Los coeficientes de seguridad del profesor Ballestero en modelos de transporte: Una solución semiempírica

RAMON ALONSO SEBASTIAN
Profesor Adjunto de Economía
de la Empresa de la Universidad
Politécnica de Madrid

1. INTRODUCCION

Los modelos de distribución comercial, con vistas a programar canales óptimos en un proceso de comercialización integrado verticalmente, se caracterizan por reflejar de una manera conjunta las relaciones que existen entre las diferentes fases por las que atraviesa un producto desde origen a destino. Mediante estos modelos se busca coordinar las políticas de producción, transporte y almacenamiento dentro de una empresa o grupo de empresas que persiguen una política común, orientada a objetivos tales como la minimización del coste, la maximización del beneficio, la expansión, etc.

En los modelos más sencillos se consideran sólo las fases de origen y destino, pero en los modelos más completos se añade una fase intermedia que se refiere a procesos de transformación y/o acondicionamiento del producto.

En cuanto a su formulación, los modelos de distribución comercial son modelos generalizados de transporte que se resuelven por programación lineal, ya que, tanto la función objetivo como las restricciones, se expresan ordinariamente mediante ecuaciones o inecuaciones lineales. Si en el primitivo modelo de Hitchcock se introducen modificaciones para dar entrada al almacenamiento y a los procesos de transformación que se llevan a cabo entre los centros de origen y destino, aparece un modelo de distribución comercial bajo el objetivo de minimización del coste.

El propósito de este artículo es, esencialmente, la determinación aproximada de coeficientes de seguridad que afiancen, en contexto aleatorio, las *restricciones de almacenamiento para los centros transformadores* y aplicar estos coeficientes a dos casos relacionados con empresas españolas, a fin de poner de relieve su efecto sobre el modelo y sobre los resultados finales. La introducción de coeficientes de seguridad en modelos de transporte se debe al profesor Ballestero [2, pág. 528], pero no existe aún una metodología para determinarlos. Nosotros nos hemos valido de un procedimiento semiempírico que simplifica el tratamiento estadístico de un problema bastante complicado.

2. UNA REVISION PREVIA DE LOS MODELOS LINEALES DE DISTRIBUCION COMERCIAL

Comenzaremos recordando el modelo de distribución comercial con tres fases (origen, transformación y destino), para un solo producto, que generalizaremos después al caso de multiproducto en b). En el modelo generalizado se supondrán únicamente dos fases: producción y consumo. Su función objetivo consistirá en la maximización del margen bruto menos los costes de almacenamiento y transporte. Sin embargo, el modelo de monoproducto que veremos en primer lugar se enfoca bajo una óptica de minimización del coste. Esta variante objetiva es preferible, sobre todo cuando el precio de venta varía aleatoriamente y no se conoce su ley de probabilidad. Esta situación de incertidumbre respecto a los ingresos es típica del largo plazo, pero los modelos de distribución comercial están pensados para la programación a corto plazo, donde existe a menudo la posibilidad de prever el precio de venta, ya porque este precio sea un parámetro fijado por la empresa o grupo de empresas, ya porque sea un precio de mercado y se cuente con información suficiente para estimar su valor medio. Por el contrario, cuando un modelo generalizado de transporte se usa en problemas de localización, el planteamiento es a largo plazo y el objetivo más indicado es la minimización de costes, aunque la demanda de cada centro de consumo haya de formularse, inevitablemente, en términos de expectativas.

A) Caso de monoproducto.

Este modelo, que puede verse en [2, págs. 522-528], se caracteriza por optimizar las políticas empresariales en materia de almacenamiento, transporte y producción de una manera conjunta, teniendo en cuenta la interdependencia que existe entre ellas. Igualmente, se introducen en él los llamados coeficientes de seguridad.

El modelo parte, en un planteamiento a corto plazo, de la existencia de *n* centros productores de materia prima, *h* centros transformadores y *m* centros de consumo, de los que se conoce su demanda. Se trata de determinar las cantidades de materia prima que deben ser enviadas desde cada centro productor (o de origen) a cada centro transformador (o intermedio), la cantidad de materia prima que debe transformarse en un centro intermedio y cómo debe hacerse la distribución del producto desde los centros intermedios a los de consumo (o finales) para que los costes totales originados en el proceso de distribución sean mínimos bajo las restricciones impuestas por el corto plazo a las capacidades de producción de materias primas, almacenamiento y transformación, y bajo otras restricciones que se derivan de la limitación de los "stocks" disponibles en un momento dado y de la necesidad de satisfacer la demanda prevista para cada período sin que se produzca penuria.

La notación empleada es la siguiente:

i = índice de cada centro productor de materia prima.

k = índice de cada centro transformador.

j = índice de cada centro consumidor.

a_i = producción de materia prima, durante el período tomado como unidad, en el centro de origen *i*.

$\bar{a}_i$ = existencias de materia prima en los almacenes del centro de origen *i*, procedente de períodos anteriores.

$\bar{d}_k$ = existencias de materia prima, procedente de períodos anteriores, almacenada en el centro transformador *k*.

e_k = existencias de producto en almacén del centro transformador *k*, procedente de períodos anteriores.

f_j = existencias de producto, procedente de períodos anteriores, almacenado en el centro consumidor *j*.

b_j = demanda de producto para el período de tiempo considerado en el centro consumidor *j*.

t_{ik} = coste unitario de transporte desde *i* a *k* (ptas./Tm.).

t'_{kj} = coste unitario de transporte desde *k* a *j* (ptas./Tm.).

c_i = coste de almacenamiento de materia prima en el centro de origen *i* (ptas./Tm. y período de tiempo).

c'_k = coste de almacenamiento de materia prima en el centro transformador *k* (ptas./Tm. y período de tiempo).

c''_k = coste de almacenamiento de producto en el centro transformador k (ptas./Tm. y período).

c'''_j = coste unitario de almacenamiento del producto en el centro consumidor j (ptas./Tm. y período).

T_k = coste unitario de transformación de materia prima en producto.

S_k = capacidad de transformación en un período de tiempo en el centro transformador k.

l'_k = capacidad de almacenamiento de materia prima en el centro transformador k.

l''_k = capacidad de almacenamiento de producto en el centro transformador k.

l'''_k = capacidad de almacenamiento de producto en el centro consumidor j.

λ = coeficiente de conversión de materia prima en producto.

Las incógnitas del modelo son:

X_{ik} = cantidad de materia prima a enviar desde el centro de origen i al centro transformador k a lo largo de un período de tiempo.

Y_{kj} = cantidad de producto a enviar desde el centro transformador k al centro consumidor j.

U_k = cantidad de materia prima a transformar, en el período de tiempo que se toma como unidad, en el centro transformador k.

Podemos clasificar las restricciones en cinco tipos:

A) Aquellas que se refieren a las disponibilidades de "stock" y a la capacidad de producción èn origen.

B) Aquellas que se refieren a las capacidades de almacenamiento. En cuanto a los centros intermedios, se supone que hay en ellos dos clases de almacenes: los destinados a materias primas y los destinados al producto. Esto es lo que suele ocurrir en la realidad, ya que la distinta naturaleza del producto, por una parte, y de la materia prima, por otra, desaconseja o impide el recurso a un almacén común. No obstante, el modelo no pierde generalidad en razón de esta hipótesis, pues en caso de almacén único bastaría refundir las restricciones respectivas.

C) Aquellas que se refieren a las capacidades de transformación en los centros intermedios.

D) Las restricciones de demanda.

E) Las restricciones de no negatividad.

Las restricciones son:

1.° La cantidad de materia prima que se envía desde origen a centro transformador no puede superar a la producción del período más el "stock" en el centro de origen.

$$\sum_{k=1}^{h} X_{ik} \leq \bar{a}_i + a_i \qquad (1)$$

donde i = 1, 2, ... n.

2.° La cantidad de materia prima a elaborar en el centro transformador *k* no puede superar a la cantidad recibida de todas las fábricas junto con las existencias de períodos anteriores en *k*.

$$U_k \leq \sum_{i=1}^{n} X_{ik} + \bar{d}_k \qquad (2)$$

donde k = 1, 2, ... h.

3.° La cantidad de producto enviado desde el centro transformador *k* a los centros consumidores no puede superar a la materia prima elaborada en dicho centro, junto con el "stock" de producto en los almacenes del centro transformador *k* procedente de períodos anteriores.

$$\sum_{j=1}^{m} Y_{kj} \leq \lambda\, U_k + e_k \qquad (3)$$

donde k = 1, 2, ... h.

4.° La cantidad de producto enviada desde los centros transformadores al centro consumidor *j*, junto con el "stock" de producto almacenado en el centro consumidor *j* procedente de períodos anteriores, ha de ser mayor o igual que la demanda del centro *j*.

$$\sum_{k=1}^{h} Y_{kj} + f_j \geq b_j \qquad (4)$$

donde $j = 1, 2, \ldots m.$

5.° La cantidad de materia prima transformada en el centro transformador *k* no puede exceder de la capacidad de transformación para un período en el centro *k*.

$$U_k \leq S_k \qquad (5)$$

donde $k = 1, 2, \ldots h.$

6.° La cantidad de materia prima almacenada en el centro transformador *k* no puede exceder de la capacidad de almacenamiento de materia prima en *k*.

$$\bar{d}_k + \sum_{i=1}^{n} X_{ik} - U_k \leq l'_k \qquad (6)$$

donde $k = 1, 2, \ldots h.$

7.° La cantidad de producto almacenada en el centro transformador *k* no puede exceder de la capacidad de los almacenes que se destinan en *k* al producto terminado.

$$e_k + \lambda U_k - \sum_{j=1}^{m} Y_{kj} \leq l''_k \qquad (7)$$

donde $k = 1, 2, \ldots h.$

8.° La cantidad de producto almacenado en el centro consumidor *j* no puede exceder de la capacidad de sus almacenes.

$$f_j + \sum_{k=1}^{h} Y_{kj} - b_j \leq l'''_j \qquad (8)$$

donde $j = 1, 2, \ldots m.$

A continuación se calculan por separado los costes de los procesos de producción, transporte y almacenamiento.

a) Coste de transporte desde centro de origen a centro transformador:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{h} t_{ik} X_{ik} \tag{9}$$

b) Coste de transporte desde centro transformador a centro consumidor:

$$\sum_{k=1}^{h} \sum_{j=1}^{m} t'_{kj} Y_{kj} \tag{10}$$

c) Coste de transformación:

$$\sum_{k=1}^{h} T_k U_k \tag{11}$$

d) Coste de almacenamiento de materia prima en centro de origen:

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{a}_i + a_i - \sum_{k=1}^{h} X_{ik}) C_i \tag{12}$$

e) Coste de almacenamiento de materia prima en los centros transformadores:

$$\sum_{k=1}^{h} (\bar{d}_k + \sum_{i=1}^{n} X_{ik} - U_k) C'_k \tag{13}$$

f) Coste de almacenamiento del producto en los centros transformadores:

$$\sum_{k=1}^{h} (e_k + \lambda U_k - \sum_{j=1}^{m} Y_{kj}) C''_k \tag{14}$$

g) Coste de almacenamiento del producto en los centros consumidores:

$$\sum_{j=1}^{m} (f_j + \sum_{k=1}^{h} Y_{kj} - b_j) C'''_j \tag{15}$$

El coste total es la suma de las expresiones anteriores y constituye la función objetivo. Se plantea así una programación lineal a fin de obtener los valores de X_{ik}, U_k, Y_{kj} que minimizan el coste total sujetos a las restricciones anteriormente citadas, junto con las de no negatividad de las variables X_{ik}, U_k, Y_{kj}.

