GRADOS DE DEPENDENCIA ENTRE ATRIBUTOS DE UN SISTEMA DE INFORMACIÓN DOTADO DE ESTRUCTURA BORROSA

Renato César Scarparo

En este artículo se exponen y relacionan, varios criterios que permiten valorar la dependencia de una decisión b de una condición a, en un sistema de información dotado de estructura borrosa, respecto a una regla borrosa de la forma " tanto más a, es A tanto más b, es B ", donde A y B son conjuntos $\mathbf{L}_a$ borroso y $\mathbf{L}_b$ borroso definidos en los dominios de los atributos a y b respectivamente. En especial se trata el grado topológico de dependencia.

1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo a lo expresado en el resumen, siguiendo a Z. Pawlak [8], y a J. W. Grsymala - Busse [4], definiremos el grado de dependencia γ, de un atributo b de un atributo a, en un sistema S respecto a una regla borrosa (**R**). Posteriormente definiremos el grado de dependencia fuerte χ en un contexto más general y finalmente siguiendo a B. Kosko [7], y a J. Kortelainen [6] el grado de dependencia topológica κ. Además estableceremos y estudiaremos, diversas relaciones entre dichos objetos matemáticos y finalmente presentaremos una aplicación.

Mantendremos una notación usual, hay varias, tanto para los objetos borrosos como para los no borrosos, en consecuencia, en gran parte, algunos lectores la encontraran familiar, pero no obstante, toda notación que se refiera a conceptos borrosos será debidamente explicitada como así también toda notación que se refiera a objetos o relaciones no borrosas y que a nuestro entender puedan complicar innecesariamente la claridad del texto.

A tal efecto comenzamos precisando que anotaremos con **R** los números reales, con **Q** los números racionales, con **Z** los números enteros, con **N** los números naturales, y con **I** el intervalo $[0, 1] = \{x \in \mathbf{R} \ / \ 0 \leq x \leq 1\}$. Asimismo en general, vale decir salvo excepciones definidas explícitamente, anotaremos:

i) Los reticulados completos con **L** o con **L** con algún subíndice.

ii) Los conjuntos **L**-borrosos, con las primeras letras mayúsculas, por ejemplo A, B.

iii) Los conjuntos ordinarios, con las últimas letras mayúsculas, X, Y, Z, con los tildes que convengan

iv) Las reglas borrosas con letras MS Sans Serif, por ejemplo **R**.

A continuación recordaremos algunos conceptos que utilizaremos frecuentemente.

DEFINICIÓN 1.1. Un reticulado completo es un dato de la forma (**L,** ≥)**,** donde **L** es un conjunto y " ≥ " es una relación de orden en **L** tal que todo subconjunto M de **L** admite supremo e ínfimo.

Cuando no haya lugar a confusión un reticulado (**L,** ≥) se anotará solamente con **L,** y el orden $\geq_{\mathbf{L}}$ con ≥, así mismo si el reticulado es anotado con $\mathbf{L}_q$, la relación de orden, por razones tipográficas, no la anotaremos con subíndice $\mathbf{L}_q$, sino que la anotaremos simplemente $\geq_q$.

Sus cotas universales se anotan con $0_{\mathbf{L}}$ y $1_{\mathbf{L}}$ o simplemente con 0 y 1 cuando no haya lugar a confusión. Si el lector necesita ampliar información en temas concernientes a la teoría de reticulados puede consultar [1].

DEFINICIÓN 1.2. Dado un conjunto X no vacío y un reticulado completo **L**, llamaremos conjunto **L**-borroso en X, o también, más propiamente, subconjunto **L**-borroso en X, a toda aplicación A: X $\rightarrow$ **L**.

Para cada $x \in A$ el valor A(x) se llama el grado de pertenencia de x en el conjunto **L**-borroso A, y el conjunto $\{x \in A \ / \ A(x) > 0\}$, se llama el soporte de A y se anota sop A.

