (2001) que trata sobre los razonamientos geométricos de alto nivel y actividades pre-demostrativas con alumnos de doce a dieciséis años. Se intenta analizar el significado, la función y la necesidad de la demostración en Educación Matemática, mediante problemas locales.

Sobre los obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas, Barrantes y Zapata (2008) realizan varias reflexiones de porqué los alumnos desarrollan esquemas conceptuales incompletos o mal contruidos

sobre los conceptos, propiedades y clasificación de las figuras geométricas tanto planas como espaciales. Se ofrecen algunas recomendaciones, basadas en una metodología constructiva, para corregir y erradicar estos obstáculos y errores que impiden una eficaz enseñanza y aprendizaje de las figuras.

Por último, destacar a Gorgorió y otros (2000) que tratan sobre la reflexión de un grupo de trabajo, en el que los profesores de Secundaria e investigadores en educación matemática desarrollan actividades geométricas aplicadas a las rotaciones. Se incide en que las actividades que se propongan a los alumnos deben estar relacionadas con el currículo; permitir conexiones con distintas áreas matemáticas o no; ser la motivación o la introducción de un contenido básico; deben ser interesantes y flexibles para todo el alumnado de forma que: se planteen preguntas válidas, reflexione e interiorice y, establezcan redes con su vida cotidiana y sus aprendizajes anteriores.

6.- MATERIALES MANIPULATIVOS

Dentro del trabajo general Barrantes y Balletbo (2011) considerábamos una categoría denominada elementos manipulativos, en la que se trataban a su vez tres tipos de elementos, los constructores, los contruidos y los mecanismos

Los materiales constructores se consideran aquellos que sirven para hacer modelos diversos o bien para generar situaciones de aprendizaje (Fortuny, 1998).

El material constructor por excelencia en estos artículos es el papel. Se trata el papel como un material apto para hacer diferentes construcciones y posteriormente realizar actividades con ellas.

Dentro de los trabajos con papel, Ledesma (2010), nos muestra cómo trabajar en cualquier nivel distintos contenidos matemáticos, triángulos, cuadriláteros, teorema de Pitágoras, con un simple y sencillo folio de formato DIN-A y varias piezas que se forman con éste. Una bonita introducción a las matemáticas con papel donde, en un claro contexto de resolución de problemas, se ponen en juego la imaginación, la creatividad y la originalidad, tanto del alumno como del profesor.

Igualmente, Mercado (2010) describe cómo utilizar el papel maché en el aula de Matemáticas con alumnos de ESO. El autor nos enseña cómo los alumnos pueden elaborar materiales con papel maché y como el mismo docente puede hacer sus propios materiales didácticos como conos, elipses en conos, triángulos esféricos, el cubo de soma, etc.

También se usa el papel para la construcción de elementos geométricos como poliedros regulares, estrechados... y estudiar sus propiedades (Garrido, 2010; Royo, 2010; Moreira 2010; Mora, 2002; Fernández y Prieto, 2005; Ramírez, 2005; Grupo Alquerque, 2007; 2008; Blanco, Otero y Pedreira, 2010) siempre como materiales aptos para la enseñanza y el aprendizaje en el aula de diferentes contenidos y actividades.

Otro material constructor son los espejos, Bermejo (2002) presenta aplicaciones didácticas del libro de espejo como complemento al libro de texto, en las que el alumno dibuja, construye y manipula figuras geométricas. Se plantea el estudio de las figuras planas como una investigación que el alumno realiza a partir de unas premisas mínimas por parte del profesor.

Relacionado con los espejos, Murari y Pérez (2001) tratan el tema de los caleidoscopios como un material didáctico, integrado en las ciencias (óptica geométrica), en el diseño geométrico y en la educación artística. Se articulan dos o tres espejos para la obtención de imágenes reflejadas según los distintos objetivos que pueden ser alcanzados sobre simetrías, polígonos regulares ..., además de proporcionar situaciones que desafían y fomentan la creatividad.

