

# Diseño de un modelo de análisis financiero dinámico (DFA) aplicado al seguro de automóvil español

Luis A. Otero González • Pablo Durán Santomil  
Universidad de Santiago de Compostela

RECIBIDO: 19 de junio de 2006

ACEPTADO: 5 de noviembre de 2007

**Resumen:** La puesta en marcha del proyecto Solvencia II en el sector asegurador obligará a que las compañías dispongan de herramientas de análisis del riesgo adecuadas a las exigencias de la nueva regulación. En algunos países se está trabajando en el desarrollo de técnicas que bajo la denominación de Análisis Financiero Dinámico (DFA) permitan llevar a cabo dicha tarea. En este contexto, nuestro trabajo tiene por objeto construir un modelo DFA aplicable a las compañías de seguros españolas. En su diseño se han tenido en cuenta los estudios precedentes y el objetivo final, que en nuestro caso es la medición del riesgo de la compañía. Como resultado final hemos diseñado una aplicación que permite realizar simulaciones estocásticas del excedente y evaluar el riesgo en operaciones de seguros no vida a medio y largo plazo. En particular analizamos los resultados de llevar a cabo dos estrategias diferentes en el ramo de seguros de automóvil.

**Palabras clave:** Análisis financiero dinámico (DFA) / Gestión del riesgo / Compañías de seguros de no vida / Modelación estocástica / Solvencia II.

## Designing a Dynamic Financial Model (DFA) Applied to the Spanish Car Insurance Activity

**Abstract:** The starting of Solvency II project will force the application of new risk analysis tools adapted to the requirements of the new regulation. In this context, in some countries Dynamic Financial Analysis (DFA) has been developed as a technique to the modelization of the assets and liabilities of the insurance companies. The main objective of this work is to construct a DFA model adapted to the Spanish insurance companies. In the design we have considered preceding studies and the application for the measurement of the risk of the company. As a result of the work we show a model which allows to accomplish stochastic simulations of the surplus in order to evaluate the risk in operations of Spanish non-life insurance companies. In particular we analyse the case of two different strategies in the car insurance activity.

**Key Words:** Dynamic financial analysis (DFA) / Risk management / Non-life insurance / Stochastic modelling / Solvency II.

## INTRODUCCIÓN

La necesidad de medir el riesgo está cobrando un gran interés en las entidades financieras, y en concreto en las compañías de seguros. El entorno competitivo en el que se desarrolla la actividad, los recientes escándalos financieros y los cambios en la regulación que se avecinan, especialmente la puesta en marcha de Solvencia II, han impulsado la aplicación de técnicas de evaluación del riesgo. Dentro de estas últimas destaca particularmente el análisis financiero dinámico, comúnmente conocido como Dynamic Financial Analysis (DFA<sup>1</sup>). Bajo esta denominación se engloban los modelos de simulación estocástica del negocio asegurador que permiten evaluar el impacto de las decisiones estratégicas sobre el riesgo y la rentabilidad de sus operaciones. La característica más importante del DFA es que ofrece una visión integrada del activo y pasivo de la compañía, frente al análisis clásico, donde los riesgos técnicos y financieros se analizan por separado. Además, su ámbito de aplicación no se limita al análisis del riesgo, pudiendo

ser utilizado para evaluar estrategias de inversión, calcular niveles de capital ajustados al riesgo, valorar productos y analizar resultados<sup>2</sup>.

El impulso definitivo de las técnicas de análisis dinámico se producirá tras la entrada en vigor de Solvencia II, ya que al vincular el capital al nivel de riesgo, las compañías de seguros tendrán que disponer de modelos internos para determinar las necesidades de recursos propios. En este sentido Lozano (2005) indica que el nuevo proyecto de solvencia generalizará los sistemas de gestión de riesgos e impulsará la construcción de modelos internos por parte de las compañías de seguros. Por otra parte, el mercado penalizará a aquellas compañías que carezcan de modelos y les aplicará una prima de riesgo.

En cuanto a la difusión de esta técnica, destacan los desarrollos llevados a cabo en Reino Unido, Canadá o Estados Unidos, y en concreto las aportaciones de autores como Wilkie (1986, 1995), Pentikainen *et al.* (1982, 1989), Daykin *et al.* (1987, 1990), Hibbert *et al.* (2001), Ahlgrim *et al.* (2004a, 2004b, 2004c), D'Arcy *et al.*

(1997, 1998) y Kaufmann *et al.* (2001). A su desarrollo también han contribuido instituciones como la CAS (Casualty Actuarial Society) y la SOA (Society of Actuaries) a través de la financiación de proyectos en el ámbito académico y profesional. Frente a esta situación, el sector asegurador español tiene poca experiencia en la implantación de técnicas DFA y necesita modelos adaptados a las características de su actividad<sup>3</sup>.

Nuestro trabajo tiene como objetivo construir un modelo DFA orientado a evaluar el riesgo financiero en el ámbito de los seguros no vida. El diseño del mismo se ha basado en trabajos precedentes y en concreto en aquellos realizados en los mercados norteamericano y europeo. Una vez seleccionadas las variables que afectan a la evolución del activo y pasivo, hemos definido su comportamiento aleatorio o determinista, así como la relación existente entre las mismas. A continuación hemos desarrollado un modelo de simulación a través de la aplicación @risk que permite hacer proyecciones estocásticas de los activos y pasivos en un horizonte temporal de 5 años. Dicho modelo se ha empleado finalmente para evaluar el riesgo de una compañía que opera en el ramo de seguros de automóvil.

## DEFINICIÓN Y ESTRUCTURA DE UN MODELO DFA

En la actualidad no existe una definición precisa sobre el término DFA. Según la Casualty Actuarial Society (2000) es la aplicación de la modelación financiera para evaluar el comportamiento, ante un número amplio de escenarios, de los indicadores financieros frente a cambios en los factores internos y externos que afectan a la actividad aseguradora. Asimismo, Szkoda (1997) define DFA como el proceso que permite analizar la solvencia de una compañía aseguradora, entendiendo por ésta la capacidad del capital y del excedente para llevar a cabo las operaciones futuras en condiciones de solvencia ante un entorno futuro desconocido. No obstante, D'Arcy *et al.* (1998) aportan una definición que no se limita al análisis de la solvencia, el objeto principal con el que nacen estos modelos, y que posiblemente condiciona la definición aportada por Szkoda. Estos autores indican que

es un proceso que examina la situación financiera de una aseguradora a lo largo del tiempo, teniendo en cuenta las interrelaciones entre las distintas partes y la naturaleza estocástica de los factores que pueden influir en los resultados.

La relativa novedad de las técnicas de análisis financiero dinámico y la extensión de su ámbito de aplicación a nuevas áreas, ha dado lugar a que no exista un consenso respecto al significado concreto del término. En este sentido algunos profesionales del sector incluyen la gestión de activos y pasivos (Asset-liability-Management ALM) dentro de las soluciones DFA<sup>4</sup>, mientras que autores como Eling y Parnitzke (2006) o Shiu (2006) consideran que DFA es una técnica más de gestión de activos y pasivos. Frente a éstos, Kaufmann *et al.* (2001) y Kessner y Peter (2004) contribuyen a aumentar la confusión al considerar la independencia de ambos enfoques e indicar que DFA es aplicable exclusivamente a los seguros no-vida, mientras que ALM centra su objetivo en el seguro de vida. Por último, Gortvet (1998) y Cumberworth *et al.* (2000) consideran que ambas técnicas persiguen objetivos similares en la empresa, opinión que compartimos al considerar que DFA es un conjunto de técnicas y herramientas que no tienen un área de acción limitada al seguro de no-vida, sino que con las oportunas adaptaciones puede ser aplicable a ambas actividades. Asimismo, entendemos por DFA aquel proceso que consiste en la simulación de la actividad aseguradora de forma integral a través de la modelación estocástica de las variables determinantes de la evolución de los activos y pasivos con fines alternativos. En este sentido queremos destacar que si bien una de las principales finalidades con las que se utiliza DFA es la evaluación del riesgo y las necesidades de capital inherentes al mismo, sus usos se extienden a la evaluación de estrategias inversoras, al análisis del reaseguro y la valoración de productos.

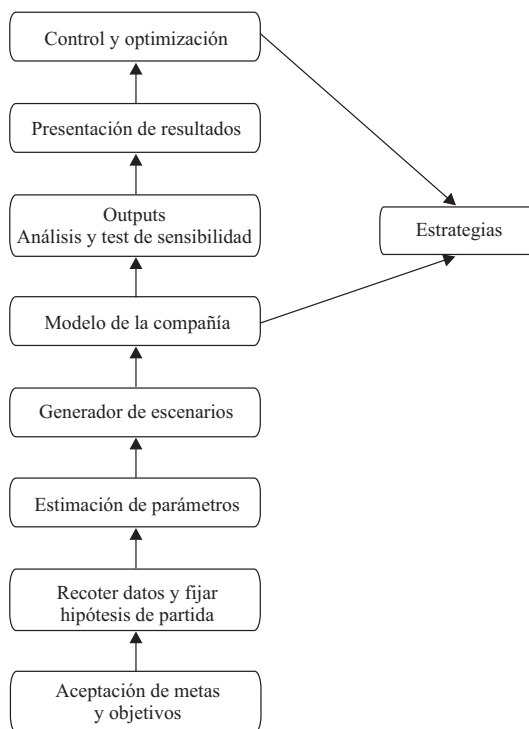
A continuación se recogen las etapas que habitualmente integran el proceso DFA y que hemos sintetizado en los siguientes apartados (figura 1):

- *El proceso de DFA precisa la concreción de las metas u objetivos.*
- *Recogida de datos y fijación de hipótesis de partida.* Una condición necesaria para desarro-

lar un buen modelo DFA es la buena calidad de los datos históricos relativos tanto al activo como al pasivo. Dicha información servirá para explicitar las hipótesis que utilizará el modelo para proyectar el activo y el pasivo.

- *Generador estocástico de escenarios.* Se trata del elemento central del modelo DFA, en el cual se explicitan los modelos estocásticos seleccionados para proyectar los factores de riesgo que afectan a la compañía.
- *Estimación de los parámetros o calibración de los modelos.* Consiste en encontrar los valores de los parámetros que permitan construir escenarios consistentes y realistas.
- *Proyección del excedente y análisis del riesgo.* A partir de la proyección del excedente, constituido por el valor del flujo de caja y del patrimonio de la compañía, se pueden calcular diversos indicadores de riesgo que permitan evaluar la actividad.
- *Control y optimización.* Una vez identificadas las estrategias óptimas se pueden llevar a cabo acciones que permitan adecuar los resultados a los objetivos de la compañía.

**Figura 1.-** Estructura de un modelo DFA



FUENTE: Elaboración propia a partir de Burkett *et al.* (2001).