DEFINICIÓN 1.3. Sean X un conjunto no vacío, K un conjunto de índices y $(A_k)_{k \in K}$ una familia de conjuntos borrosos en X. Entonces definimos respectivamente, su unión

$\cup\{A_k \ / \ k \in K\}$ y su intersección $\cap\{A_k \ / \ k \in K\}$, mediante las expresiones siguientes:

Para todo $x \in X$: $(\cup\{ A_k \ / \ k \in K\}) \ . \ x = \sup \{A_k (x) \ / \ k \in K\}$.

Para todo $x \in X$: $(\cap\{ A_k \ / \ k \in K\}) \ . \ x = \text{ínf} \{A_k (x) \ / \ k \in K\}$.

2. SISTEMAS DE INFORMACIÓN

DEFINICIÓN 2.1. (ver Z. Pawlac [8]). Llamaremos sistema de información **S** a una 4-upla (X, Q, V, δ) tal que:

S.1. X es un conjunto finito no vacío.

S.2. $Q = C \cup D$, donde C y D son conjuntos finitos no vacíos disjuntos.

S.3. $V = \cup\{V_q \ / \ q \in Q\}$, donde para todo $q \in Q$, V_q es un conjunto no vacío.

S.4. δ: X x Q $\rightarrow$ V, tal que para todo $(x, q) \in X \times Q$; $\delta(x, q) \in V_q$.

Los elementos del conjunto X, son llamados los elementos o los objetos del sistema **S**.

Los elementos del conjunto Q son llamados los atributos del sistema **S**, en particular los elementos del conjunto C son llamados las condiciones del sistema **S**, y los elementos del conjunto D son llamados las decisiones del sistema **S**.

Para todo $q \in Q$, los elementos del conjunto V_q son llamados los valores del atributo q.

La función $\delta: X \times Q \to V$, se llama la función de descripción del sistema **S**, y los valores pertenecientes a $\delta(X \times Q)$, se llaman los datos del sistema **S**.

Obsérvese que entendemos los sistemas de información de la misma forma que Grzymala -Busse [4], salvo que en nuestro caso el dominio V_q del atributo $q \in Q$ puede ser un conjunto infinito.

DEFINICIÓN 2.2. Dado un sistema de información **S** = (X, Q, V, δ), para cada $q \in Q$ anotaremos con δ_q la función de X en V_q tal que para todo $x \in X$: $\delta_q(x) = \delta(x, q)$.

DEFINICIÓN 2.3. Dado un conjunto **L**-borroso $A \in \mathbf{L}^X$, anotaremos con $\boldsymbol{R}^A$ la relación en el conjunto X definida por:

$$\boldsymbol{R}^A = \{(x, y) \in X \times X \ / \ A(x) \geq A(y)\}$$

Diremos frecuentemente que $\boldsymbol{R}^{A}$ es la relación correspondiente (o también la relación inducida) por el conjunto **L**-borroso, A.

PROPOSICIÓN 2.4. Para todo conjunto **L**-borroso, $A \in \mathbf{L}^{X}$, la relación $\boldsymbol{R}^{A}$ es reflexiva y transitiva.

Demostración:

i) Como para todo $x \in X$: $A(x) \geq A(x)$, obviamente $\boldsymbol{R}^{A}$ es reflexiva.

ii) Si $(x, y) \in \boldsymbol{R}^{A}$ y $(y, z) \in \boldsymbol{R}^{A}$ entonces: $A(x) \geq A(y)$ y $A(y) \geq A(z)$, por lo tanto $A(x) \geq A(z)$, o sea $(x, z) \in \boldsymbol{R}^{A}$, y en consecuencia $\boldsymbol{R}^{A}$ es transitiva.