B) CASO DE MULTIPRODUCTO.

El modelo puede enunciarse así:

Una empresa dispone de *m* centros transformadores de materia prima. En cada uno de ellos pueden fabricarse *n* productos diferentes. Existen *k* zonas consumidoras de los *n* productos que deben ser abastecidas por la empresa y de las que se conoce su demanda. Se trata de determinar la producción óptima de cada centro transformador y la distribución desde los mismos a las zonas consumidoras para que sea máximo el margen bruto menos los costes de transporte y almacenamiento, y se cumplan las restricciones existentes.

El modelo consta de una función objetivo y de unas restricciones (consecuencia de la estructura de los procesos de producción que se llevan a cabo), pudiendo ser resuelto mediante los algoritmos clásicos de la programación lineal.

Los componentes de la función objetivo son:

— Costes de transporte. Se originan por el transporte de los productos desde los centros productores a las zonas de consumo.

— Costes de almacenamiento. Si en las zonas de consumo existe posibilidad de almacenamiento, éste lleva aparejados unos costes.

— Margen bruto parcial. Se define como la diferencia entre el precio de venta de un producto y su coste de fabricación.

— Margen bruto total. Es la suma de los márgenes brutos parciales.

Normalmente, en los modelos económicos se pretende la maximización del margen bruto total o la minimización de los costes de producción. En este caso, sin embargo, hay que restar al margen bruto los costes de transporte y almacenamiento, ya que estos costes constituyen componentes negativos de la ganancia, para formar la función objetivo.

Teniendo en cuenta lo anterior, la función objetivo es:

Min. Z = Costes de transporte + costes de almacenamiento — margen bruto.

Como es obvio, esta función equivale a:

Máx. W = Márgenes brutos — costes de transporte — costes de almacenamiento.

Los subíndices correspondientes son:

i = producto ($i = 1, 2, ..., n$).
j = centro productor ($j = 1, 2, ..., m$).
k = zona consumidora ($k = 1, 2, ..., h$).

La notación empleada es:

q_{ik} = demanda de producto *i* en la zona consumidora *k*.
P_j = disponibilidades de materia prima en el centro productor *j*.
S_{ij} = capacidad productiva máxima o capacidad de transformación máxima del centro *j* para producto *i*.
S'_{ij} = capacidad productiva mínima del centro *j* para producto *i*.
l_{ik} = capacidad máxima de almacenamiento del producto *i* en la zona consumidora *k*.
C_{ijk} = coste de transporte de una unidad de producto *i* desde el centro productor *j* a la zona consumidora *k*.
I_{ijk} = ingreso originado por la venta de una unidad de producto *i* procedente del centro *j* y vendida en la zona consumidora *k*.
F_{ijk} = coste de fabricación de una unidad de producto *i*, procedente del centro *j*, y vendida en la zona consumidora *k*.
A_{ijk} = coste de almacenamiento de una unidad de producto *i* en la zona consumidora *k*.
λ_{ij} = coeficiente de transformación de materia prima en producto *i* en el centro *j*.

Como incógnitas se tiene:

X_{ijk} = cantidad de producto *i* transformada en el centro *j* y destinada al consumo en el centro *k*.

La función objetivo se enuncia, pues, así:

$$\text{Min. } Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{h} C_{ijk} X_{ijk} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{h} (X_{ijk} - q_{ik}) A_{ik}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{h} (I_{ijk} - F_{ijk}) X_{ijk} \qquad (16)$$

y también:

$$\text{Máx. } V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{h} (I_{ijk} - F_{ijk}) X_{ijk} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{h} C_{ijk} X_{ijk} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{h} (X_{ijk} - q_{ik}) A_{ik} \qquad (17)$$

Las restricciones son:

a) Restricciones de producción. La materia prima empleada en fabricar los productos que se envían a las zonas de consumo tiene que ser menor o igual que la materia prima disponible en el centro productor:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} X_{ijk} \leq P_j \qquad \begin{matrix} j = 1, 2, \ldots, m. \\ k = 1, 2, \ldots, h. \end{matrix} \qquad (18)$$

b) Restricciones técnicas de producción máxima. Las cantidades fabricadas de cada producto no pueden superar la capacidad para dicho producto:

$$\sum_{k=1}^{h} X_{ijk} \leq S_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n. \\ j = 1, 2, \ldots, m. \end{matrix} \qquad (19)$$

c) Restricciones técnicas de producción mínima. Las cantidades fabricadas de cada producto deben ser mayores o iguales que las cotas de producción mínima:

$$\sum_{k=1}^{h} X_{ijk} \geq S'_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n. \\ j = 1, 2, \ldots, m. \end{matrix} \qquad (20)$$

d) Restricciones de demanda. La demanda de cada zona de consumo tiene que ser satisfecha:

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ijk} \geq d_{ik} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n. \\ k = 1, 2, \ldots, h. \end{matrix} \tag{21}$$

e) Restricciones de almacenamiento. Las cantidades de producto que se pueden almacenar en las zonas consumidoras no pueden superar las respectivas cantidades de almacenamiento:

$$\sum_{j=1}^{m} (X_{ijk} - d_{ik}) \leq l_{ik} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n. \\ k = 1, 2, \ldots, h. \end{matrix} \tag{22}$$

f) Restricciones de no negatividad:

$$X_{ijk} \geq O \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n. \\ j = 1, 2, \ldots, m. \\ k = 1, 2, \ldots, h. \end{matrix} \tag{23}$$

Resolviendo el programa lineal, cuya función objetivo es (16) ó (17), sujeta a las restricciones (18) a (23), se obtienen las cantidades de los diferentes productos para los distintos centros productores.

3. COEFICIENTES DE SEGURIDAD EN MODELOS DE DISTRIBUCION COMERCIAL

Al proponer el uso de coeficientes de seguridad en los modelos de transporte, Ballestero [2, pág. 528] no indica un procedimiento estadístico para su determinación.

Los coeficientes se pueden aplicar a diversas restricciones de los modelos, pero principalmente se aplican a las de almacenamiento y demanda de los centros finales.

A) EN LAS RESTRICCIONES DE ALMACENAMIENTO.

Cuando los coeficientes afectan al almacenamiento de materia prima (v. gr., en los almacenes de los centros transformadores), su objeto es considerar el escalonamiento de las cantidades que llegan de los centros de origen y el de las cantidades que se transforman en las fábricas. En este caso, modifican la restricción de almacenamiento:

$$\bar{d}_k + \sum_{i=1}^{n} X_{ik} - U_k \leq l'_k \qquad (19)$$

donde:

$\bar{d}_k$ = existencias de materia prima en el centro transformador *k*, procedentes de períodos anteriores.

$\sum_{i=1}^{n} X_{ik}$ = cantidad de materia prima recibida en el centro transformador *k*.

U_k = cantidad transformada en dicho centro.

En realidad, la restricción (19) sólo es válida cuando todas las cantidades llegan y se transforman simultáneamente, lo que no suele ocurrir en la práctica. Cuando el escalonamiento es perfecto, la restricción (19) debe ser sustituida por:

$$\bar{d}_k + 0{,}5 \sum_{i=1}^{n} X_{ik} - 0{,}5\ U_k \leq l'_k \qquad (20)$$

con lo que se deja libertad al programa para tomar valores adecuados.

Cuando el escalonamiento no es perfecto, la restricción (19) debe sustituirse por:

$$\bar{d}_k + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\ X_{ik} - \beta_k\ U_k \leq l'_k \qquad (21)$$

En el caso de llegadas y salidas aleatorias no puede aspirarse a que (21) se cumpla sino en términos de probabilidad, es decir:

$$P \left[\bar{d}_k + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\ X_{ik} - \beta_k\ U_k \leq l'_k \right] \geq P_k \qquad (22)$$

siendo P_k un nivel de probabilidad prefijado.

Para determinar α_{ik} y β_k hemos seguido un procedimiento semiempírico en el que se necesita conocer las cantidades recibidas en cada centro transformador procedentes de cada centro de producción.

Según este procedimiento, se divide el período base en un número de subperíodos tal que no se produzcan costes extraordinarios por falta de capacidad de almacenamiento.

Si el período base (v. gr., la semana) se divide en dos subperíodos, se tiene:

$$\begin{aligned} X_{ik} &= X'_{ik} + X''_{ik} \\ U_k &= U'_k + U''_k \end{aligned} \tag{23}$$

Es decir, la cantidad total enviada es la suma de las cantidades enviadas en los dos subperíodos.

Como consecuencia de este desdoblamiento, las restricciones de almacenamiento se convierten en:

$$\bar{d}_k + \sum_{i=1}^{n} X'_{ik} - U_k \leq l'_k \tag{24}$$

$$(\bar{d}_k + \sum_{i=1}^{n} X'_{ik} - U'_k) + (\sum_{i=1}^{n} X''_{ik} - U''_k) \leq l'_k \tag{25}$$

Se ve inmediatamente que esta última restricción es una repetición de la ya considerada para el período base:

$$\bar{d}_k + \sum_{i=1}^{n} X_{ik} - U_k \leq l'_k \tag{6}$$

por lo cual (25) puede suprimirse.