## MODELACIÓN FINANCIERA DEL ACTIVO Y PASIVO

Un elemento crítico del análisis financiero dinámico es la modelación de las variables aleatorias que determinarán la evolución de los flujos de caja de activo y pasivo, así como el valor del patrimonio del asegurador. Para tal fin existen múltiples alternativas, si bien, tal y como señalan Kaufmann *et al.* (2001), debe buscarse un equilibrio entre la precisión y el grado de complejidad. En muchos casos el aumento de complejidad puede dificultar la implementación a partir de datos de mercado o la comprensión por parte de los usuarios. Por otra parte, es fundamental considerar la interrelación entre las variables así como los factores de riesgo relevantes para el negocio en cuestión. Asimismo, tal y como indican Hibbert *et al.* (2001), el modelo debe ser lo más sencillo posible, siempre y cuando mantenga las características más importantes del problema. Tampoco se puede pretender construir un modelo definitivo y el perfeccionamiento sobrevendrá con la evolución del mismo. En este apartado, atendiendo a las consideraciones anteriores, explicamos diferentes alternativas para modelar los activos y pasivos, así como la alternativa elegida para cada caso concreto.

### MODELACIÓN DEL PASIVO PARA OPERACIONES DE SEGUROS NO VIDA

A la hora de modelar el pasivo hemos de considerar los diferentes elementos que afectan a los pagos del asegurador en el futuro. En los seguros no vida, la cuantía de los pagos viene determinada por la frecuencia de los siniestros, a partir de la cual se determina el número de siniestros que se producen dentro de un colectivo, y del coste medio por siniestro. No obstante, es preciso tener en cuenta otros aspectos relevantes como son la antigüedad de la póliza o el efecto que puede tener la inflación, tanto sobre el coste medio como sobre la frecuencia.

#### Frecuencia y coste medio

La determinación de los pagos que la compañía va a realizar requiere la especificación del número de siniestros previsto y de la cuantía

media por siniestro. Para simular el comportamiento de ambas variables es preciso disponer de una serie histórica suficientemente amplia de la frecuencia<sup>5</sup> y del coste medio y analizar la función de distribución a la que mejor se ajustan dichos datos. En este sentido, Kaufmann et al. (2001) utilizan una distribución binomial negativa para modelar la frecuencia de siniestros ( $F_j$ ) y una distribución Gamma para el coste medio ( $X_j$ ). Para ello se toman como variables de referencia las medias y las desviaciones estándar que surgen del análisis de los datos históricos. En el caso del DynaMo 3<sup>6</sup> se utiliza una distribución normal, tanto para la frecuencia media de siniestros como para el coste medio. Para los riesgos catastróficos, emplea una distribución de Poisson para el número de siniestros y una distribución lognormal para el coste medio. El modelo permite que los parámetros de la frecuencia y del coste medio, así como la distribución subyacente de cada uno, se diferencien según el tipo, o la línea del negocio.

En el modelo utilizado, las cuantías a pagar por siniestros las determinamos a partir de la siguiente expresión:

$$P_t^j = F_t^j \times N_t^j \times X_t^j$$

donde  $F_t^j$  es la frecuencia media en  $t$  de la línea de producto  $j$ ;  $N_t^j$  es el número de exposiciones al riesgo en el momento  $t$  de la línea  $j$ ;  $X_t^j$  es el coste medio modelado en el momento  $t$  de la línea  $j$ .

Al simular la siniestralidad también se pueden tener en consideración otros aspectos y en concreto:

- La antigüedad de las pólizas (“aging phenomenon”). Según diversos autores<sup>7</sup> la ratio de siniestralidad disminuye para aquellas pólizas que tienen una mayor antigüedad. Por este motivo suele ser habitual establecer una frecuencia mayor para las pólizas nuevas para ajustar mejor la simulación al comportamiento observado.
- También es preciso tener en cuenta si la inflación afecta tanto a la cuantía como a la frecuencia de los siniestros. En el caso concreto del coste medio es obvio que el importe me-

dio de los siniestros debe ser ajustado por inflación. Por otra parte, a nivel empírico se ha constatado que bajo ciertas condiciones económicas, los asegurados declaran más siniestros en entornos de elevada inflación. De ser relevante dicho impacto sobre los resultados sería necesario conocer la influencia de la variable inflación sobre la frecuencia. Kaufmann et al. (2001) proponen estimar dicha relación de forma lineal y luego proyectarla a través de la función estimada, a la cual se le sumará un movimiento browniano estándar, donde la volatilidad de los residuos será la observada históricamente.

En nuestro modelo, tras analizar el ajuste de los datos históricos para los últimos años hemos comprobado que las distribuciones que mejor representan las variables son el valor extremo para modelar la frecuencia media y la distribución normal para el coste medio. La proyección del coste medio se hará como:

$$X_j^t = N(\mu_T, \sigma_T) \times (1 + i_t)$$

donde  $\mu_T$  es la media histórica del coste medio ajustado por inflación;  $\sigma_T$  es la desviación típica del coste medio; e  $i_t$  es la tasa de inflación simulada en tiempo  $t$ .

### El patrón de pagos de los siniestros

Los patrones de pago recogen el ritmo al cual se producen los pagos de los siniestros, de ahí que si se pretende reproducir fielmente la actividad aseguradora será necesario especificar qué porcentaje se paga cada ejercicio y durante cuánto tiempo se extienden los pagos. Dicho patrón puede modelarse de forma determinista, como un porcentaje pagado cada año a partir del momento en el que se produce el siniestro, o de forma estocástica (Kirschner y Scheel, 1998). En este primer modelo aplicado al seguro de autos, hemos optado por no incluir el patrón de pagos y considerar que los siniestros se pagan dentro de cada período. Esto es debido a que según los datos aportados por ICEA (2005), la liquidación media del siniestro se hace, en la mayor parte de los casos, en el mismo período, de ahí que su exclusión tenga un efecto marginal.

### La tarificación de los seguros y el ciclo asegurador

Una variable técnica fundamental que afecta a los ingresos de la compañía es la prima o precio que cobrará la compañía por cada póliza vendida. Su simulación no es una tarea sencilla, ya que si se fija atendiendo a la siniestralidad, sería preciso establecer un algoritmo que recalculase la prima en función de los nuevos datos de siniestralidad. Adicionalmente, sería necesario considerar la situación del mercado, lo que se denomina el ciclo asegurador, ya que en función del nivel de competencia la compañía deberá establecer primas más o menos ajustadas. En el caso concreto del modelo DynaMo 3<sup>8</sup> dicho ciclo se simplifica y se establece una cadena de Markov, con cuatro posibles estados de la naturaleza que combinan diferentes niveles de intensidad de la competencia y de madurez del mercado. Esta opción también es propuesta por Kaufmann *et al.* (2001), quien diferencia tres posibles estados de competencia (débil, media y fuerte). En el estado de competencia débil, la compañía de seguros exige primas elevadas ya que aún así puede aumentar su cuota de mercado. En el estado 3 (competencia fuerte) la compañía de seguros tiene que aceptar primas bajas para mantener por lo menos su cuota de mercado actual. Si se asume un entorno estable, las altas primas son equivalentes a un excedente alto del margen de beneficio, y las primas bajas igual a un margen de beneficio bajo.

### MODELACIÓN ESTOCÁSTICA DEL ACTIVO Y OTRAS VARIABLES ECONÓMICAS

Han sido diversos los autores que han propuesto modelos estocásticos para la proyección de activos a largo plazo cuyas ideas pueden ser tenidas en cuenta en el diseño de un modelo DFA. Una referencia ineludible en el ámbito actuarial es el modelo propuesto por Wilkie<sup>9</sup> (1986,1995). Este autor utiliza una estructura de cascada<sup>10</sup> de causalidad unidireccional, donde la variable principal es la inflación y el resto de los factores<sup>11</sup> se determinan a partir de ésta. También destacan en este campo las aportaciones de Daykin *et al.* (1994) y Yakoubov *et al.* (1999) quienes recurren a una estructura de cascada, pe-

ro introduciendo nuevas alternativas en la modelación como son el cambio de régimen para proyectar la rentabilidad de las acciones y un proceso autorregresivo para la determinación de los dividendos.

Frente a estos modelos orientados por la inflación, las propuestas de análisis financiero dinámico utilizan como el elemento conductor el tipo de interés<sup>12</sup>. Dentro de este grupo se encuadra el trabajo de D'Arcy *et al.* (1997,1998) quienes desarrollaron el programa de acceso público DynaMo. Por otra parte, Hibbert *et al.* (2001) proponen como alternativa el uso del modelo de dos factores basado en Hull and White (1994), tanto para los tipos de interés reales como para la inflación. En esta misma línea, Ahlgrim *et al.* (1999, 2001, 2004a, 2004b) y Kaufmann *et al.* (2001) introducen nuevas propuestas de modelación de los activos y pasivos. Las diferencias entre unas u otras propuestas difieren básicamente en el modelo generador de tipos de interés y en la forma de vincular las variables para generar los escenarios. Otro elemento importante es la consideración de volatilidades constantes o estocásticas dentro de los modelos.

### Tipos de interés y estructura temporal

Tal y como expusimos anteriormente, en la mayoría de los modelos DFA, el tipo de interés es la variable que constituye el elemento fundamental al cual se vinculan el resto de las variables. La dinámica de la estructura temporal de tipos de interés (ETTI) afecta tanto a los activos como a los pasivos<sup>13</sup>, y en concreto a la valoración de la cartera de inversión, a las tasas de reinversión y endeudamiento, al comportamiento de los asegurados y a otras variables financieras. Por este motivo, una parte esencial dentro del análisis financiero dinámico es la selección del modelo de tipos de interés que se aplicará. Dicha cuestión no es evidente ya que existen muchas alternativas y no siempre está claro cual de ellas es la más apropiada.

Dentro de los modelos de tipos de interés puede optarse por los que determinan la ETTI de forma determinista<sup>14</sup> o aquellos que lo hacen de forma estocástica. En el caso de estos últimos, que son los que se aplican en los modelos DFA, podemos diferenciar entre:

- Los *modelos de equilibrio*. Los cambios en los tipos de interés se derivan de los agentes económicos quienes maximizan su utilidad. Tienen como ventaja la sencillez pero pueden generar curvas que no se ajustan a las reales. Dentro de estos incluimos el modelo de Vasicek (1977), Dothan (1978), Cox, Ingersoll y Ross (CIR) (1980) o CIR (1985).
- Los *modelos libres de arbitraje* que asumen la hipótesis de que no existen oportunidades de arbitraje en el mercado, es decir, no hay una estrategia financiera que sin asumir riesgo nos reporte una ganancia. Desafortunadamente, estos modelos son con frecuencia más difíciles de utilizar. Como ejemplos citamos a Ho y Lee (1986) y Heath, Jarrow y Morton (HJM) (1992).