Observemos que dado un conjunto X y un reticulado **L,** no toda relación $\boldsymbol{R}$ definida en X, reflexiva y transitiva, admite la existencia de un conjunto **L**-borroso A en X, tal que $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{A}$. Por ejemplo:

Si: $\mathbf{L} = \{0, 1\}$, $X = \{a, b, c\}$ y $\boldsymbol{R} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$, entonces como $\{(b, a), (c, a), (c, b)\} \not\subset \boldsymbol{R}$, tenemos que:
si existe $A \in \mathbf{L}^{X}$ tal que $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{A}$ entonces: $A(a) > A(b)$ y $A(b) > A(c)$, por lo tanto, como el blanco de A es $\{0, 1\}$, $A(b) = A(c) = 0$, en consecuencia $(c, b) \in \boldsymbol{R}$. lo cual obviamente contradice nuestra hipótesis.

DEFINICIÓN 2.5. Dado un conjunto **L-**borroso $A \in \mathbf{L}^{X}$, se llama modificador débil de A a la aplicación $H^{A}: \boldsymbol{P}(X) \rightarrow \boldsymbol{P}(X)$ tal que para todo $U \in \boldsymbol{P}(X)$:

$$H^{A}(U) = \{y \in X \ / \ \text{existe } x \in U \text{ tal que } (x, y) \in \boldsymbol{R}^{A}\}$$

Observemos que para todo $A \in \mathbf{L}^X$ y para todo $x \in X$:

$$H^A(\{ x \}) = \{y \in X \ / \ (x, y) \in \boldsymbol{R}^A\}$$

y que para todo $A \in \mathbf{L}^X$ y para todo $U \subset X$:

$$H^A(U) = \cup\{ H^A(\{ x \}) \ / \ x \in U \}$$

TEOREMA 2.6. Para todo conjunto **L**-borroso A en un conjunto X, el operador H^A es un operador de clausura en X.

Demostración: Recordemos que un operador de clausura sobre un conjunto X, es una aplicación φ: $\boldsymbol{P}(X) \rightarrow \boldsymbol{P}(X)$ (donde $\boldsymbol{P}(X)$ es el conjunto de partes de X) tal que:

φ.1. $\varphi(\emptyset) = \emptyset$.

φ.2. Para todo $U \in \boldsymbol{P}(X)$: $U \subset \varphi(U)$.

φ.3. Para todo $U, V \in \boldsymbol{P}(X)$: $\varphi(U \cup V) = \varphi(U) \cup \varphi(V)$.

φ.4. Para todo $U \in \boldsymbol{P}(X)$: $\varphi(\varphi(U)) = \varphi(U)$.

A continuación demostraremos que H^A verifica las condiciones φ.1, φ.2, φ.3 y φ.4.

φ.1. Es obvio que para todo $x \in X$: $H^A(\emptyset) = \emptyset$.

φ.2. Como la relación $\boldsymbol{R}^A$ es reflexiva tenemos que para todo $x \in X$: $(x, x) \in \boldsymbol{R}^A$, luego para todo $x \in X$: $x \in H^A(\{x\})$, por lo tanto para todo $U \in \boldsymbol{P}(X)$: $U \subset H^A(U)$.

φ.3. Para todo $U, V \in \boldsymbol{P}(X)$: $H^A(U \cup V) = \cup\{H^A(\{x\}) \ / \ x \in U \cup V\} =$
$= (\cup\{H^A(\{x\}) \ / \ x \in U\}) \cup (\cup\{H^A(\{x\}) \ / \ x \in V \}) = H^A(U) \cup H^A(V)$.