Definamos ahora φ_{ik} y γ_k, que representan los porcentajes de cada envío (o transformación en fábrica) en relación con las respectivas cantidades para todo el período:

$$\varphi_{ik} = \frac{X'_{ik}}{X_{ik}} \tag{26}$$

$$\gamma_k = \frac{U'_k}{U_k} \tag{27}$$

y como $X'_{ik} \leq X_{ik}$, $U'_k \leq U_k$, se cumplirá:

$$\varphi_{ik} \leq 1 \text{ , } \gamma_k \leq 1$$

Sustituyendo en (24) se forman las siguientes restricciones:

$$\bar{d}_k + \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ik} \ X_{ik} - \gamma_k \ U_k \leq l'_k \qquad k = 1, 2, ..., h. \tag{28}$$

Definamos una variable aleatoria η_k, que representa la cantidad tota recibida:

$$\eta_k = \varphi_{1k} \ X_{1k} + ... + \varphi_{nk} \ X_{nk} \tag{29}$$

Sustituyendo (29) en (28) tenemos:

$$\bar{d}_k - \eta_k - \gamma_k \ U_k \leq l'_k \tag{30}$$

Si suponemos, en primera aproximación, que todos los φ_{ik} son iguales podemos escribir:

$$\eta_k = \varphi \ (X_{1k} + K_{2k} + ... + X_{nk}) = \varphi \sum_{i=1}^{n} X_{ik} \tag{31}$$

Para la nueva variable así definida se calculan la media y la desviación típica:

$$\bar{\eta}_k = \bar{\varphi} \ (X_{1k} + K_{2k} + ... + X_{nk}) = \bar{\varphi} \sum_{i=1}^{n} X_{ik} \tag{32}$$

$$\sigma^2_{\eta_k} = \sigma^2_{\varphi} X^2_{1k} + \sigma^2_{\varphi} X^2_{2k} + ... + \sigma^2_{\varphi} X^2_{nk} = \sigma^2_{\varphi} \sum_{i=1}^{n} X^2_{ik} = \sigma^2_{\varphi ik} \sum_{i=1}^{n} X^2 \tag{33}$$

$$\sigma_{\eta_K} = \sqrt{\sum_{1=1}^{n} X^2_{ik}} \cdot \sigma_{\varphi} \tag{34}$$

Definimos también la variable Φ_k:

$$\Phi_k = \gamma_k U_k \tag{35}$$

sustituyéndola en (30) nos da:

$$\bar{d}_k + \eta_k - \Phi_k \leq l'_k \tag{36}$$

Para Φ_k, pueden calcularse la media y la desviación típica:

$$\Phi_k = \bar{\gamma}_k U_k \tag{37}$$

$$\Phi_k = \sigma_{\gamma_k} \sqrt{\overline{U^2}_k} = \sigma\gamma_k U_k$$

Los valores de η_k y Φ_k, que figuran en (36) pueden sustituirse por su intervalo de confianza, con lo que (36) se convierte en:

$$\bar{d}_k + \bar{\varphi} \sum_{i=1}^{n} X_{ik} \pm \lambda\sigma_{\varphi} \sum_{i=1}^{n} X^2_{ik} - (\gamma_k U_k \pm \lambda\sigma_{\gamma_k} \sqrt{\overline{U^2}_k}) \leq l'_k \tag{38}$$

El problema que se presenta ahora es que esta restricción no es lineal, por lo que conviene proceder a su linealización.

A este fin, se tiene en cuenta la desigualdad:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X^2_{ik}} < \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} X_{ik})^2} \tag{39}$$

que permite mayorar la restricción (38) convirtiéndola en:

$$\bar{d}_k + \bar{\varphi} \sum_{i=1}^{n} X_{ik} \pm \lambda\sigma_{\gamma_k} \sum_{i=1}^{n} X_{ik} - (\gamma_k U_k \pm \lambda\sigma_{\gamma_k}) U_k \leq l'_k \tag{40}$$

Haciendo:

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} &= (\bar{\varphi} \pm \lambda\sigma_{\varphi}) \\ \beta_k &= (\bar{\gamma}_k \pm \lambda\sigma_{\gamma_k}) \end{aligned} \tag{41}$$

y teniendo en cuenta que:

$$0 \leq \alpha_{ik} \leq 1$$

$$0 \leq \beta_k \leq 1$$

quedan definidos los intervalos dentro de los cuales pueden elegirse los valores de α_{ik} y β_k.

Así pues, se presenta un problema de elección, pudiéndose cómbinar un punto del intervalo para α_{ik} con otro punto del intervalo para β_k, de todos los modos posibles. Limitándonos a los extremos de ambos intervalos, las combinaciones de puntos se corresponden con las combinaciones de signo. Tenemos así las siguientes:

a) $\alpha_{ik} = (\overline{\varphi} + \lambda\sigma_{\varphi})$ $\qquad \beta_k = (\overline{\gamma_k} + \lambda\sigma_{\gamma_k})$

b) $\alpha_{ik} = (\overline{\varphi} + \lambda\sigma_{\varphi})$ $\qquad \beta_k = (\overline{\gamma_k} - \lambda\sigma_{\gamma_k})$

c) $\alpha_{ik} = (\overline{\varphi} - \lambda\sigma_{\varphi})$ $\qquad \beta_k = (\overline{\gamma_k} + \lambda\sigma_{\gamma_k})$

d) $\alpha_{ik} = (\overline{\varphi} - \lambda\sigma_{\varphi})$ $\qquad \beta_k = (\overline{\gamma_k} - \lambda\sigma_{\gamma_k})$

Las repercusiones que cada combinación originan sobre el resto de las restricciones del programa puede verse en [1].

B) EN RESTRICCIONES DE DEMANDA.

Cuando los coeficientes afectan a las demandas de centros finales, su objeto es poder afirmar, con una probabilidad determinada P_k, que no va a existir penuria por demanda insatisfecha, si ésta varía de acuerdo con ciertas leyes estadísticas. Con su introducción, las cantidades de producto asignadas a los centros finales toman valores distintos, que resultan como sigue.

Supongamos que haya sido $\overline{d_{ik}}$ la demanda media de producto i en el centro k durante períodos anteriores, y $\sigma_{d_{ik}}$ la desviación típica de la misma. Llamaremos P_k a la probabilidad con que se quiere asegurar la ausencia de penuria. Para ello, se sustituye $\overline{d_{ik}}$ por $\epsilon_{ik}\, \overline{d_{ik}}$, en donde ϵ_{ik} es el coeficiente de seguridad para el producto i en el centro k.

Si la demanda sigue una ley normal:

$$\epsilon_{ik}\, \overline{d_{ik}} = d_{ik} + \lambda\sigma_{ik} \tag{42}$$

luego:

$$\epsilon_{ik} = 1 + \frac{\lambda\sigma_{ik}}{\overline{d_{ik}}} \tag{43}$$

Si la demanda sigue una ley de Poisson:

$$\Phi_{ik}\,\overline{d}_{ik} = \sqrt{\overline{d}_{ik}} + \lambda\sqrt{\overline{d}_{ik}} \qquad (44)$$

luego:

$$\Phi_{ik} = 1 + \frac{\lambda\sqrt{\overline{d}_{ik}}}{\overline{d}_{ik}} \qquad (45)$$

Con la introducción de los coeficientes, las nuevas restricciones son:

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ijk} \geq \Phi_{ik}\sqrt{\overline{d}_{ik}} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ h. \end{array} \qquad (46)$$

que reemplazan a las restricciones antes señaladas.

4. APLICACIONES PRACTICAS.

A) Una cooperativa que comercializa un determinado tipo de vino, embotella y distribuye cierta cantidad de vino a granel a 3 bodegas diferentes. El proceso se extiende a una semana. Para el embotellado, la cooperativa dispone de tres plantas situadas en las localidades *A*, *B* y *C* con una capacidad distinta para cada planta. La citada empresa debe atender a demandas conocidas en 4 ciudades.

Se trata de establecer una política óptima de distribución, planificando: *a)* cantidades de vino a granel a enviar desde cada centro productor a cada planta embotelladora; *b)* cantidades de vino embotellado a enviar desde cada planta embotelladora a cada centro de consumo; *c)* cantidades de vino a embotellar en cada planta. Han de satisfacerse determinadas restricciones y el objetivo es minimizar los costes conjuntos de embotellado, transporte y almacenamiento.

A las bodegas se las designa por 1, 2, 3.
A las plantas embotelladoras se las designa por A, B, C.
A los centros de consumo se les designa por 1, 2, 3, 4.

En la matriz *P*, de dimensión 1×3, figuran las cantidades de vino a granel que deben retirarse de las bodegas, siendo el elemento p_i la cantidad de vino a granel que hay que retirar de la bodega *i*.

$$P = |\ 135,\ 280,\ 180\ |$$

En la matriz D, de dimensión 1×3, figuran las existencias de vino a granel en los almacenes de las plantas embotelladoras. El elemento d_k representa el *stock* de vino a granel en la planta k.

$$D = | 15, 18, 10 |$$

En la matriz E, de dimensión 1×3, figuran las existencias de vino embotellado en los almacenes de las plantas embotelladoras, siendo e_k el *stock* en la planta k.

$$E = | 12, 11, 8 |$$

En la matriz F, de dimensión 1×4, figuran las existencias de vino embotellado procedentes de períodos anteriores y almacenados en los centros de consumo. El elemento f_j representa las existencias de vino embotellado en el centro j.

$$F = | 10, 12, 14, 18 |$$

En la matriz B, de dimensión 1×4, figuran las demandas de vino embotellado, representando el elemento b_j la demanda de dicho producto en el centro j.

$$B = | 65, 135, 260, 145 |$$

En la matriz Z, de dimensión 1×3, figuran las capacidades de embotellamiento en los diferentes centros. El elemento z_k representa la capacidad máxima de embotellamiento en el centro k.

$$Z = | 190, 215, 200 |$$

En la matriz L, de dimensión 1×3, figuran las capacidades de almacenamiento de vino a granel en las plantas embotelladoras, siendo l_k la cantidad máxima de vino a granel que puede almacenarse en la planta k.

$$L = | 20, 20, 25 |$$

En la matriz L', de dimensión 1×3, figuran las capacidades de almacenamiento de vino embotellado en las plantas embotelladoras, siendo l'_k la capacidad de la planta k.

$$L' = | 15, 15, 15 |$$

En la matriz L'', de dimensión 1×4, figuran las capacidades de almacenamiento de vino embotellado. El elemento l''_j representa la capacidad de almacenamiento de vino embotellado en el centro j.

$$L'' = | 20, 20, 20, 20 |$$

Los costes de transporte de vino a granel (ptas./Hl.) desde las bodegas a las plantas embotelladoras vienen expresados en la matriz C, de dimensión 3×3, siendo c_{ik} el coste de transporte unitario desde el centro productor i a la planta embotelladora k.

$$C = \begin{vmatrix} 100 & 90 & 130 \\ 120 & 100 & 110 \\ 120 & 100 & 100 \end{vmatrix}$$

Los costes de transporte de vino embotellado (ptas./Hl.) desde las plantas embotelladoras a los centros de consumo se expresan en la matriz C', de dimensión 3×4, siendo c_{kj} el coste de transporte unitario desde la planta embotelladora k al centro de consumo j.

$$C' = \begin{vmatrix} 150 & 140 & 90 & 90 \\ 130 & 80 & 90 & 100 \\ 100 & 110 & 100 & 120 \end{vmatrix}$$

Los costes de almacenamiento de vino a granel en las plantas embotelladoras figuran en la matriz G, de dimensión 1×3, siendo g_k el coste de almacenamiento unitario de la planta k.

$$G = | 120, 120, 120 |$$

Los costes unitarios de almacenamiento de vino embotellado en los almacenes de las plantas embotelladoras figuran en la matriz H, de dimension 1×3, siendo h_k el coste unitario de almacenamiento en la planta k.

$$H = | 90, 90, 120 |$$

Los costes unitarios de almacenamiento de vino embotellado en los almacenes de los centros de consumo figuran en la matriz M, de dimensión 1×4, siendo m_j el coste unitario de almacenamiento en el centro j.

$$M = | 100, 110, 120, 100 |$$

Los costes unitarios de embotellamiento figuran en la matriz *L*, de dimensión 1 × 3, siendo l_k el coste unitario de embotellamiento en la planta *k*.

$$L = | 80, 90, 80 |$$

Las incógnitas del modelo figuran en la matriz X, de dimensión 3 × 3. Por tanto, el elemento X_{ik} representa la cantidad de vino a granel que se debe enviar desde la bodega a la planta de embotellado *k*.

$$X = \begin{vmatrix} X_{1A} & X_{1B} & X_{1C} \\ X_{2A} & X_{2B} & X_{2C} \\ X_{3A} & X_{3B} & X_{3C} \end{vmatrix}$$

En la matriz *Y*, de dimensión 3 × 4, figuran las cantidades de vino embotellado que deben ser enviadas desde las plantas embotelladoras a los centros de consumo. Por tanto, el elemento y_{kj} representa la cantidad de vino embotellado que se debe enviar desde la planta *k* al centro de consumo *j*.

$$Y = \begin{vmatrix} Y_{A1} & Y_{A2} & Y_{A3} & Y_{A4} \\ Y_{B1} & Y_{B2} & Y_{B3} & Y_{B4} \\ Y_{C1} & Y_{C2} & Y_{C3} & Y_{C4} \end{vmatrix}$$

En la matriz *U*, de dimensión 1 × 3, figuran las cantidades de vino que se deben embotellar en cada planta. Por tanto, el elemento u_k representa la cantidad de vino que se debe embotellar en la planta *k*.

$$U = | U_A \; U_B \; U_C |$$

Escribamos ahora las restricciones y la función objetivo.