Ante el gran número de modelos existentes, un criterio de elección, puede ser que las proyecciones se ajusten a las características observadas en la realidad y que Rebonato (1998) resume en:

- 1) *La volatilidad de tipos de diversa madurez varía*. En particular, los tipos a largo plazo no varían tanto como los tipos a corto plazo.
- 2) *Los tipos de interés revierten a la media*. Históricamente los aumentos del tipo de interés se acompañan de disminuciones y viceversa.
- 3) *Los tipos de interés de diversa madurez se correlacionan imperfectamente*. El grado de correlación decrece a medida que los vencimientos están más alejados.
- 4) *Consistencia de los tipos de interés*. Los tipos nominales no deben ser negativos ni permitir valores extremadamente elevados.
- 5) *Se ha observado que la volatilidad de los tipos a corto plazo carece de homocedasticidad*. De acuerdo con los resultados divulgados en Chan *et al.* (1992), la volatilidad de los tipos de interés debe ser proporcional al nivel de los tipos.

Al margen del cumplimiento de los apartados anteriores, que sugieren una adecuación de las proyecciones a las observadas en la realidad, otros criterios que se pueden tener en cuenta son la simplicidad y la facilidad de implementación a partir de parámetros que puedan ser estimados

con facilidad con información del mercado<sup>15</sup>. En este sentido, en ocasiones la aplicación de un modelo mucho más complejo no conlleva excesivas mejoras en el modelo y no se adecua a la información disponible.

Dos decisiones fundamentales en el diseño de un modelo DFA son la elección entre modelos de equilibrio o de arbitraje y el número de factores del modelo. Respecto a la primera cuestión, Gibson *et al.* (2001) señalan que no existe un modelo válido para cualquier uso sino que cada tipo tiene sus ventajas y desventajas<sup>16</sup>. No obstante, el DFA se centra en la proyección a largo plazo, y para estos casos Ahlgrim *et al.* (1999) indican que los modelos de equilibrio son más apropiados. Esto es debido a que los modelos sin arbitraje pueden tender a niveles poco realistas (valores extraordinariamente altos o negativos) cuando se utilizan en proyecciones a largo plazo. En cuanto al número de factores, también Ahlgrim (2001) llega a la conclusión de que un modelo de un factor es suficiente para un modelo de DFA de una compañía aseguradora de no vida<sup>17</sup>. Introducir más factores posibilita una gama más completa de movimientos y formas de la curva, pero por contra aumenta rápidamente la complejidad y la manejabilidad del modelo. Dentro de los modelos de un factor, el CIR (1985) es el que logra un mejor equilibrio entre complejidad y exactitud, tal y como indican D'Arcy *et al.* (1998), Ahlgrim *et al.* (1999), Ahlgrim (2000) y Kaufmann *et al.* (2001).

Dado que nuestro modelo se centra en seguros no vida y atendiendo a las recomendaciones anteriores hemos optado por seleccionar el modelo de Cox, Ingersoll y Rox (1985). A través de este modelo se puede generar una amplia gama de curvas de tipos de interés, y se garantiza en su forma continua que los tipos de interés no sean negativos. No obstante, nuestra propuesta puede ser fácilmente adaptada a cualquier otro tipo de modelo de tipo de interés, e incluso incorporar diferentes modelos para analizar cuál es el más adecuado.

Este modelo describe la dinámica del tipo de interés a corto plazo como un proceso de reversión a la media:

$$dr_t = \kappa_r (\theta_r - r_t) dt + \sigma_r \sqrt{r_{t-1}} Z_t$$

Para nuestro propósito se utiliza la versión discreta del modelo que se aproxima como sigue:

$$r_t = r_{t-1} + a(b - r_{t-1}) + s\sqrt{r_{t-1}}Z_t$$

donde  $r_t$  es el tipo de interés a corto plazo;  $a$  es la constante que representa la velocidad de reversión del tipo de interés a su media a largo plazo;  $b$  es la media a largo plazo del tipo de interés;  $s$  es la volatilidad o desviación estándar del proceso de tipo de interés; y  $Z_t$  es la distribución normal estándar (Standard Brownian motion).

La fórmula anterior nos determina el tipo de interés a corto plazo para cada período de simulación, pero para poder valorar los títulos de renta fija necesitamos descontar sus flujos a través de la ETTI. El tipo a  $T$  años en el momento  $t$  será  $R_{t,T}$ :

$$R_{t,T} = \frac{r_t B_t - \log A_t}{T}$$

donde:

$$A_t = \left( \frac{2Ge^{(a+G)T/2}}{(a+G)(e^{GT} - 1) + 2G} \right)^{2ab/s^2}$$

$$B_t = \frac{2(e^{GT} - 1)}{(a+G)(e^{GT} - 1) + 2G}$$

$$G = \sqrt{a^2 + 2s^2}$$

### La proyección de la inflación

La variable inflación también juega un papel relevante dentro de un modelo DFA ya que puede afectar a otras variables como los costes, precios, frecuencia o coste medio, y en consecuencia a los resultados de la compañía de seguros. Al igual que ocurre con los tipos de interés, en el ámbito actuarial se han propuesto diversas alternativas. En el modelo de Wilkie (1986) se opta por un proceso autoregresivo de primer orden AR (1) para describir el comportamiento del IPC, que posteriormente es utilizado por Pentikainen *et al.* (1989) o Yakoubov *et al.* (1999). Clarkson (1991) ha sugerido un modelo no lineal para la inflación donde el valor esperado de los

residuos varía con el nivel reciente de inflación.

Una modificación sobre el modelo de Wilkie es la propuesta por Koskinen y Pukkila (1996) quienes proponen aplicar un modelo de dos estados cuyos parámetros varíen siguiendo una cadena de Markov. Otras técnicas usadas serían el modelo ARCH de Wilkie (1995), el modelo de 2 factores de Hull y White (1994) de Hibbert *et al.* (2001) o el modelo SEASE-TAR de de Gooijer y Vidiella-i-Anguera (2000).

No obstante, la elección del tipo de interés como variable conductora del modelo condiciona la estrategia seguida para proyectar la inflación. La evolución histórica de ambas variables indica la existencia de un elevado grado de correlación entre la inflación y los tipos de interés nominales<sup>18</sup>; aspecto que debe considerarse al llevar a cabo las proyecciones. Para relacionar ambas variables Ahlgrim *et al.* (2004b) presentan un modelo basado en Hibbert *et al.* (2001), donde los tipos de interés nominales son generados a partir de los movimientos en la inflación y los tipos de interés reales, aplicando en ambos casos el modelo de 2 factores de Hull y White (1994). Frente a esta alternativa nosotros hemos optado por la propuesta de Kaufmann *et al.* (2001) y del DynaMo 3 donde la inflación se genera una vez simulados los tipos de interés instantáneos mediante una regresión lineal.

En este primer modelo que proponemos, la inflación se genera de la siguiente forma:

$$I_t = b_0 + b_1 r_t + \sigma_I \varepsilon_t^I$$

donde  $I_t$  es la inflación para cada período de simulación;  $b_0, b_1, \sigma_I$  son los parámetros estimados históricamente  $\varepsilon_t^I \sim N(0, \sigma_I^I)$ .

De este modo se tiene en cuenta la correlación histórica existente entre tipos de interés a través del ajuste de ambas variables mediante una regresión lineal, pero añadimos un factor aleatorio que tiene en consideración la volatilidad histórica de los residuos. Daykin *et al.* (1994) establecen la necesidad de modelar individualmente la inflación para cada línea de negocio.

### La proyección de los precios de las acciones y dividendos

La modelización del precio de las acciones es otro elemento relevante, ya que es el segundo activo por orden de importancia en las carteras de las compañías de seguros españolas. Han sido numerosos los modelos que se han propuesto con tal finalidad, siendo el que más aceptación ha tenido el modelo lognormal. El modelo que vamos a presentar a continuación es el seguido por Kaufmann *et al.* (2001) y el DynaMo 3 y se suele denominar “modelo lineal”. No obstante, la hipótesis de normalidad ha sido criticada debido a que en la realidad las colas que presenta la distribución de los rendimientos de la renta variable suelen ser más pesadas que las asumidas en el modelo lognormal. Una alternativa que trata de paliar este problema son los modelos de cambio de régimen, que utilizan un proceso de Markov con varios estados de naturaleza a los que se le asigna un determinado nivel de probabilidad de ocurrencia. Esta alternativa es propuesta por Hibbert *et al.* (2001). El modelo de cambio de régimen se ajusta mejor a las “colas gordas” que muestran las rentabilidades históricas. Ahlgrim *et al.* (2004a) comparan el “modelo lineal” con un modelo de cambio de régimen con dos posibles estados basado en la propuesta de Hardy (2001)<sup>19</sup>. En su estudio comprueban que la volatilidad de los rendimientos de las acciones es mayor que en la aproximación lineal, lo cual puede afectar a un asegurador que invierta un elevado porcentaje de su cartera en acciones. Otra alternativa sería incluir la volatilidad estocástica para la proyección de los precios dentro de los modelos DFA.

En esta primera propuesta, hemos considerado que la dinámica del precio de las acciones vendrá determinada de la siguiente manera:

- 1) La rentabilidad del mercado “esperada” se determina combinando el tipo de interés libre de riesgo con la prima de riesgo histórica de mercado:

$$E(r_{M,t}) = R_{f,t} + P$$

donde  $R_{f,t}$  es el rendimiento libre de riesgo; y  $P$  la prima de riesgo.

- 2) La rentabilidad del mercado “esperada”  $E^*(r_{M,t})$  se ajusta a los cambios recientes en el tipo de interés simulado y se añade un componente aleatorio que permite calcular la rentabilidad de la cartera de mercado:

$$E^*(R_{M,t}) = E(R_{M,t}) + \{h x (R_{f,t} - R_{f,t-1})\} + \varepsilon_t$$

donde  $h$  es el coeficiente de regresión lineal entre la variación de los tipos de interés y la rentabilidad de las acciones;  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^A)$ .

- 3) Puesto que no todas las carteras de los aseguradores tiene la misma sensibilidad a la rentabilidad total del mercado ( $\beta_i$ ), se estima la rentabilidad de la cartera del asegurador ( $R_{i,t}$ ) usando el modelo CAPM:

$$R_{i,t} = R_{f,t} + \beta_i (R_{M,t} - R_{f,t})$$

- 4) Esta rentabilidad anual calculada será la que nos determina el aumento de valor de nuestra cartera previo a la reinversión, una vez descontado el valor de los dividendos.

$$VS_t = VS_{t-1} (1 + R_{i,t}) - D_{t-1} + R_t^{RV}$$

donde  $VS_t$  es el valor de la cartera de acciones en el momento  $t$ ;  $D_{t-1}$  son los dividendos cobrados;  $R_t^{RV}$  es la reinversión en renta variable en  $t$ .