Otros materiales que comentábamos al comienzo de este apartado eran los materiales contruidos, éstos son materiales que sirven directamente para observar y concretar conceptos, y profundizar en propiedades (Fortuny, 1998).

Uno de estos materiales contruidos son los sólidos de madera o plástico conocidos por todos los profesores y alumnos. Rubio (2010) nos muestra cómo construir los sólidos plátonicos mediante una propuesta de actividad docente basada en la construcción de módulos de papel que convenientemente engarzados da lugar a dichos sólidos. También, Guillén (2000) presenta un estudio sobre cuáles son las ideas erróneas de los estudiantes sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos y el Grupo Alquerque (2001), actividades destinadas a los alumnos que se derivan del Cubo Soma en las que mediante particiones en éste, se crea el Cubo de Muñoz.

Por último, dentro de los materiales manipulativos; mecanismos solamente hemos encontrado un trabajo relativo a un visor de cónicas. Real (2004) estudia las cónicas con alumnos de cuarto de Secundaria. Las distintas cónicas se generan al cortar un cono con un plano, haciendo

variar el ángulo de inclinación del plano con respecto al eje del cono.

Para que este proceso sea asimilado de forma visual por los alumnos, utiliza el visor de cónicas. Este aparato ha sido creado utilizando dos embudos negros en el interior de los cuales se ha colocado una bombilla, y se han dispuesto sobre un eje de forma que, al encender las bombillas, se observe un cono generado por un haz de luz (en el artículo pueden verse fotografías del objeto y su utilización). Una vez que tenemos el cono, ya sólo tenemos que cortarlo con un plano; para ello nos valemos de una madera rectangular, pudiéndose obtener: la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola. El autor se centra, una vez generadas las cónicas, en las características de cada cónica.

7.- RECURSOS TECNOLÓGICOS

Otra categoría importante en el trabajo general son los recursos tecnológicos (Barrantes y Balletbo, 2011) como recursos y materiales orientados a la facilitación, activación y desarrollo de procesos clave de la educación de las competencias geométricas.

Para nosotros, los trabajos realmente interesantes de este bloque son aquellos en los que los programas informáticos se utilizan como herramientas para la enseñanza-aprendizaje de la geometría.

En esta línea, un número importante de artículos tienen como base el programa Cabri, tan útil para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Por ejemplo, en Pérez (2000) se hace una descripción de aplicaciones disponibles en Internet para el programa Cabri-Géomètre, que permite la enseñanza de la geometría

de forma más visual. También, García y Arriero (2000) utilizan el programa Cabri para el estudio de las cónicas desde dos puntos de vista; la geometría clásica y la geometría analítica. Este artículo concretamente se centra en la elipse y en la parábola.

Mediante Cabri II se intenta también que los estudiantes redescubran los teoremas ya conocidos en Geometría. Se pretende que éstos, habitualmente meros receptores de la información, pasen a trabajar con ella y a desarrollar una creatividad científica. Pichel (2000) nos muestra como el alumno mediante la manipulación de figuras geométricas, como el cuadrado y el triángulo y en torno a los cuales reflexiona, puede llegar a inventar operaciones, estrategias o problemas.

En el campo de las transformaciones geométricas, Hoyos (2006) nos presentan algunas secuencias de trabajo sobre el aprendizaje de la homotecia, e isometrías. Los alumnos exploraban y manipulaban con Cabri-II, y un conjunto de pantógrafos con configuraciones geométricas distintas. La tesis principal que maneja la autora es que hay una función complementaria entre los pantógrafos y las actividades realizadas con Cabri-II. En particular, argumenta que esa utilización específica dio lugar a procesos de intuición y objetivación en torno de algunas nociones matemáticas como son la proporcionalidad y la comparación entre longitud y área

También, los recursos tecnológicos son importantes desde la formación inicial de profesores de matemáticas de Secundaria. Así, González y Lupiáñez (2001) proponen actividades de enseñanza para la formación inicial de profesores de ma-

temáticas de Secundaria. El objetivo es proporcionar al futuro profesor aspectos específicos de conocimiento profesional relacionados con el uso de software de geometría dinámica.