Las condiciones que se deben cumplir son:

1.° La cantidad de vino a granel a enviar desde cada bodega al conjunto de las plantas embotelladoras debe coincidir con la cantidad que la cooperativa se comprometió a retirar de dicha bodega. Por tanto:

$$\begin{aligned} X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} &= 135 \\ X_{2A} + X_{2B} + X_{2C} &= 280 \\ X_{3A} + X_{3B} + X_{3C} &= 180 \end{aligned} \tag{47}$$

2.° La cantidad de vino que se embotella en cada planta no puede ser mayor que el *stock* de vino a granel en ella, junto con las cantidades recibidas desde todas las bodegas. Por tanto:

$$\begin{aligned} U_A &\leq 15 + X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} \\ U_B &\leq 18 + X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} \\ U_C &\leq 10 + X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} \end{aligned} \tag{48}$$

3.° La cantidad de vino embotellado que se envía desde cada planta a los centros consumidores no puede superar al vino embotellado que hay en dicha planta, más las existencias de vino embotellado procedentes de semanas anteriores y almacenadas en la planta correspondiente:

$$\begin{aligned} Y_{A1} + Y_{A2} + Y_{A3} + Y_{A4} &\leq 12 + U_A \\ Y_{B1} + Y_{B2} + Y_{B3} + Y_{B4} &\leq 11 + U_B \\ Y_{C1} + Y_{C2} + Y_{C3} + Y_{C4} &\leq 8 + U_C \end{aligned} \tag{49}$$

4.° La cantidad de vino embotellado que se envía desde las plantas a cada centro consumidor, junto con las existencias de vino embotellado almacenadas en el centro, ha de ser mayor o igual que la demanda de dicho centro:

$$\begin{aligned} Y_{A1} + Y_{B1} + Y_{C1} + 10 &\geq 65 \\ Y_{A2} + Y_{B2} + Y_{C2} + 12 &\geq 135 \\ Y_{A3} + Y_{B3} + Y_{C3} + 14 &\geq 260 \\ Y_{A4} + Y_{B4} + Y_{C4} + 18 &\geq 145 \end{aligned} \tag{50}$$

5.° La cantidad semanal de vino embotellado no puede superar la capacidad de cada planta:

$$\begin{aligned} U_A &\leq 190 \\ U_B &\leq 215 \\ U_C &\leq 200 \end{aligned} \tag{51}$$

6.° La cantidad de vino a granel que se almacena en cada planta no debe superar la capacidad de almacenamiento de dicha planta:

$$\begin{aligned} 15 + X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} - U_A &\leq 20 \\ 18 + X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} - U_B &\leq 20 \\ 10 + X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} - U_C &\leq 20 \end{aligned} \tag{52}$$

7.° Las cantidades de vino embotellado que se almacenan en cada planta no pueden superar las capacidades de almacenamiento de dichas plantas:

$$\begin{aligned} 12 + U_A - Y_{A1} - Y_{A2} - Y_{A3} - Y_{A4} &\leq 15 \\ 11 + U_B - Y_{B1} - Y_{B2} - Y_{B3} - Y_{B4} &\leq 15 \\ 8 + U_C - Y_{C1} - Y_{C2} - Y_{C3} - Y_{C4} &\leq 15 \end{aligned} \qquad (53)$$

8.° Las cantidades de vino embotellado que se almacena en cada centro consumidor no pueden exceder de sus capacidades de almacenamiento:

$$\begin{aligned} Y_{A1} + Y_{B1} + Y_{C1} + 10 - 65 &\leq 20 \\ Y_{A2} + Y_{B2} + Y_{C2} + 12 - 135 &\leq 20 \\ Y_{A3} + Y_{B3} + Y_{C3} + 14 - 260 &\leq 20 \\ Y_{A4} + Y_{B4} + Y_{C4} + 18 - 145 &\leq 20 \end{aligned} \qquad (54)$$

Los términos de la función objetivo son:

a) Coste de transporte del vino a granel desde las bodegas a las plantas embotelladoras:

$$100\ X_{1A} + 90\ X_{1B} + 130\ X_{1C} + 120\ X_{2A} + 100\ X_{2B} + 100\ X_{2C} + \\ + 120\ X_{3A} + 100\ X_{3B} + 100\ X_{3C} \qquad (55)$$

b) Coste de transporte de vino embotellado desde las plantas a los centros consumidores:

$$150\ Y_{A1} + 140\ Y_{A2} + 90\ Y_{A3} + 90\ Y_{A4} + 130\ Y_{B1} + 80\ Y_{B2} + \\ + 90\ Y_{B3} + 100\ Y_{B4} + 100\ Y_{C1} + 100\ Y_{C2} + 110\ Y_{C3} + 120\ Y_{C4} \qquad (56)$$

c) Coste de embotellado:

$$80\ U_A + 90\ U_B + 80\ U_C \qquad (57)$$

d) Coste de almacenamiento del vino a granel en las plantas embotelladoras:

$$(15 + X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} - U_A)\ 120 + (18 + X_{1B} + X_{2B} + \\ + X_{3B} - U_B)\ 120 + (10 + X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} - U_C)\ 120 \qquad (58)$$

e) Coste de almacenamiento del vino embotellado en las plantas embotelladoras:

$$(12 + U_A - Y_{A1} - Y_{A2} - Y_{A3} - Y_{A4})\ 90 + (11 + U_B - Y_{B1} - Y_{B2} - Y_{B3} - Y_{B4})\ 90 + (8 + U_C - Y_{C1} - Y_{C2} - Y_{C3} - Y_{C4})\ 100 \qquad (59)$$

f) Coste de almacenamiento del vino embotellado en los centros consumidores:

$$(10 + Y_{A1} + Y_{B1} + Y_{C1} - 65)\ 100 + (12 + Y_{A2} + Y_{B2} + Y_{C2} + 135)\ 100 + (14 + Y_{A3} + Y_{B3} + Y_{C3} + 260)\ 120 + (18 + Y_{A4} + Y_{B4} + Y_{C4} - 145)\ 100 \qquad (60)$$

g) COSTES TOTALES: Se obtienen sumando los costes (55) a (60), ambos inclusive:

$$220\ X_{1A} + 210\ X_{1B} + 250\ X_{1C} + 240\ X_{2A} + 220\ X_{2B} + 230\ X_{2C} + 240\ X_{3A} + 220\ X_{3B} + 220\ X_{3C} + 50\ U_A + 60\ U_B + 60\ U_C + 160\ Y_{A1} + 160\ Y_{A2} + 120\ Y_{A3} + 100\ Y_{A4} + 140\ Y_{B1} + 100\ Y_{B2} + 120\ Y_{B3} + 110\ Y_{B4} + 100\ Y_{C1} + 120\ Y_{C2} + 120\ Y_{C3} + 120\ Y_{C4} + - 53.220 \qquad (61)$$

El objetivo es organizar los envíos en las diferentes fases, así como el *almacenamiento, de forma que el coste total del proceso de distribución* sea mínimo.

Para ello es necesario minimizar la función objetivo (61), sujeta a las restricciones (47) a (54), ambas inclusive, junto con las restricciones lógicas de no negatividad de las variables. Todo ello conduce al programa lineal del cuadro núm. 1.

Cuadro núm. 1

Minimizar $Z = 220X_{1A} + 210X_{1B} + 250X_{1C} + 240X_{2A} + 220X_{2B} + 230X_{2C} + 240X_{3A} + 220X_{3B} + 220X_{3C} + 50U_A + 60U_B + 60U_C + 160Y_{A1} + 160Y_{A2} + 120Y_{A3} + 100Y_{A4} + 140Y_{B1} + 100Y_{B2} + 120Y_{B3} + 110Y_{B4} + 100Y_{C1} + 120Y_{C2} + 120Y_{C3} + 120Y_{C4} - 53.220.$

(A) $X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} = 135.$
(B) $X_{2A} + X_{2B} + X_{2C} = 280.$
(C) $X_{3A} + X_{3B} + X_{3C} = 180.$
(D) $U_A \leq 15 + X_{1A} + X_{2A} + X_{3A}.$
(E) $U_B \leq 18 + X_{1B} + X_{2B} + X_{3B}.$
(F) $U_C \leq 10 + X_{1C} + X_{2C} + X_{3C}.$
(G) $Y_{A1} + Y_{A2} + Y_{A3} + Y_{A4} \leq 12 + U_A.$
(H) $Y_{B1} + Y_{B2} + Y_{B3} + Y_{B4} \leq 11 + U_B.$
(I) $Y_{C1} + Y_{C2} + Y_{C3} + Y_{C4} \leq 8 + U_C.$
(J) $Y_{A1} + Y_{B1} + Y_{C1} + 10 \geq 65.$
(K) $Y_{A2} + Y_{B2} + Y_{C2} + 12 \geq 135.$
(L) $Y_{A3} + Y_{B3} + Y_{C3} + 14 \geq 260.$
(M) $Y_{A4} + Y_{B4} + Y_{C4} + 18 \geq 145.$
(N) $U_A \leq 190.$
(O) $U_B \leq 215.$
(P) $U_C \leq 200.$
(Q) $15 + X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} - U_A \leq 20.$
(R) $18 + X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} - U_B \leq 20.$
(S) $10 + X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} - U_C \leq 20.$
(T) $12 + U_A - Y_{A1} - Y_{A2} - Y_{A3} - Y_{A4} \leq 15.$
(U) $11 + U_B - Y_{B1} - Y_{B2} - Y_{B3} - Y_{B4} \leq 15.$
(V) $8 + U_C - Y_{C1} - Y_{C2} - Y_{C3} - Y_{C4} \leq 15.$
(X) $Y_{A1} + Y_{B1} + Y_{C1} + 10 - 65 \leq 20.$
(Y) $Y_{A2} + Y_{B2} + Y_{C2} + 12 - 135 \leq 20.$
(Z) $Y_{A3} + Y_{B3} + Y_{C3} + 14 - 260 \leq 20.$
(W) $Y_{A4} + Y_{B4} + Y_{C4} + 18 - 145 \leq 20.$

Esta programación lineal fue resuelta por una computadora IBM, modelo 1130, obteniéndose los siguientes valores para las variables:

$X_{1A} = 135$	$X_{3A} = 0$	$Y_{A1} = 0$	$Y_{B3} = 88$
$X_{1B} = 0$	$X_{3B} = 0$	$Y_{A2} = 0$	$Y_{B4} = 0$
$X_{1C} = 0$	$X_{3C} = 180$	$Y_{A3} = 33$	$Y_{C1} = 75$
$X_{2A} = 45$	$U_1 = 180$	$Y_{A4} = 147$	$Y_{C2} = 0$
$X_{2B} = 215$	$U_2 = 215$	$Y_{B1} = 0$	$Y_{C3} = 125$
$X_{2C} = 20$	$U_3 = 200$	$Y_{B2} = 127$	$Y_{C4} = 0$

El coste total del proceso es $Z = 177.100$ pesetas.