### La proyección de los activos inmobiliarios

El último elemento que incorporamos dentro del modelo es la proyección de los activos inmobiliarios. Diversos autores han ligado la rentabilidad de los inmuebles a la inflación. En un estudio reciente Ahlgrim *et al.* (2004b)<sup>20</sup> han analizado la rentabilidad de los inmuebles para el caso americano mediante dos procesos de Ornstein-Uhlenbeck, tanto considerando la inflación como sin considerarla. Dichos autores concluyen que la inflación no resulta relevante para representar la rentabilidad de los inmuebles. En nuestro modelo hemos optado por establecer una prima sobre el interés libre de riesgo, a la cual le añadiremos un componente aleatorio. De este modo la rentabilidad en el mercado inmobiliario



evolucionará de acuerdo con el siguiente patrón:

$$R_{p,t} = R_{f,t} + x + \varepsilon_t^p$$

donde  $R_{f,t}$  es el tipo de interés simulado libre de riesgo;  $X$  es la prima histórica de rentabilidad del mercado inmobiliario sobre el tipo de interés sin riesgo,  $\varepsilon_t^p \sim N(0, \sigma_t^p)$ .

El valor de mercado de las propiedades inmobiliarias en el momento  $t$  es igual a:

$$VAI_t = VAI_{t-1} \times (1 + R_{p,t}) + R_t^{PI}$$

donde  $VAI_t$  es el valor de activos inmobiliarios en momento  $t$ ;  $R_{p,t}$  es el rendimiento de los activos inmobiliarios; y  $R_t^{PI}$  es la reinversión en propiedades inmobiliarias en  $t$ .

Además estas propiedades generarán unos alquileres que serán:

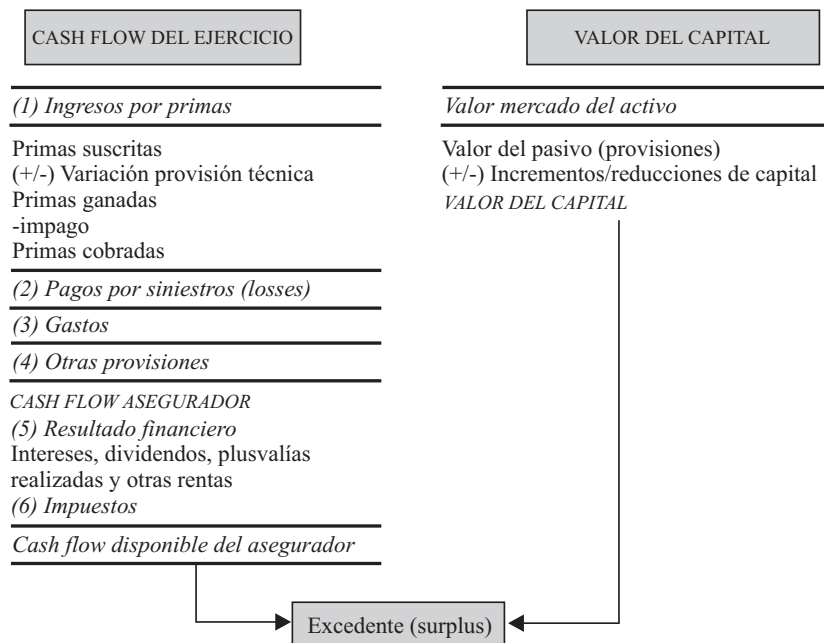
$$A_t = Ra_t \times O_t \times VAI_{t-1}$$

donde  $Ra_t$  es el rendimiento cobrado en concepto de alquiler; y  $O_t$  es el porcentaje de ocupación de los inmuebles.

## PROYECCIÓN DE ACTIVOS Y PASIVOS Y ANÁLISIS DEL RIESGO

El modelo propuesto tiene como finalidad principal la medición del riesgo que asume el asegurador. De ahí que una vez elegidas las alternativas de modelación del activo y pasivo, proyectamos el excedente, ya que es el input básico para la realización del análisis de riesgo. Como se deduce de la figura 2, el excedente de la compañía está compuesto por el cash flow libre de cada ejercicio y por el valor del capital en el balance. A su vez, el cash flow libre vendrá determinado por las primas cobradas, el resultado financiero, la variación en las provisiones técnicas, el pago de siniestros y gastos, y los impuestos. No obstante, también habrá que valorar el resto del patrimonio del asegurador, que estará constituido por el valor de los activos menos el valor de las provisiones y deudas, así como de los incrementos y reducciones de capital que experimente la compañía en el momento de análisis. Si el excedente resulta ser negativo, significará que el valor patrimonial de la compañía no es suficiente para hacer frente a sus deudas y por tanto, la compañía estará en situación de quiebra, de ahí que la medición del riesgo se centre en el análisis del excedente.

Figura 2.- Proyección del excedente del asegurador



Una vez proyectado el excedente bajo un número amplio de escenarios, podemos calcular diferentes medidas del riesgo, que nos pueden ayudar a evaluar las estrategias que mejor preservan dicho excedente, a reconfigurar la cartera para asumir un menor nivel de riesgo, a calcular el nivel de capitalización que necesita la entidad de acuerdo con el riesgo que está asumiendo o a evaluar la suficiencia de las primas para hacer frente a los compromisos.

Las medidas más comúnmente utilizadas son:

- a) *La desviación estándar*. Este indicador muestra el promedio de desviación respecto al valor medio del excedente para el total de escenarios proyectados.
- b) *El rango*. Cuantifica la diferencia entre el valor máximo y mínimo de los valores de la variable seleccionada.
- c) *La probabilidad de ruina o probabilidad de pérdida*. Es el porcentaje de la distribución de probabilidad que corresponde al punto en el que el excedente es menor que cero. En la práctica se calcula como el cociente entre el número de simulaciones donde el excedente toma valores negativos y el número total de simulaciones. Nos indicaría por tanto, la probabilidad de que el patrimonio sea insuficiente para cubrir las pérdidas.
- d) *El Valor en riesgo*. El VaR es una medida probabilística de las pérdidas esperadas para un período de tiempo en condiciones normales de mercado, en concreto, la máxima pérdida en el valor de mercado que se puede esperar para un plazo e intervalo de confianza determinados<sup>21</sup>. En el caso del seguro de no vida nos indica la mayor pérdida que se puede producir en el excedente con un determinado nivel de confianza. El VaR es una medida bastante aceptada en los mercados financieros, debido a que es fácil de interpretar y puede ser aplicada a cualquier cartera de activos y riesgos. No obstante, de acuerdo con las condiciones de coherencia de riesgo establecidas por Artzner *et al.* (1998), el VaR sólo satisface la de subaditividad en determinadas condiciones, por lo que según Embrechts *et al.* (2002) no es una medida coherente del riesgo y en determinadas ocasiones puede conducir a decisiones erróneas<sup>22</sup>.
- e) *TailVaR o Conditional Value-at-Risk (CVaR)*. Esta medida ha sido propuesta como alterna-

tiva al VaR ya que a diferencia del anterior es una medida coherente del riesgo y que por tanto supera al VaR<sup>23</sup>. En su cálculo sólo se tienen en cuenta los escenarios en los que la pérdida del excedente ha superado al VaR y con dichos valores se calcula el promedio:

$$\text{TailVaR}(Y) = E(Y | Y \geq \text{VaR}(Y))$$

El TailVaR es mayor que el VaR para un mismo valor de confianza, ya que es el VaR más el exceso de la pérdida prevista;

$$\text{TailVaR}(Y) = \text{VaR} + E[Y - \text{VaR}(Y) | Y > \text{VaR}(Y)]$$

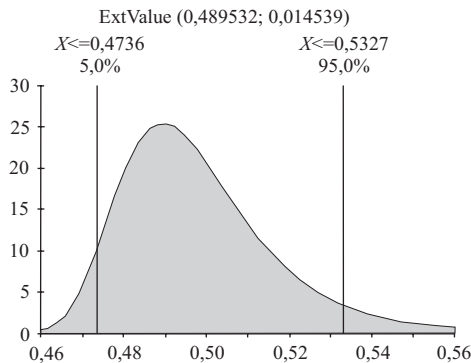
- f) *Stress testing*. Se trata de generar escenarios extremos y comprobar el impacto que tendrá sobre el excedente de la compañía una determinada composición de productos y carteras de inversión.
- g) *Frontera eficiente*. Es un diagrama de rentabilidad-riesgo, en el cual, una vez elegida una medida de rentabilidad y otra de riesgo se evalúa cada estrategia y se dibuja en un gráfico. Cada estrategia representa un punto, éste pertenecerá a la frontera eficiente si no hay otro con un riesgo más bajo para el mismo nivel del rendimiento, o visto desde otro punto, si no hay otro con más rendimiento para el mismo nivel del riesgo. Los puntos de la frontera eficiente son aquellas combinaciones de rentabilidad-riesgo que dominan a las demás. Pero entre estos puntos no podemos establecer a priori cuál va a ser la posición de la empresa ya que dependerá de su aversión al riesgo. Desafortunadamente, la comparación de estrategias puede conducir a resultados totalmente diversos si cambiamos las medidas usadas de rentabilidad y/o la de riesgo.
- h) *Shortfall risk*. Es la probabilidad de que una variable caiga por debajo de un cierto límite especificado. La probabilidad de ruina es un caso especial en el cual el límite es el punto en el cual se agota el capital.

## ESPECIFICACIÓN DEL MODELO

En este apartado vamos a describir el funcionamiento del modelo realizado para el análisis del riesgo económico de una compañía aseguradora. Esta primera propuesta se ha centrado en diseñar y construir el modelo, sin prestar espe-



**Gráfico 1b.-** Distribuciones empleadas para la frecuencia



Teniendo en cuenta el margen sobre siniestralidad media para el año 2004 hemos establecido en nuestra simulación una prima media inicial de 412 euros. Dicha cuantía resulta de aplicar la siguiente ecuación:

$$P = \frac{F_t \times X_t}{CS_t} = \frac{0,471 \times 620,05}{0,708} = 412,21 \text{€}$$

donde  $CS_t$  es el cociente de siniestralidad del año 2004.

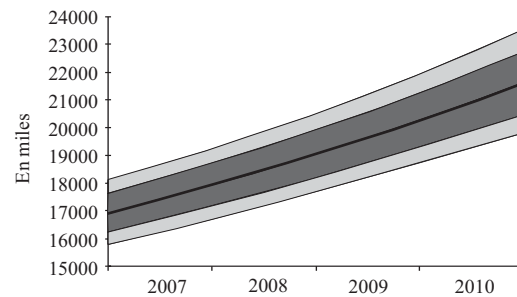
No hemos modelado la adecuación dinámica de las primas ni su influencia sobre el número de exposiciones al riesgo. El crecimiento de estas primas a lo largo del período de proyección lo analizaremos bajo dos situaciones. La primera consistirá en un incremento anual de éstas, a la tasa de inflación simulada del periodo (crecimiento nulo en términos reales). La segunda será un incremento del 2% en términos nominales. Asimismo, hemos asumido que la compañía se ha fijado un objetivo de incremento anual de un 3% en el número de exposiciones al riesgo y que el 100% de los pagos de un siniestro se producen en el año en que tiene lugar dicho siniestro.