La metodología propuesta pretende combinar la utilización del software con la lectura crítica de documentos teóricos y, su ejemplificación con el análisis de actividades de secundaria en Cabri-Géomètre. Esto permite desarrollar el espíritu crítico y la reflexión de los alumnos sobre el conocimiento formal que poseen, como etapa anterior al conocimiento útil para enseñar.

Relativo a las competencias, Murillo y Marcos (2009) nos presentan un modelo para potenciar y analizar el desarrollo de ciertas competencias matemáticas, por parte de alumnos de ESO, cuando desarrollan trabajo colaborativo en un entorno interactivo de aprendizaje que utiliza soportes informáticos. De otra manera, Richard (2010) hace un estudio del aporte mutuo de los textos clásicos y la geometría dinámica para el aprendizaje de la geometría. En este artículo, a partir de una experiencia con alumnos de bachillerato, se muestra cómo se pueden desarrollar sus competencias matemáticas a través de una interpretación del texto de Clairaut: *Éléments de géométrie* y el uso conjunto de software de geometría dinámica (Cabri II Plus).

Otro lenguaje básico en la enseñanza-aprendizaje de la geometría es el Geogebra en nuestro caso solamente hemos encontrado una publicación (Iaranzo y Fortuny, 2009) que ya ha sido comentada.

Dentro de este apartado de recursos informáticos, Real (2008a, 2008b y 2009) nos presenta tres aplicaciones de software libre relacionada con la geometría.

El primero es la presentación de Dr. Geo, una aplicación geométrica libre, que permite el estudio de la geometría plana de una forma interactiva. En el segundo caso nos muestra GTANS, un tangram que combina los puzzles con las figuras geométricas, y por último, la aplicación tecnológica denominada Superficies en 3D para el estudio de poliedros, gráficas, superficies de revolución, superficies paramétricas y muchas otras figuras. En todos los artículos encontramos las explicaciones necesarias para el manejo del software, así como ejemplos prácticos.

Los medios audiovisuales de comunicación están provocando en los alumnos, y en la sociedad en general, grandes cambios en sus formas de percibir y en sus procesos mentales debido al paso de una cultura escrita a una cultura audiovisual. Hay que hacer hincapié en la importancia de los modelos visuales para la adquisición de conceptos geométricos y para fomentar la habilidad de los alumnos a la hora de dar razones lógicas que expliquen y le hagan comprender la validez de las fórmulas geométricas. Es importante observar la importancia que va ganando en el aprendizaje de la geometría la visualización mental de problemas geométricos.

8.- CONCLUSIONES

Dentro del trabajo general (Barrantes y Balletbo, 2011) realizado con todos los niveles de educación, hay que destacar que la mayoría de los trabajos está destinados a estudios en Educación Secundaria lo que indica la preocupación sobre la mejora de las enseñanzas y aprendizajes en este nivel educativo.

Con respecto a Secundaria, nos es grato observar como aumentan las inves-

tigaciones y trabajos dedicadas a la resolución de problemas y a la utilización de recursos, hasta ahora recomendados pero poco usados, como son la historia y la relación de Geometría con las mismas matemáticas o con otras materias como pueden ser las manifestaciones artísticas.

Los trabajos sobre materiales, papel, espejos, cubo soma, rompecabezas... vienen a ayudar en el aprendizaje y la enseñanza de los conceptos geométricos, como una manera de tomar contacto con las formas geométricas, y nos muestran que en este nivel de Secundaria, también es necesaria la manipulación para una mayor abstracción posterior de conceptos complejos.

Por otra parte, continua la creciente importancia que tienen las investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje en formación inicial de profesores. Es de especial interés, el aprendizaje de los contenidos geométricos y las ideas erróneas de los alumnos es decir, reflexionar sobre los distintos obstáculos y errores que hacen que éstos desarrollen esquemas conceptuales incompletos o mal construido sobre: conceptos, propiedades, clasificaciones, etc. Son interesantes las recomendaciones, basadas en una metodología constructiva, para corregir y erradicar

estos obstáculos y errores que impiden un eficaz aprendizaje de la geometría.