En el gráfico núm. 1 se resumen los resultados.

Analizando estos resultados puede observarse:

1.° Que las plantas embotelladoras A y C no alcanzan los valores máximos posibles, mientras que la planta B logra su cota máxima de embotellado.

2.° Los centros consumidores se encuentran perfectamente establecidos. Los almacenes reguladores de los centros 1 y 4 se encuentran llenos, a diferencia del centro 3, cuyas existencias son nulas, y a diferencia también del centro 2, cuyas existencias sólo ascienden al 20 por 100 de su capacidad.

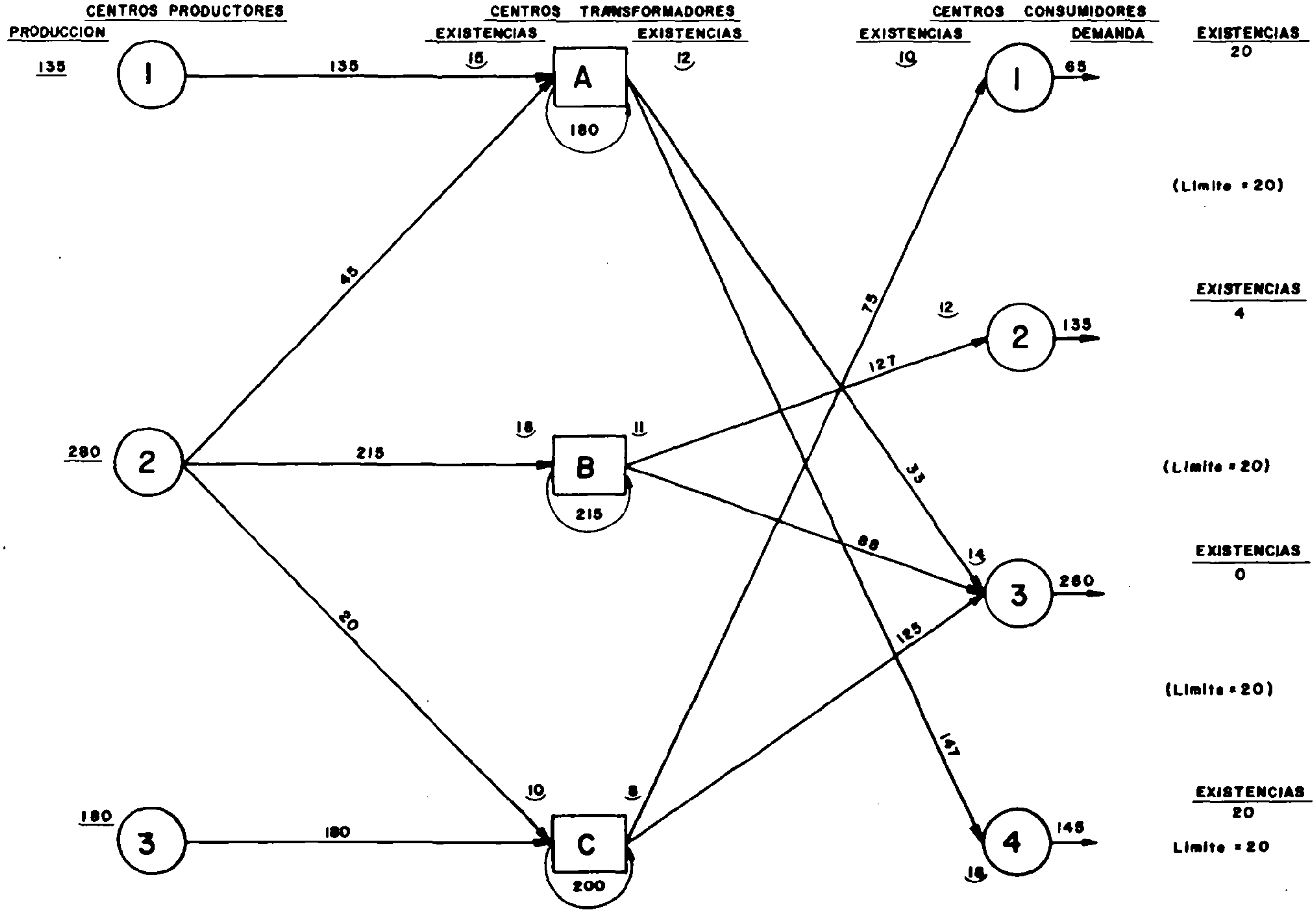
3.° La cantidad recibida por los centros transformadores se embotella íntegramente, sin que en ninguna de las tres plantas se embotelle más cantidad, a pesar de haber existencias de vino a granel en los almacenes.

Aplicación de los coeficientes de seguridad

En las restricciones de almacenamiento no se ha tenido en cuenta el escalonamiento de las entradas y salidas semanales de vino en el almacén de las plantas embotelladoras. A continuación determinamos los coeficientes de seguridad aplicando el procedimiento desarrollado en el § 3. Se han calculado para una probabilidad del 95 por 100, que corresponde a $\lambda = 1,96$, y suponiendo que los φ_{ik} son distintos. Los resultados figuran en el cuadro núm. 2.

GRAFICO Nº 1

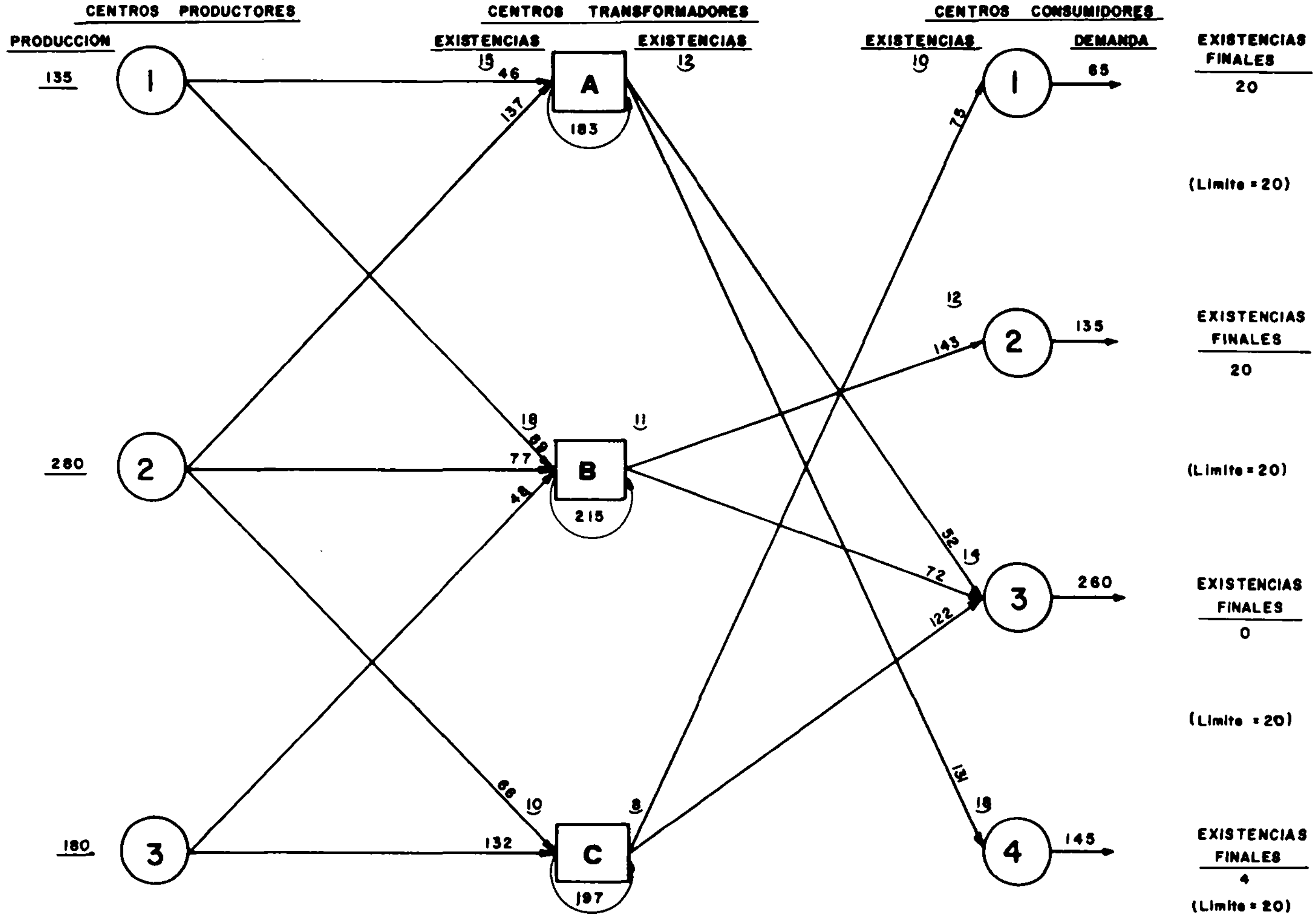
DISTRIBUCION DE LOS ENVIOS (caso general)



RAMON ALONSO SEBASTIAN

GRAFICO Nº 2

DISTRIBUCION DE LOS ENVIOS (caso con coeficientes)



Cuadro núm. 2

		φ_{ik}	$\sigma_{\varphi_{ik}}$	$\alpha_{ik} = \varphi_{ik} + \lambda\sigma_{\varphi_{ik}}$
i = 1	k = 1	0,44	0,05	0,44 + 1,96 × 0,05 = 0,53
	k = 2	0,41	0,04	0,41 + 1,96 × 0,04 = 0,49
	k = 3	0,44	0,03	0,44 + 1,96 × 0,03 = 0,50
i = 2	k = 1	0,39	0,06	0,39 + 1,96 × 0,06 = 0,49
	k = 2	0,47	0,045	0,47 + 1,96 × 0,045 = 0,55
	k = 3	0,40	0,05	0,40 + 1,96 × 0,05 = 0,48
i = 3	k = 1	0,46	0,02	0,46 + 1,96 × 0,02 = 0,50
	k = 2	0,43	0,03	0,43 + 1,96 × 0,03 = 0,48
	k = 3	0,43	0,04	0,43 + 1,96 × 0,04 = 0,51
		γ_k	σ_{γ_k}	$\beta_k = \gamma_k + \lambda\sigma_{\gamma_k}$
	k = 1	0,48	0,01	0,48 + 1,96 × 0,01 = 0,50
	k = 2	0,46	0,02	0,46 + 1,96 × 0,02 = 0,50
	k = 3	0,45	0,04	0,45 + 1,96 × 0,04 = 0,50

en donde:

φ_{ik} = proporción de las cantidades enviadas desde el centro de origen *i* al transformador *k* en la primera parte del período.