En el gráfico 2 se recoge la evolución temporal<sup>24</sup> a lo largo del horizonte de simulación de la siniestralidad proyectada (en miles de €) bajo las hipótesis citadas anteriormente. Se observa una tendencia creciente de los siniestros simulados fruto del crecimiento en el número de exposiciones de la compañía.

Los gastos de explotación de la compañía representan el 19,5% de las primas imputadas, que corresponden en un 16,5% a gastos de adquisición y un 3% a gastos de administración. Ade-

más hemos considerado un 4% adicional en concepto de otros gastos técnicos y de inversiones, en línea con los datos que se recogen en la cuenta técnica para el año 2004<sup>25</sup>. Por último, se ha asumido que la compañía no distribuye beneficios entre sus accionistas, optando por constituir reservas.

**Gráfico 2.-** Siniestralidad proyectada para el período 2006-2010

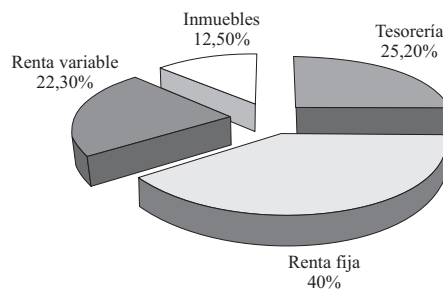


**Modelación financiera del activo**

La cartera de inversión (compuesta por renta fija, renta variable, tesorería e inmuebles) se ha establecido siguiendo la proporción que cada una de estas partidas supone en la estructura promedio de la cartera de las compañías del ramo de no vida en 2004<sup>26</sup>.

Dado que dicha estructura, representada en el gráfico inferior, recoge más partidas que las aquí analizadas, se han llevado a cabo dos simplificaciones: 1) el porcentaje invertido en fondos de inversión se ha destinado al activo financiero que compone dicho fondo; y 2) las partidas no incluidas en nuestra modelación se han incorporado al apartado de tesorería. El motivo reside en que su significación es reducida y su rendimiento ordinario se aproxima considerablemente al de la liquidez.

**Gráfico 3.-** Estructura de la cartera de inversión de la compañía simulada



En cuanto a la estrategia inversora, asumimos que la compañía tratará de mantener estable la cartera configurada inicialmente. Por este motivo, el flujo excedente que resulta de la actividad aseguradora y financiera, se reinvertirá siguiendo esta estructura. No obstante, si en cualquiera de los ejercicios económicos el cash flow es negativo, el modelo desinvierte en las proporciones especificadas para hacer frente a la necesidad de fondos. A continuación explicamos el funcionamiento del modelo para cada una de las clases de activos y los inputs utilizados:

**Renta fija y tesorería**

El usuario puede seleccionar el número de títulos de renta fija que desea poseer, el vencimiento de los mismos, el cupón pagado y la proporción de los flujos de caja positivos (negativos) generados en el período que se destinan a la compra (venta) de renta fija. A lo largo de cada ejercicio del período de análisis se proyectan los flujos de caja de los bonos, lo cual permite calcular el cobro de cupones y la cuantía que vence. Además, los bonos que no han vencido se valoran a la curva de mercado obtenida del modelo CIR, descontando los flujos pendientes al tipo a plazo simulado  $R_{i,T}$ . El modelo contabiliza el precio de adquisición de los bonos y su valor de mercado, de forma que calcula las ganancias realizadas en caso de desinversión. Asimismo, el modelo asume que la partida de tesorería se invierte al tipo CIR al contado que resulte de la simulación para cada período.

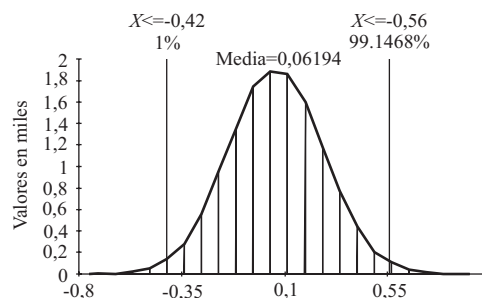
♦ **Renta variable.** La inversión se realiza en una cartera diversificada de acciones, donde se puede definir por el usuario: el nivel de riesgo de mercado modificando la beta de la cartera, la proporción de los flujos de caja destinados a la compra o venta de títulos y la rentabilidad por dividendos que se espera obtener. Según el modelo empleado, la rentabilidad de la cartera se comportará de acuerdo con la siguiente expresión:

$$R_{i,t} = R_{f,t} + \beta_i (R_{f,t} + Prima + (hx(R_{f,t} - R_{f,t-1}) + \epsilon_t) - R_{f,t})$$

Se han utilizado los siguientes valores: prima histórica=5%,  $h=-0.06$  (se asume que ante una subida de 25 puntos básicos en el tipo de interés la renta variable experimenta una caída del 1,5%),  $\beta=0,75$  (cartera defensiva),

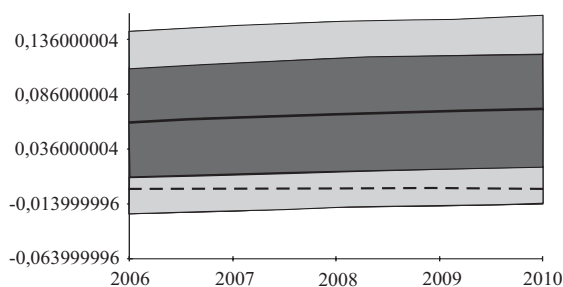
$\epsilon_t \sim N(0;0,2)$ . Además se ha establecido que los dividendos cobrados por nuestras inversiones representarán un 3% del valor de mercado de la cartera. El modelo contabiliza el precio de adquisición y su valor de mercado, de forma similar al caso de la renta fija. El gráfico 4 muestra la distribución de la rentabilidad de la renta variable para el último período de simulación.

**Gráfico 4.-** Distribución de la rentabilidad anual de las acciones para el año 2010



♦ **Inversión en inmuebles.** Los inputs principales de este apartado son el porcentaje de ocupación y la rentabilidad por alquileres esperada. La rentabilidad en el mercado inmobiliario evolucionará según  $R_{p,t} = R_{f,t} + x + \epsilon_t^p$ . Para la simulación se ha establecido una prima histórica de rentabilidad ( $x$ )=3,5%,  $\epsilon_t^p \sim N(0,0.05)$ , un rendimiento cobrado en concepto de alquiler del 4% del valor de mercado y una ocupación de los inmuebles del 65%. Los valores empleados recogen que parte de los inmuebles son para uso propio de la compañía y/o están sin alquilar. Se contabiliza el precio de adquisición y su valor de mercado, para el cálculo de las ganancias realizadas en caso de venta. El gráfico 5 muestra la evolución temporal de la rentabilidad en inmuebles a lo largo del horizonte de simulación.

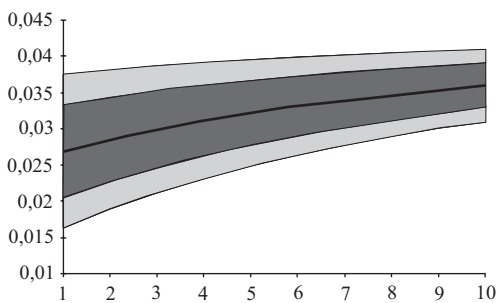
**Gráfico 5.-** Evolución temporal de la rentabilidad de la inversión en propiedades inmobiliarias



◆ *Otros inputs:*

- En el modelo de inflación empleado  $I_t = b_0 + b_1 r_t + \sigma_I \varepsilon_{It}$ , se han establecido los siguientes parámetros  $b_0 = 0,75\%$ ,  $b_1 = 0,7$  y  $\sigma_I = 0,05$ .
- Los parámetros empleados en el modelo CIR (85)  $s r_t = r_{t-1} + a(b - r_{t-1}) + s \sqrt{r_{t-1}} Z_t$ , dados los tipos de mercado en el momento de efectuar la simulación y nuestras expectativas para el futuro, han sido:  $r_0 = 2\%$ ,  $a = 0,2$ ,  $b = 4,5\%$ ,  $s = 0,05$ . El gráfico inferior muestra la simulación efectuada de la estructura temporal de los tipos de interés (de 1 a 10 años) para el primer año de simulación (año 2006), resultante de aplicar los anteriores parámetros.

**Gráfico 6.-** Estructura temporal de los tipos de interés para el año 2006



**ANÁLISIS DE RESULTADOS**

A partir de los datos citados con anterioridad, se proyectan los flujos de caja y los valores de mercado del activo y pasivo que constituyen el input básico del análisis del riesgo. La simulación, efectuada sobre la base de una simulación Latin-Hypercube con 10,000 iteraciones, se ha realizado para un periodo de 5 años considerando intervalos anuales y dos estrategias de tarificación:

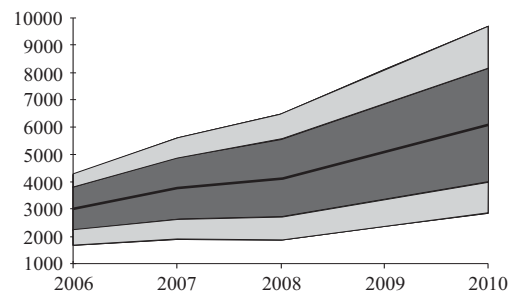
- Estrategia 1: Crecimiento de primas a la misma tasa que la inflación simulada.
- Estrategia 2: Crecimiento del 2% anual nominal a lo largo de cada período.

Los resultados para ambos casos se muestran a continuación.

**ESTRATEGIA 1**

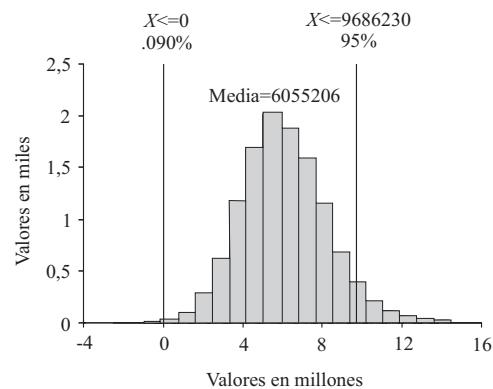
En el gráfico siguiente se muestra la evolución del excedente a lo largo del período de proyección. La evolución positiva que representa el gráfico, viene confirmada por los datos, ya que, la probabilidad de que el excedente empeore desde su nivel de partida es muy reducida (2,78%).