φ.4. Para todo $U \in \boldsymbol{P}(X)$: $H^A(H^A(U)) = H^A(\cup\{H^A(\{x\}) \ / \ x \in U\})$, como además por la finitud del conjunto X y por la propiedad φ.3;

$$H^A(\cup\{H^A(\{x\}) \ / \ x \in U\}) = \cup\{H^A(H^A(\{x\}) \ / \ x \in U\},$$

resulta en primer lugar, que para todo $U \in \boldsymbol{P}(X)$:

$$H^A(H^A(U)) = \cup\{H^A(H^A(\{x\}) \ / \ x \in U\}.$$

Además en segundo lugar, para todo $x \in X$:

$$H^A(H^A(\{x\}) = H^A(\{x\}),$$

puesto que $H^A(H^A(\{x\}) \supset H^A(\{x\})$, obviamente por φ.2, y $H^A(H^A(\{x\}) \subset H^A(\{x\})$, ya que

si $y \in H^A(H^A(\{x\})$ entonces existe $z \in H^A(\{x\})$ tal que $(z, y) \in \boldsymbol{R}^A$,

o sea

si $y \in H^A(H^A(\{x\})$ entonces existe $z \in X$ tal que $(x, z), (z, y) \in \boldsymbol{R}^A$,

lo cual por la propiedad transitiva implica que

si $y \in H^A(H^A(\{x\})$ entonces $(x, y) \in \boldsymbol{R}^A$, o sea si $y \in H^A(H^A(\{x\})$ entonces $y \in H^A(\{x\})$

Luego por aplicación de las dos conclusiones anteriores tenemos que para todo

$U \in \boldsymbol{P}(X)$: $H^A(H^A(U)) = H^A(U)$.

Recordemos en primer lugar que dado un conjunto X una subfamilia de subconjuntos de X: $\tau = \{G_i \subset X \ / \ i \in I\}$, es una topología en X si verifica los siguientes axiomas:

τ.1. $\varnothing \in \tau$.

τ.2. $X \in \tau$.

τ.3. Para todo $J \subset I$ tal que $J \neq \varnothing$; $\cup\{G_i \ / \ i \in J\} \in \tau$.

τ.4. Para todo $i, j \in I$; $G_i \cap G_j \in \tau$.

y que un espacio topológico es un dato de la forma $\{X, \tau\}$, donde X es un conjunto y τ una topología en X.

Y en segundo lugar recordemos que dado un operador de clausura φ en un conjunto X, existe una y solo una topología τ^{φ} en X, tal que $U \in \tau^{\varphi}$ si y solo si $U = \varphi(U)$.

DEFINICIÓN 2.7. Para todo conjunto **L**-borroso A, en un conjunto X, se llama topología inducida en X por A y se anota τ^A a la topología definida en X por el operador de clausura H^A.

DEFINICIÓN 2.8. Para todo conjunto **L**-borroso A, en un conjunto X, se llama modificador substancial correspondiente a A, y se lo anota $(H^A)^*$, el operador dual del operador H^A, vale decir la aplicación H^A: $\boldsymbol{P}(X) \to \boldsymbol{P}(X)$ tal que para todo $U \in \boldsymbol{P}(X)$;

$$(H^A)^*(U) = (H^A(U^-))^-$$

donde para todo $U \in \boldsymbol{P}(X)$, U^- es el complementario de U.

Recordemos que un operador de interior en un conjunto X, es una aplicación

$$\iota: \boldsymbol{P}(X) \to \boldsymbol{P}(X) \text{ tal que:}$$

ι.1. $\iota(X) = X$.

ι.2. Para todo $U \in \boldsymbol{P}(X)$: $\iota(U) \subset U$.

ι.3. Para todo $U, V \in \boldsymbol{P}(X)$: $\iota(U \cap V) = \iota(U) \cap \iota(V)$.

ι.4. Para todo $U \in \boldsymbol{P}(X)$: $\iota(\iota(U)) = \iota(U)$.

y además que dado un operador de interior ι en un conjunto X, existe una y solo una topología τ^{ι} en X, tal que $U \in \tau^{\iota}$ si y solo si $U = \iota(U)$.

Observemos que dado un conjunto **L**-borroso A en un conjunto X, la topología τ^{A} inducida en X por el conjunto **L**-borroso A, que por definición es la topología inducida en A por el operador de clausura H^{A} es igual a la topología definida en X por el operador de interior $(H^{A})^{*}$, razón por la cual también la anotamos τ^{A}.