$\sigma_{\varphi_{ik}}$ = varianza de dicha proporción.

$\alpha_{ik} = \varphi_{ik} + \lambda\sigma_{\varphi_{ik}}$ = intervalo de confianza de dicha proporción.

γ_k = proporción de las cantidades transformadas en el centro *k*, en la primera parte de la semana.

$\sigma\gamma_k$ = varianza de dicha proporción.

$\beta_k = \gamma_k + \lambda\sigma_{\gamma_k}$ = intervalo de confianza de dicha proporción.

Como consecuencia de la aplicación de los coeficientes de seguridad al modelo general, se producen las siguientes modificaciones:

a) La función objetivo se transforma en:

$0{,}20\ X_{11} + 0{,}18\ X_{12} + 0{,}22\ X_{13} + 0{,}21\ X_{21} + 0{,}19\ X_{22} + 0{,}20\ X_{33} + 0{,}21\ X_{31} + 0{,}19\ X_{32} + 0{,}19\ X_{33} + 0{,}15\ U_1 + 0{,}075\ U_2 + 0{,}075\ U_3 - 53.220.$

ya que los costes de almacenamiento en centro transformador para materia prima, han pasado a ser:

$$[15 + \alpha_{11}X_{11} + \alpha_{21}X_{21} + \alpha_{31}X_{31} - \beta_1U_1]\ 0{,}06 + [15 + \alpha_{11}X_{11} + \alpha_{21}X_{21} + \alpha_{31}X_{31} - \beta_1U_1 + (1 - \alpha_{11})X_{11} + (1 - \alpha_{21})X_{21} + (1 - \alpha_{31})X_{31} - (1 - \beta_1)U_1]\ 0{,}06 + [18 + \alpha_{12}X_{12} + \alpha_{22}X_{22} + \alpha_{32}X_{32} - \beta_2U_2]\ 0{,}06 + [18 + \alpha_{12}X_{12} + \alpha_{22}X_{22} + \alpha_{32}X_{32} - \beta_2U_2 + (1 - \alpha_{12})X_{12} + (1 - \alpha_{22})X_{22} + (1 - \alpha_{32})X_{32} - (1 - \beta_2)U_2]\ 0{,}06 + [10 + \alpha_{13}X_{13} + \alpha_{23}X_{23} + \alpha_{33}X_{33} - \beta_3U_3]\ 0{,}06 + [10 + \alpha_{13}X_{13} + \alpha_{23}X_{23} + \alpha_{33}X_{33} - \beta_3U_3 + (1 - \alpha_{13})X_{13} + (1 - \alpha_{23})X_{23} + (1 - \alpha_{33})X_{33} - (1 - \beta_3)U_3]\ 0{,}06.$$

b) Aparición de nuevas restricciones:

$$\text{(AB)}\quad 0{,}53\ X_{11} + 0{,}49\ X_{21} + 0{,}50\ X_{31} - 0{,}50\ U_1 \leq 5$$

$$\text{(AC)}\quad 0{,}49\ X_{12} + 0{,}55\ X_{22} + 0{,}48\ X_{32} - 0{,}50\ U_2 \leq 2$$

$$\text{(AD)}\quad 0{,}50\ X_{13} + 0{,}48\ X_{23} + 0{,}51\ X_{33} - 0{,}50\ U_3 \leq 10$$

Procesando de nuevo esta programación en una computadora IBM, modelo 1130, se obtuvieron los siguientes resultados:

$X_{1A} = 46$	$X_{3A} = 0$	$X_{A1} = 0$	$Y_{B3} = 72$
$X_{1B} = 89$	$X_{3B} = 48$	$Y_{A2} = 0$	$Y_{B4} = 0$
$X_{1C} = 0$	$X_{3C} = 132$	$Y_{A3} = 52$	$Y_{C1} = 75$
$X_{2A} = 137$	$U_A = 183$	$Y_{A4} = 131$	$Y_{C2} = 0$
$X_{2B} = 77$	$U_B = 215$	$Y_{B1} = 0$	$Y_{C3} = 122$
$X_{2C} = 66$	$U_C = 197$	$Y_{B2} = 143$	$Y_{C4} = 0$

El coste total del proceso es $Z' = 187.859$ ptas.

La distribución de los envíos se representa en el gráfico núm. 2.

Analizando estos resultados puede observarse:

1.º Las plantas embotelladoras 1 y 3 no alcanzan los valores máximos posibles, a diferencia de la 2, que alcanza su cota máxima.

2.° Los centros consumidores se encuentran abastecidos, estando los almacenes reguladores de los centros 1 y 2 llenos, a diferencia del centro 3, en el que no hay "stocks", y del centro 4, en el que los "stocks" son cuatro unidades, lo que representa el 20 por 100 de su capacidad.

3.° Toda la cantidad recibida en los centros transformadores se embotella, sin que en ninguna de las tres plantas se transforme más cantidad que la recibida, aunque existan en los almacenes cantidades disponibles.

4.° El vino embotellado que se envía a los centros de consumo coincide con *el transformado en las plantas, sin que se modifiquen las* existencias disponibles.

Consecuencia de la introducción del escalonamiento

Del análisis conjunto de los resultados obtenidos en el caso general y cuando se han tenido en cuenta los escalonamientos, se deduce:

1.° Un incremento del coste dado por la función objetivo a minimizar, consecuencia de las nuevas restricciones de almacenamiento. (Con este aumento en el coste se aminora la posibilidad de costes de desecho, originados por la venta a un precio inferior al normal, de vino embotellado a granel para el que no hay cabida en los almacenes.)

2.° Una diferente distribución de las cantidades enviadas desde los centros productores a las plantas embotelladoras.

3.° Diferente papel jugado por alguna planta embotelladora en cuanto a la cantidad embotellada (plantas números 1 y 3).

4.° Diferente distribución del vino embotellado desde las plantas embotelladoras a los centros de consumo.

5.° Como consecuencia de 4.°, los depósitos de vino embotellado en los centros de consumo son diferentes al caso general. (En el caso general se llenaban los almacenes de los centros 1 y 4, yendo el exceso a parar al centro 2. Cuando se introduce el escalonamiento, los excedentes llenan, en primer lugar, los almacenes 1 y 2, y el resto va al almacén del centro 4, quedando sin existencias el centro 3.)

B) Una empresa industrial lechera dispone de dos centrales lecheras situadas en lugares distintos. En cada una de ellas puede producirse leche homogeneizada, queso y mantequilla. La empresa debe abastecer a tres zonas de consumo de las que conoce su demanda.

La empresa trata de determinar las producciones de cada central que, satisfaciendo las demandas de los centros consumidores, hagan máximos los márgenes de fabricación menos los costes de distribución y almacenamiento, cuando la demanda es fija y cuando es aleatoria y se conoce la media y la desviación típica.

Las incógnitas del modelo son:

$$X_{ijk} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\ 2,\ 3. \\ j = 1,\ 2. \\ k = A,\ B,\ C. \end{array}$$

que representan las cantidades de producto i (medidas en Kg.) que deben ser enviadas desde el centro productor j a la zona de consumo k.

Siendo:	$i = 1$	leche homogeneizada
	$i = 2$	mantequilla.
	$i = 3$	queso.
	$j = 1$	centro productor 1.
	$j = 2$	centro productor 2.
	$k = A$	zona de consumo A.
	$k = B$	zona de consumo B.
	$k = C$	zona de consumo C.

Los datos correspondientes a las centrales y zonas de consumo son:

P_1 (producción de leche natural en el centro 1) = 90.000 litros.

P_2 (producción de leche natural en el centro 2) = 75.000 litros.

Las demandas de las zonas de consumo son:

$\overline{d}_{1A}$ (demanda media de leche homogeneizada en la zona A) = 37.735 kilogramos.

σ_{1A} (desviación típica de la demanda de lecha en la zona A) = 11.132 kilogramos.

$\overline{d}_{2A}$ (demanda media de mantequilla en la zona A) = 463 Kg.

σ_{2A} (desviación típica de la demanda de mantequilla en la zona A) = = 37 kilogramos.

$\overline{d}_{3A}$ (demanda media de queso en la zona A) = 926 Kg.

σ_{3A} (desviación típica de la demanda de queso en la zona A) = 37 Kg.

$\overline{d}_{1B}$ (demanda media de leche homogeneizada en la zona B) = 32.110 kilogramos.

σ_{1B} (desviación típica de la demanda de leche en zona B) = 1.445 Kg.

$\overline{d}_{2B}$ (demanda media mantequilla en la zona B) = 283 Kg.

σ_{2B} (desviación típica de la demanda de queso en la zona B) = 8,5 Kg.

$\overline{d}_{3B}$ (demanda media de queso en la zona B) = 880 Kg.

σ_{3B} (desviación típica de la demanda de queso en la zona B) = 35 Kg.

$\overline{d}_{1C}$ (demanda media de leche homogeneizada en la zona C) = 47.710 kilogramos.

σ_{1C} (desviación típica de la demanda de leche en la zona C) = 1.415 Kg.

$\overline{d}_{2C}$ (demanda media de mantequilla de la zona C) = 378 Kg.

σ_{2C} (desviación típic ade la demanda de mantequilla en la zona C) = = 11 kilogramos.

$\overline{d}_{3C}$ (demanda media de queso en la zona C) = 756 Kg.

σ_{3C} (desviación típica de la demanda de queso en la zona C) = 22 Kg.

Se supone que los centros productores utilizan las mismas técnicas de fabricación, por lo que:

$\lambda_{11} = \lambda_{12}$ (coeficiente de transformación de leche natural en leche homogeneizada) = 0,970 litros/Kg.

$\lambda_{21} = \lambda_{22}$ (coeficiente de transformación de leche natural en mantequilla) = 21,052 litros/Kg.

$\lambda_{31} = \lambda_{32}$ (coeficiente de transformación de leche natural en queso) = = 5,60 litros/Kg.