Al aprendizaje significativo contribuyen también, los numerosos trabajos de la geometría con programas como son Cabri, GeoGebra u otros de software libre, cuya principal característica es una enseñanza dinámica muy intuitiva mediante el movimiento.

Toda esta tecnología, los materiales, las actividades y las reflexiones que hemos comentado en estos artículos, consideramos que contribuyen al cambio de concepciones en el profesorado hacia la necesidad de implantar, de una vez por todas, una metodología activa pensando en el alumno, y no en los contenidos como tradicionalmente se ha hecho hasta ahora.

Este artículo, además pueden servir como referencia de base teórica para tesis, proyectos y otros trabajos académicos, en la que se brinda al investigador datos actualizados sobre temas relacionados con el área de didáctica de la geometría. También, el profesor de Secundaria, tiene un material a su alcance que presenta propuestas nuevas y adecuadas, que le garantizan mejores resultados en su actividad docente y de desempeño en el aula.

REFERENCIAS

- ALEDO, J.A. y CORTÉS, J. C. Suma geométrica de series numéricas. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2001, n.27, pp. 105-114
- BARRANTES, M. Caracterización de la enseñanza aprendizaje de la geometría en primaria y secundaria. *Campo abierto*, 2003, n. 24, pp. 15-36
- BARRANTES, M y BLANCO, L. J. A study of prospective Primary teacher`s conceptions of teaching and learning geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v.9, 2006, n°, pp. 411-436.
- BARRANTES, M. y ZAPATA, M. A. Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo abierto*, 2008, v 27, n. 1, pp. 55-71
- BARRANTES, M. y BALLEBBO, I. *La enseñanza – aprendizaje de la geometría en revistas científicas españolas de mayor impacto de la última década*. Gobernación de Misiones – Universidad Nacional de Pilar. Asunción, Paraguay: Litocolor S.R.L. 2011.
- BERMEJO, A.. El libro de espejos: aplicaciones didácticas. *Suma*, 2002, n. 41, pp.83-92
- BLANCO, C.; OTERO, T. y PEDREIRA, A. Rompecabezas matemáticos en papel : tetraedro, octaedro y estrella octángula. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2010, n.53, pp. 92-104
- CORRALES, C. Salvador Dalí y la cuestión de las dimensiones. *Suma*. 2004, n.47, pp. 99-108
- CORRALES, C. (a). Escher I: las matemáticas para construir. *Suma*. 2005 a,49, 101-108
- CORRALES, C. (b). Escher II: las matemáticas para pensar. *Suma*.2005, n. 50, pp.109-117
- CORTÉS J. C. y CALVO, G. El método de Descartes para trazar normales a curvas. *Suma*, 2004, n. 47, pp.41-46
- ESCRIBANO, J. R. Algunas demostraciones del valor de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia. *Suma*, 2000, n. 35, pp. 71-74
- FERNÁNDEZ, I. y REYES, M. E. Construcciones y disecciones del octógono. *Suma*, 2001, n.38, pp. 69-72
- FERNÁNDEZ, I. y REYES, M. E. Polígonos y estrellas. *Suma*, 2005, n. 49, pp. 7-14.
- FERNÁNDEZ, A. y PRIETO, M. Icosaedro y ph. *Suma*, 2005, n. 48, pp. 23-32
- FIGUEIRAS, L.; MOLERO, M.; SALVADOR, A. y ZUASTI, N. Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales. *Suma*, 2000, n. 35, pp. 45-54
- FLORES, P. Laberintos con alambre (estructuras topológico-métricas). *Suma*, 2002, n. 41, pp. 19-28
- FORTUNY, J. M. y GIIMÉNEZGiménez, J. Razonamientos geométricos de alto nivel y actividades pre demostrativas con alumnos y alumnas de doce a dieciséis años. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2001, n. 28, pp. 20-38
- FORTUNY, J.Mª. Materiales y recursos. Geometría en Primaria y Secundaria. En Barrantes, M. (ed.) (1998): *La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria*. Badajoz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. 1998.