**Gráfico 7.-** Evolución temporal del Excedente. Estrategia 1



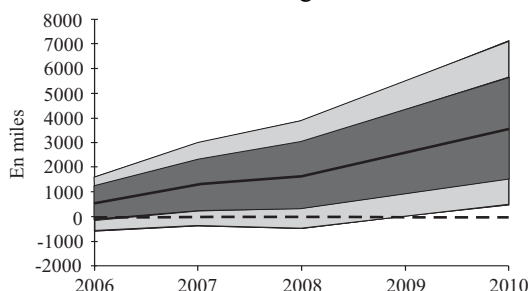
El gráfico siguiente muestra la distribución del excedente para el último período de proyección (año 2010). En el mismo puede apreciarse que la probabilidad de ruina económica<sup>27</sup> según esta estrategia es muy reducida (0,09%).

**Gráfico 8.-** Distribución final del excedente (2010). Estrategia 1

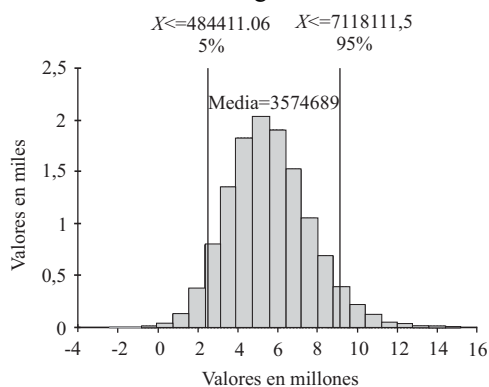


Los gráficos siguientes están contruidos sobre la distribución de pérdidas y ganancias en el excedente<sup>28</sup>. El gráfico 9 muestra la evolución temporal del excedente mientras que el gráfico 10 muestra su distribución para el último período de proyección (año 2010). Como podemos comprobar, el VAR con un nivel de confianza del 99% es de 690.759,27 €.

**Gráfico 9.-** Evolución temporal de las pérdidas y ganancias del excedente. Estrategia 1



**Gráfico 10.-** Distribución de las pérdidas y ganancias del excedente 2010. Estrategia 1



El cuadro 4 muestra el resumen de las estadísticas calculadas para esta primera estrategia, caracterizada por una baja probabilidad de ruina y de empeoramiento de su situación de solvencia inicial. La información contenida en dicho cuadro recoge un resumen de los estadísticos descriptivos más comunes del excedente, así como los percentiles de la distribución. También están contruidos sobre la base del excedente el shortfall risk y la probabilidad de ruina, mientras que el Var y el Tail VaR se han calculado a través de la distribución de pérdidas y ganancias en el excedente.

**Cuadro 4.-** Estadísticas de resumen de la estrategia 1

Estadística	Valor	Percentil	Valor excedente
Mínimo	-2.541.686,25	5%	2.856.709,54
Máximo	15.988.375,00	10%	3.521.214,53
Rango	18.530.061,25	15%	3.961.772,19
Media	6.055.205,95	20%	4.320.190,10
Mediana	5.922.352,50	25%	4.617.364,63
Moda	4.478.040,00	30%	4.908.685,90
Desv. est.	2.081.024,39	35%	5.190.979,80
Varianza	4,33E+12	40%	5.449.286,90
Curtosis	0,4768	45%	5.686.297,93
Coef. asimetría	0,3667	50%	5.922.352,50
Error típico	20.810,24	55%	6.177.372,23
Shortfall risk*	2,78%	60%	6.452.436,00
Prob. ruina	0,09%	65%	6.740.602,60

**Cuadro 4 (cont.).-** Estadísticas de resumen de la estrategia 1

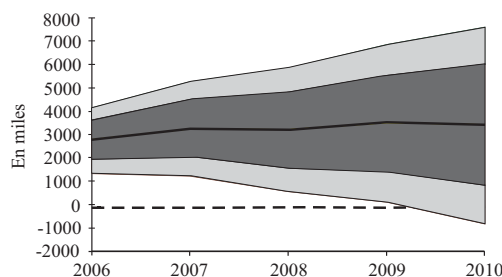
Estadística	Valor	Percentil	Valor excedente
VaR (95%)	0	70%	7.022.021,10
TailVaR (95%)	-259.351,94	75%	7.372.185,25
VaR (99%)	-690.759,27	80%	7.715.148,20
TailVaR (99%)	-1.372.980,28	85%	8.133.576,58
		90%	8.724.833,90
		95%	9.686.230,00

\*Shortfall risk: calculado tomando como referencia el nivel de partida del excedente.

**ESTRATEGIA 2**

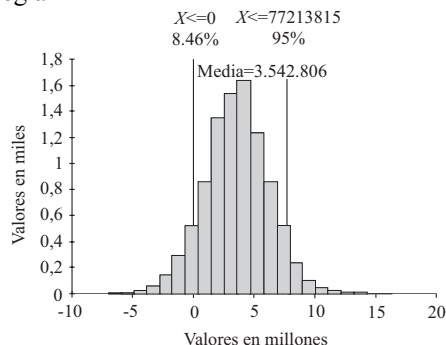
Esta estrategia asume una política más agresiva de tarificación. En el gráfico siguiente se muestra la evolución del excedente a lo largo del período de proyección bajo un crecimiento de las primas del 2% anual. La evolución del excedente es claramente peor que en la estrategia 1. La probabilidad de que el excedente empeore desde su nivel de partida es del 32,75%.

**Gráfico 11.-** Evolución temporal del excedente. Estrategia 2



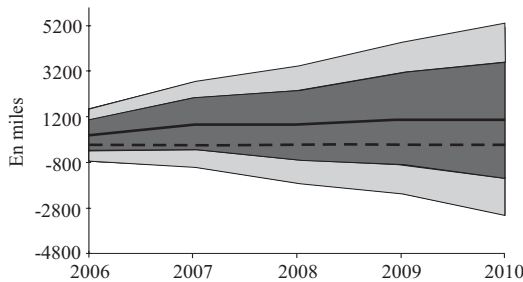
El gráfico 12 presenta la distribución del excedente para el último período de proyección donde podemos observar que la probabilidad de ruina económica se eleva al 8,46%. Además la media del excedente bajo esta estrategia (3.542.806€) es muy inferior a la del excedente bajo la estrategia 1 (6.055.206€).

**Gráfico 12.-** Distribución final del excedente 2010. Estrategia 2

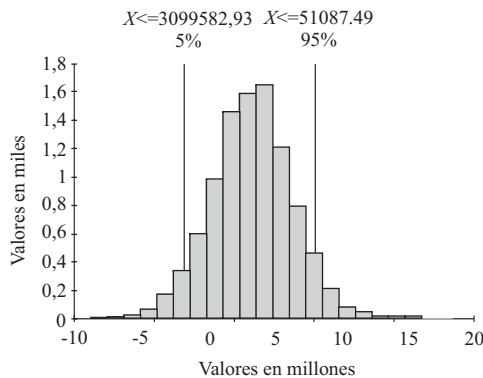


Los gráficos siguientes están referidos a distribución de pérdidas del excedente. El primero muestra la evolución temporal del excedente, mientras que el segundo gráfico muestra la distribución para el último período de proyección (año 2010). El VaR<sub>95%</sub> es de -3.099.582,93€, por lo que bajo las condiciones de la segunda estrategia la empresa puede incurrir en pérdidas muy superiores a las de la primera estrategia.

**Gráfico 13.-** Evolución temporal de pérdidas y ganancias del excedente. Estrategia 2



**Gráfico 14.-** Distribución de las pérdidas y ganancias del excedente. Estrategia 2



En el cuadro 5 podemos observar que si la compañía establece una estrategia de precios agresiva la probabilidad de ruina aumenta considerablemente y su situación de solvencia de partida empeora considerablemente ya que el shortfall risk aumenta hasta el 32,75%.

Tras el análisis de resultados hemos comprobado que una compañía que opere en el mercado español dentro de los parámetros medios que presenta el sector, que diversifique adecuadamente sus riesgos y sea capaz de ajustar sus precios a la evolución de la inflación se situará en unos niveles de solvencia elevados. Desde el punto de vista de la regulación del capital ema-

nada de Solvencia II, sus necesidades de capital serán reducidas, lo cual podrá repercutir positivamente en su rentabilidad sobre los recursos propios. Frente a esta situación, aquellas compañías con estrategias agresivas que sitúen sus precios por debajo de la inflación asumirán un riesgo más elevado siempre que su política no se acompañe de una adecuada selección de riesgos que le reporte mejores resultados técnicos. Las nuevas exigencias de capital que tendrán estas últimas en el nuevo marco regulador podrían inducir a un comportamiento más conservador acorde con los niveles de capital disponibles por la entidad.

**Cuadro 5.-** Estadísticas de resumen de la estrategia 1

Estadística	Valor	Percentil	Valor excedente
Mínimo	-7.017.776,00	5%	-726.024,30
Máximo	16.379.127,00	10%	257.280,73
Rango	23.396.903,00	15%	990.071,02
Media	3.542.805,56	20%	1.493.198,60
Mediana	3.573.554,88	25%	1.916.579,03
Moda	2.245.973,75	30%	2.260.106,80
Desv. est.	2.577.326,64	35%	2.604.110,34
Varianza	6,64261E+12	40%	2.924.750,80
Curtosis	0,4607	45%	3.258.103,95
Coef. asimetría	-0,0220	50%	3.573.554,88
Error típico	25.773,27	55%	3.891.074,64
Shortfall risk*	32,75%	60%	4.176.550,90
Prob. Ruina	8,46%	65%	4.486.877,60
VaR (95%)	-3.099.582,93	70%	4.817.753,70
TailVaR (95%)	-4.315.027,36	75%	5.205.231,63
VaR (99%)	-4.990.904,46	80%	5.627.433,00
TailVaR (99%)	-6.099.624,65	85%	6.140.944,25
		90%	6.778.426,30
		95%	7.721.380,75

## CONCLUSIÓN

La necesidad de medir el riesgo al que está expuesta una compañía de seguros se ha visto impulsada recientemente por el entorno competitivo en el que se desarrolla la actividad, y por la próxima entrada en vigor de la nueva regulación de capital comúnmente conocida como Solvencia II. En este contexto, nuestro trabajo ha tenido por objeto explicar como se puede construir un modelo interno de análisis financiero dinámico. Como principal ventaja, frente a otras modelizaciones más clásicas, el DFA adopta un análisis integral del activo y del pasivo que puede ser utilizado con diversos fines. Entre otros destacamos el establecimiento de niveles de capital ajustados



al riesgo realmente asumido, la evaluación de las estrategias de pricing o de diferentes alternativas de inversión, y la toma de decisiones que permitan adecuar el nivel de exposición al riesgo deseado en la compañía. Una vez construido el modelo lo hemos aplicado a una compañía que opere en el mercado asegurador español y que utilice dos estrategias de precios alternativas. De dicho estudio se desprende que aquellas compañías que adecuen su política de precios a la evolución de los costes, inviertan de acuerdo con el promedio del sector, diversifiquen adecuadamente su riesgo técnico y mantengan un nivel de eficiencia dentro de la media sectorial, presentarán un nivel de solvencia muy elevado que les permitirá reducir sus necesidades de capital e incrementar la rentabilidad del accionista. Por el contrario, compañías más agresivas en cuanto al nivel de precios y con las mismas condiciones que las anteriores, podrán experimentar una mayor probabilidad de pérdida dada la inadecuación de los precios para hacer frente al riesgo realmente asumido. Las nuevas exigencias de capital que tendrán estas últimas en el nuevo marco regulador podrían inducir a un comportamiento más conservador acorde con los niveles de capital disponibles por la entidad.