Las capacidades de almacenamiento de las zonas de consumo vienen expresadas en la matriz L, de dimensión 3 × 3, cuyo elemento l_{ik} representa la capacidad de almacenamiento de producto i en el centro consumidor k:

$$L = \begin{vmatrix} 15.000 & 12.000 & 10.000 \\ 100 & 110 & 100 \\ 300 & 300 & 1.500 \end{vmatrix}$$

Las capacidades máximas de transformación de los centros productores vienen expresadas en la matriz S, de dimensión 3 × 2, siendo el elemento s_{ij} la cantidad de materia prima que puede transformarse en producto i en el centro productor j.

$$S = \begin{vmatrix} 80.000 & 75.000 \\ 700 & 650 \\ 1.800 & 1.500 \end{vmatrix}$$

Las demandas de los centros de consumo vienen expresadas en la matriz D, cuyo elemento d_{ik} representa la demanda de producto i en el centro consumidor k.

$$D = \begin{vmatrix} 37.735 & 32.110 & 47.170 \\ 463 & 283 & 378 \\ 926 & 880 & 756 \end{vmatrix}$$

Las cantidades productivas mínimas exigidas en cada centro transformador vienen expresadas por la matriz S', de dimensión 3 × 2, cuyo elemento s'_{ij} representa la cantidad mínima de producto i que debe producirse en el centro j.

$$S' = \begin{vmatrix} 40.000 & 38.500 \\ 350 & 300 \\ 1.000 & 800 \end{vmatrix}$$

Los costes de transporte de los diferentes productos desde los centros productores a las zonas consumidoras vienen expresados en las matrices C_1, C_2, C_3, de dimensión 3 × 2, siendo el elemento c_{jk} de la matriz C_i el coste de transportar una unidad de producto i desde el centro productor j a la zona consumidora k.

$$C_1 = \begin{vmatrix} 0{,}35 & 0{,}329 \\ 0{,}327 & 0{,}340 \\ 0{,}334 & 0{,}350 \end{vmatrix} \qquad C_2 = \begin{vmatrix} 0{,}477 & 0{,}448 \\ 0{,}445 & 0{,}463 \\ 0{,}458 & 0{,}477 \end{vmatrix} \qquad C_3 = \begin{vmatrix} 0{,}411 & 0{,}382 \\ 0{,}379 & 0{,}397 \\ 0{,}392 & 0{,}411 \end{vmatrix}$$

Los costes de almacenamiento de producto en los centros consumidores vienen expresados en la matriz A, de dimensión 3 × 3, cuyo elemento a_{ik} representa el coste unitario de almacenamiento de producto i en la zona consumidora k.

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}15 & 0{,}11 & 0{,}18 \\ 0{,}36 & 0{,}53 & 0{,}40 \\ 0{,}27 & 0{,}24 & 0{,}29 \end{vmatrix}$$

Los costes de fabricación de los diferentes productos en los centros productores vienen expresados en la matriz F, de dimensión 3 × 2, siendo f_{ij} el coste unitario de producción del producto i en el centro j.

$$F = \begin{vmatrix} 11{,}5 & 11{,}65 \\ 103{,}0 & 102{,}50 \\ 81{,}5 & 79{,}5 \end{vmatrix}$$

Se supone que los dos centros fabrican productos de la misma calidad, siendo su precio de venta idéntico. Los ingresos correspondientes a la venta de una unidad de producto figuran en la matriz I, de dimensión 3 × 2, siendo el elemento i_{ik} el ingreso obtenido por la venta de una unidad de producto i en la zona consumidora k.

$$I = \begin{vmatrix} 19{,}65 & 19{,}65 \\ 282{,}5\ (^*) & 282{,}5\ (^*) \\ 130{,}00 & 130{,}00 \end{vmatrix}$$

El modelo sin coeficiente de seguridad

Las restricciones generales del modelo son:

a) *Restricciones de producción:*

(A) $0{,}970\ (X_{11A} + X_{11B} + X_{11C}) + 21{,}052\ (X_{21A} + X_{21B} + X_{21C}) + 5{,}60\ (X_{31A} + X_{31B} + X_{31C}) = 90.000.$

(B) $0{,}970\ (X_{12A} + X_{12B} + X_{12C}) + 21{,}052\ (X_{22A} + X_{22B} + X_{22C}) + 5{,}60\ (X_{32A} + X_{32B} + X_{32C}) = 75.000.$

Con estas restricciones se obliga a que en los centros productores no pueda almacenarse leche natural.

b) *Restricciones de almacenamiento.*—Con estas restricciones se obliga a que la cantidad de cada producto que se almacene en cada zona de consumo sea menor o igual que la capacidad de almacenamiento existente:

(*) Lleva incluido el precio de los productos de segunda calidad, atribuible a un kilogramo de mantequilla.

(C) $X_{11A} + X_{12A} - 37.735 \leq 15.000.$
(D) $X_{21A} + X_{22A} - 463 \leq 100.$
(E) $X_{31A} + X_{32A} - 926 \leq 300.$
(F) $X_{11B} + X_{12B} - 32.110 \leq 12.000.$
(G) $X_{21B} + X_{22B} - 283 \leq 110.$
(H) $X_{31B} + X_{32B} - 880 \leq 300.$
(I) $X_{11C} + X_{12C} - 47.710 \leq 10.000.$
(J) $X_{12C} + X_{22C} - 378 \leq 100.$
(K) $X_{31C} + X_{32C} - 720 \leq 250.$

c) *Restricciones técnicas de producción máxima.*—Con estas restricciones se obliga a que las cantidades producidas no superen a la capacidad máxima de producción.

(L) $X_{11A} + X_{11B} + X_{11C} \leq 80.000.$
(M) $X_{21A} + X_{21B} + X_{21C} \leq 700.$
(N) $X_{31A} + X_{31B} + X_{31C} \leq 1.800.$
(O) $X_{12A} + X_{12B} + X_{12C} \leq 75.000.$
(P) $X_{22A} + X_{22B} + X_{22C} \leq 650.$
(Q) $X_{32A} + X_{32B} + X_{32C} \leq 1.500.$

d) *Restricciones de demanda.*—Con estas restricciones se obliga a que la demanda de los diferentes productos en cada zona sea satisfecha.

(R) $X_{11A} + X_{12A} \geq 37.753.$
(S) $X_{21A} + X_{22A} \geq 463.$
(T) $X_{31A} + X_{32A} \geq 926.$
(U) $X_{11B} + X_{12B} \geq 32.110.$
(V) $X_{21B} + X_{22B} \geq 283.$
(X) $X_{31B} + X_{32B} \geq 880.$
(Y) $X_{11C} + X_{12C} \geq 47.170.$
(Z) $X_{21C} + X_{22C} \geq 378.$
(W) $X_{31C} + X_{32C} \geq 756.$

e) *Restricciones técnicas de producción.*—Con estas restricciones se obliga a que las cantidades que se produzcan sean superiores a los mínimos de rentabilidad:

$$
\begin{aligned}
&(ZA) \quad X_{11A} + X_{11B} + X_{11C} \geq 40.000.\\
&(ZB) \quad X_{21A} + X_{21B} + X_{21C} \geq 350.\\
&(ZC) \quad X_{31A} + X_{31B} + X_{31C} \geq 1.000.\\
&(ZD) \quad X_{12A} + X_{12B} + X_{12C} \geq 38.500.\\
&(ZE) \quad X_{22A} + X_{22B} + X_{22C} \geq 300.\\
&(ZF) \quad X_{32A} + X_{32B} + X_{32C} \geq 800.
\end{aligned}
$$

f) *Restricciones de no-negatividad:*

$$
X_{ijk} \geq 0 \quad
\begin{aligned}
i &= 1,\ 2,\ 3.\\
j &= 1,\ 2.\\
k &= A,\ B,\ C.
\end{aligned}
$$

Función objetivo

Los componentes son:

a) *Márgenes brutos:*

$$
\begin{aligned}
&(19{,}65 - 11{,}5)\ X_{11A} + (19{,}65 - 11{,}50)\ X_{11B} + (19{,}65 - 11{,}50)\ X_{11C} +\\
&+ (282{,}5 - 103)\ X_{21A} + (282{,}5 - 103)\ X_{21B} + (282{,}5 - 103)\ X_{21C} +\\
&+ (130 - 81{,}50)\ X_{31A} + (130 - 81{,}50)\ X_{31B} + (130 - 81{,}50)\ X_{31C} +\\
&+ (19{,}65 - 11{,}65)\ X_{12A} + (19{,}65 - 11{,}65)\ X_{12B} + (19{,}65 - 11{,}65)\ X_{12C} +\\
&+ (282{,}5 - 102{,}5)\ X_{22A} + (282{,}5 - 102{,}5)\ X_{22B} + (282{,}5 - 102{,}5)\ X_{22C} +\\
&+ (130 - 79{,}5)\ X_{32A} + (130 - 79{,}5)\ X_{32B} + (130 - 79{,}5)\ X_{32C}
\end{aligned}
$$

b) *Costes de transporte:*

$$
\begin{aligned}
&0{,}350\ X_{11A} + 0{,}327\ X_{11B} + 0{,}334\ X_{11C} + 0{,}477\ X_{21A} + 0{,}445\ X_{21B} +\\
&+ 0{,}458\ X_{21C} + 0{,}411\ X_{31A} + 0{,}379\ X_{31B} + 0{,}392\ X_{31C} + 0{,}329\ X_{12A} +\\
&+ 0{,}44\ X_{12B} + 0{,}350\ X_{12C} + 0{,}448\ X_{22A} + 0{,}463\ X_{22B} + 0{,}477\ X_{22C} +\\
&+ 0{,}382\ X_{32A} + 0{,}397\ X_{32B} + 0{,}411\ X_{32C}.
\end{aligned}
$$

c) *Costes de almacenamiento:*

$$0{,}15\ (X_{11A} + X_{12A} - 37.735) + 0{,}36\ (X_{12A} + X_{22A} - 463) +$$
$$+ 0{,}27\ (X_{11B} + X_{12B} - 926) + 0{,}11\ (X_{11B} + X_{12B} - 32.110) +$$
$$+ 0{,}33\ (X_{21B} + X_{22B} - 283) + 0{,}24\ (X_{31B} + X_{32B} - 880) +$$
$$+ 018\ (X_{11C} + X_{12C} - 47.710) + 0{,}40\ (X_{21C} + X_{22C} - 378) +$$
$$+ 0{,}29\ (X_{31C} + X_{32C} - 720)$$

Operando sobre los datos de la función objetivo, que tiene por objeto maximizar los márgenes brutos, menos los costes de transporte y almacenamiento, obtenemos la siguiente expresión:

$$Z = 7{,}65\ X_{11A} + 7{,}713\ X_{11B} + 7{,}636\ X_{11C} + 178{,}163\ X_{21A} + 178{,}225\ X_{21B} +$$
$$+ 178{,}142\ X_{21C} + 47{,}819\ X_{31A} + 47{,}881\ X_{31B} + 179{,}207\ X_{31C} + 7{,}52$$
$$X_{12A} + 7{,}55\ X_{12B} + 7{,}47\ X_{12C} + 179{,}192\ X_{22A}$$
$$X_{22B} + 179{,}123\ X_{22C} + 49{,}848\ X_{32A} + 49{,}863\ X_{32B} + 49{,}799\ X_{32C} +$$
$$- 18.801.$$

Resuelta la programación en una computadora IBM, modelo 1130, se llegó a los siguientes valores:

$X_{11A} =$ 0	$X_{31A} =$ 0	$X_{22A} =$ 256
$X_{11B} =$ 36.307	$X_{31B} =$ 1.180	$X_{22B} =$ 0
$X_{11C} =$ 30.892	$X_{31C} =$ 620	$X_{22C} =$ 394
$X_{21A} =$ 307	$X_{12A} =$ 37.735	$X_{32A} =$ 1.226
$X_{21B} =$ 393	$X_{12B} =$ 0	$X_{32B} =$ 0
$X_{21C} =$ 0	$X_{12C} =$ 16.818	$X_{32C} =$ 274

$$Z = 1.308.557{,}707 \text{ ptas.}$$

Los resultados anteriores pueden resumirse así:

CENTRO 1:	Producción de leche homogeneizada ...	67.199 Kg.
	Producción de mantequilla	700 Kg.
	Producción de queso	1.800 Kg.