- GARCÍA, I. y ARRIERO, A. C. Una experiencia con Cabri: las curvas cónicas. *Suma*, 2000, n. 34, pp. 73-80
- GARCÍA, M. El Tolmo de Minateda: historia y matemáticas. *Suma*. 2005, n.51, pp. 41-50
- GARRIDO, M. B. (2010). Orisangakus: problemas sangaku con papiroflexia como recurso para el estudio de la geometría. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 20010, n. 53, pp. 71-79
- GONZÁLEZ, M. J. y LUPIÁÑEZ, J. L. Formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria: actividades basadas en la utilización de software de geometría dinámica. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2001, n. 28, pp. 110-125
- GORGORIÓ, N.; ARTIGUES, F. I.; BANYULS, F.; MOYANOS, D.; PLANAS, N. y ROCA, M. Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones. *Suma*, 2000, n. 33, pp. 59-71
- GRANADOS, A. B.; GRAU, A. y NÚÑEZ, J. La banda de Möbius: un camino que te llevará de cabeza. *Suma*, 2007, n. 54, pp. 15-22
- GRUPO ALQUERQUE. Cubo de Muñoz. *Suma*, 2001, n. 37, pp. 113-115
- GRUPO ALQUERQUE. Rompecabezas del teorema de Pitágoras. *Suma* 2003, n. 43, pp. 119-120
- GRUPO ALQUERQUE. Cuadraturas de polígonos regulares. *Suma*, 2005, n. 48, pp. 65-68
- GRUPO ALQUERQUE. Estrella de seis puntas. *Suma*, 2007, n. 56, pp. 81-85
- GRUPO ALQUERQUE. Doblar y cortar (kirigami geométrico). *Suma*, 2008, n. 59, pp. 55-58
- GUILLÉN, G. Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos: ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 2000, v. 18, n. 1, pp. 35-53
- GUTIÉRREZ, S. Jakob Bernoulli: la geometría y el nuevo cálculo. *Suma*, 2006, n. 51, pp. 89-92
- HOYOS, V. Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 2006, v. 24, n. 1, pp.31-42
- IRANZO N. y FORTUNY J. M. La influencia conjunta del uso de geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencia del alumnado. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 2009, v. 27, n. 3, pp. 433-445
- IBÁÑEZ, M. Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento. *Suma*, 2001, n. 37, pp. 95-98
- ILLANA, J. Matemáticas y astronomía en Mesopotamia. *Suma*, 2008, n. 58, pp. 49-61
- LEDESMA, A. Aventuras y desventuras matemáticas de un folio DIN-A en el instituto. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2010, n. 53, pp. 45-70
- MARTÍN El Greco en otra dimensión. *Suma*. 2008, n. 59, pp. 67-72
- MERCADO, A. I y CUSTODIO, M. Z. Diseñando camisetas: un viaje por la geometría nazarí. *Suma*, 2005, n. 49, pp. 33-35
- MERCADO, A. I. Elaboración de materiales didácticos para el aula de matemáticas con papel maché. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2010, n. 53, pp. 105-111