## NOTAS

1. El uso de DFA en la industria aseguradora comenzó con el trabajo de grupos finlandeses y británicos que estaban centrados en la solvencia de las compañías de vida. Con el tiempo se implantó en Canadá y en EE.UU. con un objetivo regulador. En la actualidad DFA se ha convertido en una herramienta de planificación estratégica para la toma de mejores decisiones (Correnti, Sonlin, e Issac, 1998 [0]).
2. Shiu (2006) indica que los usos actuales principales son la asignación de activos, los test de solvencia y la asignación de capital.
3. Watson Wyatt (2005): El DFA como herramienta de planificación estratégica.
4. Ver Swiss Re (2000): *Sigma*, núm. 6.
5. La opción de modelar la variable frecuencia, en lugar del número de siniestros, reside en que la primera es habitualmente más estable que el segundo.
6. Es un modelo público desarrollado para difundir el conocimiento del DFA.
7. Woll (1987) y D'Arcy y Doherty (1989 y 1990) documentaron el fenómeno de la antigüedad de las pólizas en el sector asegurador. De acuerdo con los datos publicados en D'Arcy y Doherty (1990), el cociente de siniestralidad (*loss ratio*) en las nuevas pólizas era un 8% superior al de la primera renovación y un 42% a las renovaciones siguientes.
8. Se puede ver una explicación de dicho modelo en Ahlgrim *et al.* (2004a)
9. Dicho modelo ha sido sometido a un análisis exhaustivo del cual han resultado diversas críticas, tales como la incapacidad para garantizar la normalidad de los residuos (Georghean *et al.*, 1992), el efecto de datos extraños sobre algunos parámetros (Huber, 1995), o la inadecuación a la evolución de la inflación generada respecto a la histórica (Daykin y Hey, 1990).
10. La estructura de cascada imposibilita la retroalimentación entre variables, cuyos efectos son secundarios en el largo plazo según Yakoubov *et al.* (1999)
11. Los factores que incorpora el modelo de Wilkie son: tipos de interés, precios de renta variable y dividendos.
12. Según Daykin *et al.* (1994) no existe gran diferencia por optar por uno u otro factor como *driver*. La opción refleja el énfasis que el actuario pone en el lado del balance de un asegurador. Por ejemplo, los movimientos de los tipos de interés tienen un impacto financiero en ambos lados del balance, especialmente en el lado de activo, y la inflación es un factor importante en la determinación de los costes de los pasivos. Consecuentemente Shiu (2006) indica que parece razonable elegir el tipo de interés como el factor conductor si se pone más énfasis en el lado de activo, mientras que la tasa de inflación puede ser seleccionada si el énfasis se pone en el lado del pasivo.
13. Esto adquiere más relevancia si tenemos en cuenta que un porcentaje elevado de la cartera de las compañías aseguradoras españolas de no vida estaba compuesta por activos de renta fija.
14. En Canadá se aplican a los aseguradores distintas trayectorias deterministas de los tipos para realizar los test de solvencia.
15. Véase en este sentido a Rogers (1995) y Kaufmann *et al.* (2001).
16. En general los modelos de arbitraje son más útiles para fijar el precio de productos derivados, especialmente los de tipo de interés, si bien la valoración de activos a través de los mismos exige en ocasiones realizar simulaciones y el cálculo de inputs del modelo no es sencillo. Frente a estos, los

- modelos de equilibrio presentan formas cerradas para la valoración de la cartera de obligaciones, si bien no se ajustan a la estructura temporal existente.
17. Sin embargo, el asegurador de vida debe utilizar un modelo de más factores debido a la mayor sensibilidad de su actividad a las fluctuaciones del tipo de interés.
  18. Una comparación histórica para los EE.UU. confirma la relación de Fisher (1930), ya que desde 1950 el coeficiente de correlación entre la inflación (medida a través del IPC) y los tipos de interés (medidos por los tipos de las letras del Tesoro a 3 meses) es cercano al 0,65 (Ahlgrim, 2000[0]).
  19. Hardy asume que los precios de las acciones están distribuidos de forma lognormal, y que a pesar de que los modelos de cambio de régimen puede incorporar más de dos regímenes, con ello no se logra una mejora significativa en el ajuste histórico.
  20. Han elaborado una propuesta de técnicas de modelización para generar escenarios económicos a muy largo plazo. Este trabajo está patrocinado por la SOA y la CAS americanas buscando generar una mayor comprensión de dichas técnicas para su aplicación en modelos de DFA.
  21. Véase Jorion (1996) y Simons (1996).
  22. Para algunos ejemplos en los cuales el VaR es una medida incoherente, ver Acerbi y Tasche (2002).
  23. Ver Delbaen (2000[0]), Rockafellar y Uryasev (2000[0], 2001[0]), Acerbi y Tasche (2002)
  24. En todos los gráficos de evolución temporal se representa la media (línea central amarilla), los valores superior e inferior resultantes de sumar y restar a la media una desviación estándar (parte superior e inferior respectivamente de la zona sombreada), y los valores del percentil al 95% y al 5% de confianza (parte superior e inferior de la zona de color oscuro).
  25. ICEA Informe núm. 927
  26. Datos para el año 2004 del Informe nº 936 de ICEA (una vez realizadas las dos simplificaciones): Tesorería 25,2%: 16,6% invertido directamente, 0,6% en FIAMM, 0,8% en Depósitos, 6,0% en Otras inversiones financieras y un 1,2% de Resto de inversiones. Renta Fija 40%: 36,2% invertido directamente, 2,4% en Fondos RF, 0,3% en Fondos Fija Mixta y 1,1% en Fondos Internacionales RF. Renta variable 22,3%: 17,0% invertido directamente, 0,4% en Fondos Variables Mixtos, 2,5% en Fondo variables y un 2,4% en Fondos Internacional. Inversiones materiales 12,5%: 4,1% en inmuebles para uso propio, 8,1% inmuebles para arrendamiento y un 0,3% en Fondos inmobiliarios.
  27. La probabilidad de ruina económica ha sido calculada como la probabilidad de que el valor de mercado de los pasivos exceda al de los activos al final del período de proyección. Podría haberse calculado la insolvencia técnica del asegurador sobre el nivel en el cual el organismo regulador decretara la quiebra de la compañía.
  28. Calculada como la diferencia entre el excedente final menos el excedente inicial para cada una de las simulaciones.

## BIBLIOGRAFÍA

- ACERBI, C.; TASCHE, D. (2002): "Expected Shortfall: a Natural Coherent Alternative to Value at Risk", *Economic Notes*, vol. 31, núm. 2, pp. 379-388. Blackwell.
- AHLGRIM, K.C. (1999): *Investigating the Use of Value at Risk in Insurance*. (Working Paper). <http://www.gloriamundi.org/picsresources/hlgrim.pdf>.
- AHLGRIM, K.C.; D'ARCY, S.P.; GORVETT, R.W. (1999): "Parameterizing Interest Rate Models", pp. 1-50, *Casualty Actuarial Society Forum*.
- AHLGRIM, K.C. (2000): *Multifactor Interest Rate Models and Dynamic Financial Analysis*. (Working Paper).
- AHLGRIM, K.C. (2001): *The Effects of Multifactor Term Structure Models on the Valuation of Insurance*. (Ph.D. Dissertation). University of Illinois.
- AHLGRIM, K.C.; D'ARCY, S.P.; GORVETT, R.W. (2004a): "Asset-Liability Modeling for Insurers: Incorporating a Regime-Switching Process for Equity Returns Into a Dynamic Financial Analysis model", *ASTIN Colloquium 2004*.
- AHLGRIM, K.C.; D'ARCY, S.P.; GORVETT, R.W. (2004b): *Modeling of Economic Series Coordinated with Interest Rate Scenarios*. (Proyecto de investigación). <http://casact.org/research/econ/>.
- AHLGRIM, K.C.; D'ARCY, S.P.; GORVETT, R.W. (2004c): "A Comparison of Actuarial Financial Scenario Generators", *14th Annual International AFIR Colloquium 2004*.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.M.; HEATH, D. (1999): "Coherent Measures of Risk", *Math. Finance*, 9, núm. 3, pp. 203-228.
- ASOCIACIÓN INTERNACIONAL DE SUPERVISORES DE SEGUROS (2003): *Pruebas de estrés para aseguradoras. Documento guía*.
- BEHAN, F.D. et al. (1995): "Dynamic Financial Models of Property-Casualty Insurers", *CAS Forum*.
- BERGBAUER, A.; CHAVEZ, V.; FISCHER, T.; PERERA, R.; ROEHL, A.; SCHMIEDL, S. (2004): *Back to the Future: Dynamic Financial Analysis (DFA) for Deci-*