CENTRO 2:	Producción de leche homogeneizada ...	54.553 Kg.
	Producción de mantequilla	650 Kg.
	Producción de queso	1.500 Kg.

B) *Introducción de los coeficientes de seguridad*

Como en una distribución normal el 95 por 100 de los valores están comprendidos en el intervalo *m*-2, *m*-2, siendo *m* la media y la desviación típica, al aplicar los coeficientes de seguridad a las demandas de los diferentes centros finales tomaremos un valor igual a 2. De esta manera aseguramos, con una probabilidad del 95 por 100, que no va a quedar sin satisfacer la demanda de ninguno de ellos.

Como consecuencia de esta modificación, las nuevas demandas en las tres zonas de consumo A, B, C pasan a ser:

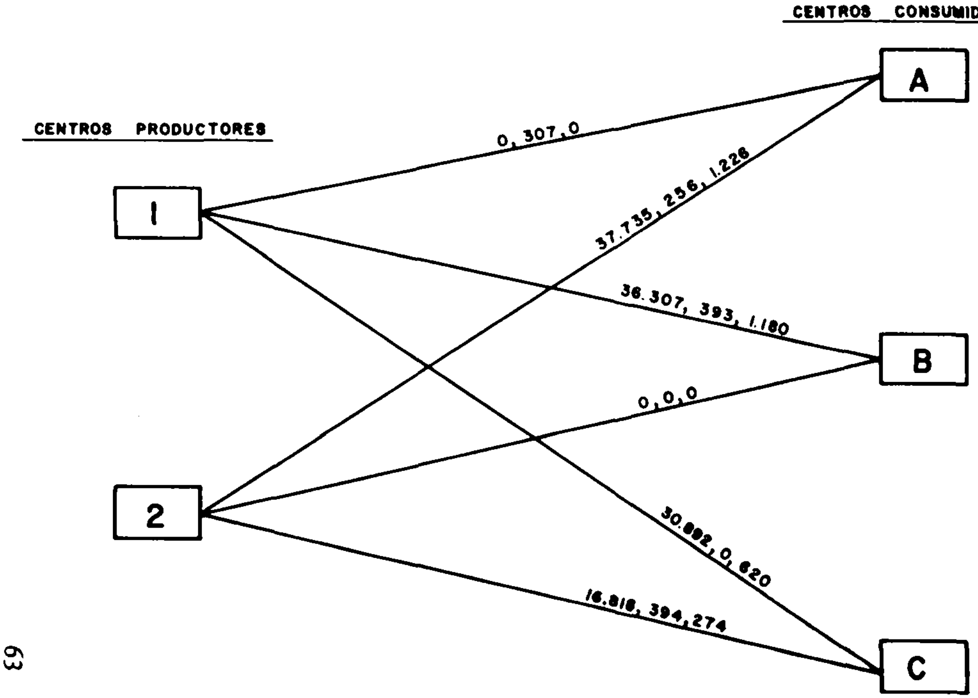
$$d'_{1A} = (d_{1A} + \lambda\sigma_{1A}) = (37.735 + 2 \times 1.132) = 40.000 \text{ Kg.}$$
$$d'_{2A} = (d_{2A} + \lambda\sigma_{2A}) = (463 + 2 \times 18,5) = 500 \text{ Kg.}$$
$$d'_{3A} = (d_{3A} + \lambda\sigma_{3A}) = (926 + 2 \times 37) = 1.000 \text{ Kg.}$$
$$d'_{1B} = (d_{1B} + \lambda\sigma_{1B}) = (32.110 + 2 \times 144,5) = 35.000 \text{ Kg.}$$
$$d'_{2B} = (d_{2B} + \lambda\sigma_{2B}) = (283 + 2 \times 8,5) = 300 \text{ Kg.}$$
$$d'_{3B} = (d_{3B} + \lambda\sigma_{3B}) = (880 + 2 \times 35) = 950 \text{ Kg.}$$
$$d'_{1C} = (d_{1C} + \lambda\sigma_{1C}) = (47.170 + 2 \times 1.415) = 50.000 \text{ Kg.}$$
$$d'_{2C} = (d_{2C} + \lambda\sigma_{2C}) = (378 + 2 \times 11) = 400 \text{ Kg.}$$
$$d'_{3C} = (d_{3C} + \lambda\sigma_{3C}) = (756 + 2 \times 40) = 800 \text{ Kg.}$$

Por tanto, las restricciones de demanda del modelo sin coeficientes se convierten en:

$$(R') : X_{11A} + X_{12A} \geqq 40.000 \text{ Kg.}$$
$$(S') : X_{21A} + X_{22A} \geqq 500 \text{ Kg.}$$
$$(T') : X_{31A} + X_{32A} \geqq 1.000 \text{ Kg.}$$
$$(U') : X_{11B} + X_{12B} \geqq 35.000 \text{ Kg.}$$
$$(V') : X_{21B} + X_{22B} \geqq 300 \text{ Kg.}$$
$$(X') : X_{31B} + X_{32B} \geqq 950 \text{ Kg.}$$
$$(Y') : X_{11C} + X_{12C} \geqq 50.000 \text{ Kg.}$$
$$(Z') : X_{21C} + X_{22C} \geqq 400 \text{ Kg.}$$
$$(W') : X_{31C} + X_{32C} \geqq 800 \text{ Kg.}$$

GRAFICO Nº 3

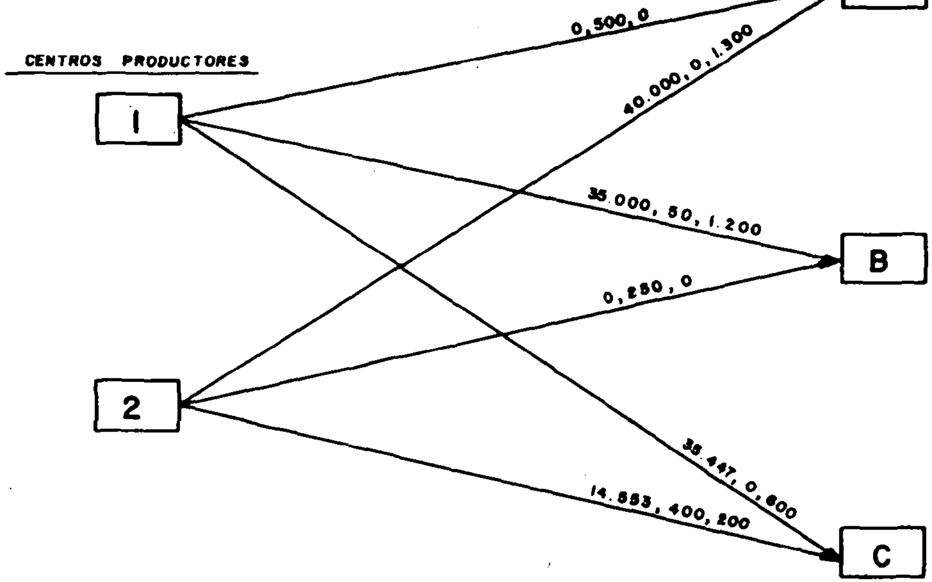
DISTRIBUCION DE LOS ENVIOS (Caso general)



CENTROS CONSUMIDORES		CANTIDAD ENVIADA	DEMANDA
A	LECHE	37.735	37.735
	MANTEQUILLA	563	463
	QUESO	1.226	926
B	LECHE	36.307	32.110
	MANTEQUILLA	393	283
	QUESO	1.180	880
C	LECHE	47.710	47.710
	MANTEQUILLA	394	378
	QUESO	894	720

GRAFICO Nº 4

DISTRIBUCION DE LOS ENVIOS (Caso con coeficientes)



CENTROS CONSUMIDORES		CANTIDAD ENVIADA Kgs.	DEMANDA Kgs.
A	LECHE	40.000	40.000
	MANTEQUILLA	500	500
	QUESO	1.300	1.000
B	LECHE	35.000	35.000
	MANTEQUILLA	300	300
	QUESO	1.200	950
C	LECHE	50.000	50.000
	MANTEQUILLA	400	400
	QUESO	800	800

Resolviendo el nuevo programa lineal en una computadora IBM, modelo 1130, se llegó a los valores:

$X_{11A} = 0$	$X_{31A} = 0$	$X_{22A} = 0$
$X_{11B} = 35.000$	$X_{31B} = 1.200$	$X_{22B} = 250$
$X_{11C} = 35.447$	$X_{31C} = 600$	$X_{22C} = 400$
$X_{21A} = 500$	$X_{12A} = 40.000$	$X_{32A} = 1.300$
$X_{21B} = 50$	$X_{12B} = 0$	$X_{32B} = 0$
$X_{21C} = 0$	$X_{12C} =$	$X_{32C} = 200$

$$W = 1.306.691{,}198 \text{ ptas.}$$

En resumen, los resultados fueron:

CENTRO 1:	Producción de leche homogeneizada ...	70.447 Kg.
	Producción de mantequilla	550 Kg.
	Producción de queso	1.500 Kg.
CENTRO 2:	Producción de leche homogeneizada ...	54.553 Kg.
	Producción de mantequilla	650 Kg.
	Producción de queso	1.500 Kg.

Comentaremos brevemente los resultados para este caso. Vemos que, como consecuencia del escalonamiento, se produce una disminución en el valor de la función objetivo, al variar las producciones y alterarse la distribución a los centros finales de consumo.

En el centro 1 se observa una *modificación* (en sentido vario) de las cantidades transformadas de cada producto, así como una diferente política de distribución a los centros finales. En el centro 2, el escalonamiento no modifica las cantidades a transformar, pero cambian las cantidades enviadas a los centros finales.

En ausencia de coeficientes de seguridad, las cantidades enviadas a los diferentes centros finales superan a las demandas de los mismos, menos en el caso de la leche homogeneizada, en que los envíos a los centros 1 y 3 coinciden con las demandas respectivas.

Por tanto, la introducción de los coeficientes de seguridad en las restricciones de demanda hace disminuir las producciones de queso y mantequilla. Las cantidades de leche homogeneizada siguen coincidiendo con su demanda.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALONSO, R.: *Coeficientes de seguridad en modelos de comercialización agraria aplicados a casos españoles*, tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 1976.

[2] BALLESTEROS, E.: *Principios de economía de la empresa*, Alianza Universidad, 3.ª edición, Madrid, 1975.

[3] BAUMOL, W. J: *Teoría económica y análisis de operaciones*, capítulo XX, Ed. Herreno Hnos. Sucesores, S. A., 1971.

[4] HITCHCOCK, F. L.: *The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities*, "Jour. Math. and Phys.", 20, 1941.

[5] ROMERO, C.: *Modelo de distribución comercial: Aplicación a un caso español*, "Revista de Estudios Empresariales"; vol. 30, 1974.