- MILLÁN, A. Leon Battista Alberti, la ingeniería y las matemáticas del Renacimiento. *Suma*, 2004, n. 47, pp. 93-97
- MORA, J. A. Geometría de ayer y de hoy. *Suma*, 2002, n. 39, pp. 77-82
- MOREIRA, E. Enseñar y aprender matemáticas con origami. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2010, n. 53, pp. 25-37
- MORENO, J. C. Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales. *Suma*, 2002, n. 40, pp. 91-104
- MORENO, J. C. (a). Triángulos y tetraedros fractales. *Suma*, 2003 a, n. pp. 44, 3-24
- MORENO, J. El juego del caos en la calculadora gráfica: construcción de fractales. *Suma*, 2003 b, n. 42, pp. 69-79
- MUNNÉ, J. Distintas formas de deducción de las fórmulas trigonométricas de suma o resta de ángulos. *Suma*, 2002, n.39, pp. 33-36
- MURARI, C y PÉREZ, G. Caleidoscopios educativos: coloraciones múltiples. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2001, n. 27, pp. 7-20
- MURILLO, J y MARCOS, G. Un modelo para potenciar y analizar las competencias geométricas y comunicativas en un entorno interactivo de aprendizaje. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 2009, v. 27, n. 2, pp. 241-256
- PÉREZ, A. Cabri e Internet. *Suma*, 2000, n. 36, pp. 113-115
- PÉREZ, U.; ÁLVAREZ, M. y PORTA, P. Historia y enseñanza de la geometría: cuadrando el círculo en el aula. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2008, n. 49, pp. 111-117
- PICHEL, J. M. Requiteoremas: reiventando teoremas en geometría con Cabri II. *Suma*, 2000, n. 36, pp.17-22
- PINYOL, A. Equivalencia entre cualquier polígono regular o irregular y un triángulo equilátero. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2007, s. 44, 104-109
- PRADA, M. D. de . Marco metodológico para la atención a la diversidad: una experiencia en el área de matemáticas. *Revista de educación*, 2003, n. 330, pp. 419-447
- RAMÍREZ, R. Matemáticas en la elaboración de estrellas: demostraciones en cartulina flexa. *Suma*, 2005, n. 49, pp. 37-46
- REAL, M. Las cónicas: método de aprendizaje constructivo. *Suma*, 2004, n. 46, pp. 71-77
- REAL, M. (a). Dr. Geo: una aplicación geométrica libre. *Suma*, 2008, n. 58, pp. 75-80
- REAL, M. (b). Matemáticas lúdicas. *Suma*, 2008, n. 59, pp. 61-66
- REAL, M. Representación de poliedros y superficies con una aplicación TIC. *Suma*, 2009, n. 60, pp. 63-71
- REDONDO, A. Los números mórficos en secundaria. *Suma*, 2008, n. 57, pp. 55-64
- REDONDO, A. y HARO, M. J. Experiencia sobre la aproximación intuitiva en Geometría: una aproximación del número pi en la ESO. *Suma*, 2002, n. 1, pp. 69-75
- REDONDO, A. y HARO, M. J. (2004). Actividades de geometría fractal en el aula de Secundaria (I). *Suma*, 2004, n. 47, pp. 19-28
- REDONDO, A. y HARO, M. J. Actividades de geometría fractal en el aula de Secundaria (II). *Suma*, 2005, n. 48, pp. 15-21

- RICHARD, A. Textos clásicos y geometría dinámica: estudio de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 2010, v. 28, n. 1, pp. 95-112
- ROMERO, J. B. Una propiedad del triángulo isósceles. *Suma*, 2001, n. 37, pp. 63-66
- ROYOR, J. I. Matemáticas y papiroflexia: una relación bidireccional. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2010, n. 53, pp. 11-24
- RUBIO, J. P. Descubriendo los sólidos platónicos. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 2010, n. 53, pp. 80-91
- RUÍZ, G. Sobre la utilidad de la Geometría en la enseñanza de la Probabilidad. *Suma*, 2001, n. 37, pp. 67-74
- THIBAUT, E. Proyecto cube: una introducción a la geometría tridimensional. *Suma*, 2004, n. 47, pp. 11-18
- TORREGROSA, G.; HARO, M. J. y LLINARES, S. Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico: desarrollo de un entorno virtual de aprendizaje. *Revista de educación*, 2010, n. 352, pp. 379-404
- VARO, A. J. La regla de los signos. *Suma*, 2000, n. 34, pp. 69-71
- USÓN, C. y RAMÍREZ, Á. En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal: la autoría. *Suma*, 2005, n. 48, pp. 57-63