- sion Making*. (Working Paper). [http://www.approximity.com/papers/dfa\\_wp4\\_en.pdf](http://www.approximity.com/papers/dfa_wp4_en.pdf).
- BERLIET, J.P.; LOWE, S. (1999): "Managing the Volatility Link: Better Financial Modeling May Hold the Key to Better Management of Insurance Risk", *Bests Review Life Health Insurance Edition*, vol. 99; núm. 10, pp. 63-66.
- BLUM, P.; DACOROGNA, M.; EMBRECHTS, P.; NEG-HAIWI, T.; NIGGLI, H. (2001): "Using DFA for Modelling the Impact of Foreign Exchange Risks on Reinsurance Decisions", *Casualty Actuarial Society Forum*, (Summer), pp. 49-93.
- BLUM, P.; DACOROGNA, M. (2003): *Dynamic Financial Analysis, Understanding Risk and Value Creation in Insurance*. Coverium.
- BURKETT, J.C.; MCINTYRE, T.S.; SONLIN, S.M. (2001): "DFA Insurance Company Case Study, Part I: Reinsurance and Asset Allocation", *Casualty Actuarial Society Forum*.
- CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY (1995): *Dynamic Financial Analysis Handbook*.
- CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY (1999): *DFA Research Handbook*. Dynamic Financial Analysis Committee of the Casualty Actuarial Society, (Summer).
- CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY (2000): *Dynamic Financial Analysis Research Book*.
- CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY (2006): *DRM Research Handbook* (en revisión).
- CHAN, K.C.; KAROLYI, G.A.; LONGSTAFF, F.; SANDERS, A. (1992): "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate", *Journal of Finance*, 47, pp. 1209-1227.
- CLARKSON, R. (1991): "A Nonlinear Stochastic Model for Inflation", *Proc. AFIR 3*.
- COMISIÓN EUROPEA (2002): *Nota a la atención del Subcomité sobre Solvencia. Asunto: Modelos de riesgos de empresas o grupos de seguros*.
- CORRENTI, S.; SONLIN, S.M.; ISAAC, D.B. (1998): "Applying a DFA Model to Improve Strategic Business Decisions", *Casualty Actuarial Society Forum*, (Summer), pp.15-51.
- COX, J.; INGERSOLL, J.; ROSS, S. (1980): "An Analysis of Variable Rate Loan Contracts", *Journal of Finance*, 35, núm. 2, pp. 389-403.
- COX, J.; INGERSOLL, J.; ROSS, S. (1985): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, núm. 53, pp. 385-407.
- CUMBERWORTH, M.P.; HITCHCOX, A.N.; MCCONNELL, W.D.; SMITH, A.D. (2002): "Corporate Decisions in General Insurance: Beyond the Frontier", *British Actuarial Journal*, 6, (II), pp. 259-296.
- CZERNUSZEWIC, A. (2001): "Understanding Risk and Capital", *Insurance Day*, (16/01/01).
- D'ARCY, S.P.; DOHERTY, N. (1989): "The Aging Phenomenon and Insurance Prices", *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, núm. 76.
- D'ARCY, S.P.; DOHERTY, N. (1990): "Adverse Selection, Private Information and Lowballing in Insurance Markets", *Journal of Business*, núm. 63.
- D'ARCY, S.P.; GORVETT, R. (2004): "The Use of Dynamic Financial Analysis to Determine Whether an Optimal Growth Rate Exists for a Property-Liability Insurer", *Journal of Risk and Insurance*, núm. 71, (4), pp. 583-615.
- D'ARCY, S.P.; GORVETT, R.W.; HERBERS, J.A.; HETTINGER, T.E.; LEHMANN, S.G.; MILLER, M.J. (1997): "Building a Public Access PC-Based DFA Model", *Casualty Actuarial Society Forum*, (Summer), (2), pp. 1-40.
- D'ARCY, S.P.; GORVETT, R.W.; HETTINGER, T.E.; WALLING III, R.J. (1998) "Using the Public Access Dynamic Financial Analysis Model: A Case Study", *CAS Dynamic Financial Analysis Call Paper Program*, (Summer), pp. 53-118.
- DAYKIN, C.D.; BERNSTEIN, G.; COUTTS, S.; DEVITT, E.; HEY, G. B.; REYNOLDS, D.; SMITH, P. (1987): "Assessing the Solvency and Financial Strength of a General Insurance Company", *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 114, (2), pp. 227-310.
- DAYKIN, C.D.; HEY, G.B. (1990): "Managing Uncertainty in a General Insurance Company", *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 117, Part 2, pp. 173-277.
- DAYKIN, C.D.; HEY, G.B. (1991): "A Stochastic Cash-Flow Model of a General Insurance Company", *AFIR Colloquium 1991*.
- DAYKIN, C.D.; PENTIKÄINEN, T.; PESONEN, M. (1994): *Practical Risk Theory for Actuaries*. London: Chapman & Hall.
- DELBAEN, F. (2000): *Coherent Measures of Risk on General Probability Spaces*. Zurich: ETH.
- DOZHAN, L.U. (1978): "On the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics* vol. 6, núm. 1, pp. 59-69.
- ELING, M.; PARNITZKE, T. (2006): *Dynamic Financial Analysis: Classification, Conception, and Implementation*. (Working Papers on Risk Management and Insurance, 16).
- EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A.; STRAUMANN, D. (2001): "Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls", en M. Dempster [ed.]: *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, pp. 176-223. Cambridge University Press.
- FISHER, I. (1930) *Theory of Interest*. New York: The Macmillan.
- FELDBLUM, S. (1989): *Asset Liability Matching for Property/Casual Insurers*. (CAS Discussion Paper

- Program, Discussion Papers on Valuation Issues).
- GEOGHEGAN, T.J.; CLARKSON, R.S.; FELDMAN, K.S.; GREEN, S.J.; KITTS, A.; LAVECKY, J.P.; ROSS, F.J.M.; SMITH, W.J.; TOUTOUNCHI, A. (1992): "Report on the Wilkie Stochastic Investment Model", *Journal of Institute of Actuaries*, núm. 119, pp. 173-228.
- GIBSON, R.; L'HABITANT F.; TALAY, D. (2001): *Modeling the Term Structure of Interest Rates: A Review of the Literature*. <http://ssrn.com/abstract=275076>.
- GOOIJER, J.G. DE; VIDIELLA-I-ANGUERA, A. (2000): *Modelling Seasonalities in Nonlinear Inflation Rates using SEASETARs*. (Discussion Paper). Tinbergen Institute.
- GORVETT, R.W. (1998): *Dynamic Financial Analysis of Property-Liability Insurance Companies*, (PhD Thesis). University of Illinois at Urbana-Champaign
- HARDY, M. (2001): "A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns", *North American Actuarial Journal*, núm. 5, (2), pp. 41-53.
- HEATH, D.; JARROW, R.; MORTON, A. (1992): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology", *Econometrica*, 60 pp. 77-105.
- HIBBERT, J.; MOWBRAY, P.; TURNBULL, C. (2001): *A Stochastic Asset Model & Calibration for Long-Term Financial Planning Purposes*. (Technical Report). Barrie & Hibbert.
- HO, T.S.Y.; LEE, S.B. (1986): "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *The Journal of Finance* vol. 41, pp. 1011-1030.
- HODES, D.M.; FELDBUM, S. (1999): "The Rest of the Loss-Reserve Story", *Best's Review*, vol. 100, núm. 2, pp. 85-91.
- HUBER, P.P. (1995): "A Review of Wilkie's Stochastic Investment Model", *British Actuarial Journal* 1, pp. 181-211.
- HULL, J.; WHITE, A. (1994): "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models," *Journal of Derivatives*, (Winter), pp. 37-48.
- ICEA (2004): *Informe económico del sector asegurador*. Informe, 927).
- ICEA (2005): *Anuario de los seguros no vida 2005*. (Informe 183).
- ICEA (2005): *Las inversiones de las entidades aseguradoras*. (Informe 936).
- ICEA (2005): *El seguro de automóviles. Siniestralidad por garantías*. (Informe 948).
- JORION, P. (1996): "Risk 2: Measuring the Risk in Value at Risk", *Financial Analysts Journal*, (November-December), pp. 47-56.
- JORION, P. (1997): *Value at Risk: A New Benchmark for Measuring Derivatives Risk*. Irwin.
- KAUFMANN, R.; GADMER, A.; KLETT, R. (2001): "Introduction to Dynamic Financial Analysis", *ASTIN Bulletin*, vol. 31, (1), pp. 213-249.
- KESSNER, E.; PETER, J.U. (2004): "Dynamic Financial Analysis: Getting a Better Grasp of an Insurer's Risks", *Exposure*, núm. 13.
- KIRSCHNER, G.S.; SCHEE, W.C. (1998): "Specifying the Functional Parameters of a Corporate Financial Model for Dynamic Financial Analysis", *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 22, núm. 3, (July), pp. 303-303.
- KOSKINEN, L.; PUKKILA, L. (1996): "An Application of the Vector Autoregressive Model with a Markov Regime to Inflation Rates", *AFIR Colloquium 1996*.
- LOWE, S.P.; STANARD, J.N. (1997): "An Integrated Dynamic Financial Analysis and Decision Support System for a Property Catastrophe Reinsurer", *ASTIN Bulletin*, vol. 27, (2), pp. 339-371.
- LOZANO, R. (2005): "Las implicaciones de Solvencia II en el sector asegurador español", *Revista de Estabilidad Financiera del Banco de España*, núm. 9, (noviembre).
- MARIATHASAN, J.W.E.; RAINS, P.F. (1993): "Strategic Financial Management in a General Insurance company", *Proceedings AFIR 1993*.
- NAKADA, P.; SHAH, H. (1999): "Deconstructing DFA", *Global Reinsurance*, (September).
- PENTIKÄINEN, T.; RANTALA, I. (1982): *Solvency of Insurers and Equalization Reserves*, vol. I y II. Helsinki: Insurance.
- PENTIKÄINEN, T.; BONSDOFF, H.; PESONEN, M.; RANTALA, I.; RUOHONEN, M. (1989): *Insurance Solvency and Financial Strength*. Finnish Insurance Training and Publishing Company Ltd.
- PHILBRICK, S.W.; PAINTER, R.A (2001): "Dynamic Financial Analysis: DFA Insurance Company Case Study Part II: Capital Adequacy and Capital Allocation", *Casualty Actuarial Society Forum*, (Spring), pp. 99-152.
- REBONATO, R. (1998): *Interest Rate Option Models*. 2ª ed. Wiley.
- ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S. (2000): "Optimization of Conditional Value-At-Risk", *The Journal of Risk* vol. 2, (3), pp. 21-41.
- ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S. (2001): *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*. (Research Report 2001-5). University of Florida, ISE Dept.
- ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S. (2002): "Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions", *Journal of Banking & Finance*, vol. 26, (7), pp. 1443-1471.
- SIMONS, K. (1996): "Value-at-risk new approaches to risk management", *New England Economic Review*, (september-october), pp. 3-13.

- SHIU, Y.M. (2006): "Dynamic Financial Analysis in Insurance", *Stochastic Modeling Symposium and Investment Seminar*.
- SZKODA, S.T. (1997): "How DFA Can Help the Property/Casualty Industry", *The Actuarial Review*, vol. 24, núm. 1.
- SOCIETY OF ACTUARIES (1996): *Dynamic Financial Condition Analysis Handbook*.
- TU, S.T. (1998): "The Application of Cumulative Distribution Functions in the Stochastic Chain Ladder Model", *CAS Forum*, (Summer), pp. 389-413.
- VASICEK, O. (1977): "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, vol. 5, pp. 177-188
- WIESNER, E.R.; EMMA, C.C. (2000): *A Dynamic Financial Analysis Application Linked to Corporate Strategy*, pp. 79-104. CAS Dynamic Financial Analysis Call Paper Program.
- WILKIE, D. (1986): "A Stochastic Investment Model for Actuarial Use", *Transactions of the Faculty of Actuaries*, núm. 9, pp.341-403.
- WILKIE, D. (1995): "More on a Stochastic Model for Actuarial Use", *British Actuarial Journal*, pp. 777-964.
- WOLL, R.G. (1987): "*Insurance Profits: Keeping Score, Financial Analysis of Insurance Companies*", Casualty Actuarial Society Discussion Paper Program.
- YAKOUBOV, Y.H.; TEEGER, M.H.; DUVAL, D.B. (1999): "The TY Model: A Stochastic Investment Model for Asset and Liability Management", *Staple Inn Actuarial Society*.