Las definiciones anteriores nos permiten definir los siguientes criterios topológicos para comparar dos conjuntos **L**-borrosos A y B, definidos en un mismo conjunto X.

DEFINICIÓN 2.9. Dados dos conjuntos **L**-borrosos A y B definidos en un conjunto X, diremos que:

f.1. A es topológicamente más fino que B, y en tal caso anotaremos $A \prec B$ si y solo si $\boldsymbol{R}^{A} \subset \boldsymbol{R}^{B}$.
f.2. A y B son topológicamente equivalentes y en tal caso anotaremos $\boldsymbol{R}^{A} \approx \boldsymbol{R}^{B}$ si y solo si $\boldsymbol{R}^{A} = \boldsymbol{R}^{B}$.

Claramente la relación "$\approx$" es una relación de equivalencia y la relación "$\prec$" es una relación de orden parcial en $\mathbf{L}^{X} / \approx$.

3. DEPENDENCIA DE LOS ATRIBUTOS

DEFINICIÓN 3.1. Llamaremos sistema de información equipado con estructura borrosa, o también, simplemente, sistema de información borroso, a un dato de la forma:

$$\mathbf{S}^* = \{\mathbf{S}, (\mathbf{L}_q)_{q \in Q}, (F_q\colon V_q \to \mathbf{L}_q)_{q \in Q}\}$$

donde:

i) $\mathbf{S}$ es un sistema de información (X, Q, V, δ).

ii) $(\mathbf{L}_q)_{q \in Q}$, es una familia de reticulados completos.

iii) Para todo $q \in Q$, F_q es un conjunto $\mathbf{L}_q$-borroso en V_q.

A continuación usaremos los conceptos recordados o definidos previamente, así como las proposiciones establecidas, para definir la dependencia entre dos atributos de un sistema de información borroso $\mathbf{S}^* = \{\mathbf{S}, (\mathbf{L}_q)_{q \in Q}, (F_q\colon V_q \to \mathbf{L}_q)_{q \in Q}\}$, con referencia a una regla borrosa (**R**). La regla borrosa (**R**) a que nos referimos es del tipo:

"cuanto más a, es A, tanto más b, es B" (**R**)

donde $a, b \in Q$, $A = \delta_a$ o F_a, y $B = \delta_b$ o F_b.

Si el lector quiere profundizar en este tema puede consultar D. Dubois y H. Prade [2], quienes han estudiado las reglas borrosas como una clase especial de "si entonces".

Nosotros en este escrito, solo nos limitamos a interpretar la compatibilidad en un sistema de información borroso, de dos atributos del mismo, con respecto a la regla borrosa (**R**), entendiendo a esta, de acuerdo a la definición que sigue.

DEFINICIÓN 3.2. Sean $\mathbf{S}* = \{\mathbf{S}, (\mathbf{L}_q)_{q \in Q}, (F_q: V_q \to \mathbf{L}_q)_{q \in Q}\}$, un sistema de información borroso donde $\mathbf{S} = (X, Q = C \cup D, V = \cup\{V_q / q \in Q\}, \delta)$, a, b $\in$ Q dos atributos,
$A = \delta_a \text{ o } F_a$, y $B = \delta_b \text{ o } F_b$. Entonces diremos que el atributo b $\in$ Q depende del atributo
a $\in$ Q en **S** (con respecto a la regla (**R**)) si y solo si $\boldsymbol{R}^A \subset \boldsymbol{R}^B$.

Si $\mathbf{L}_a = \mathbf{L}_b$, de acuerdo a la DEFINICIÓN 2.2, el atributo b depende del atributo a en **S** (con respecto a la regla (**R**)) si y solo si A $\prec$ B. Si por lo contrario el atributo b no depende del atributo a en **S** (con respecto a la regla (**R**)), se pueden definir otras relaciones de dependencia del atributo b respecto al atributo a. una de ellas es la llamada dependencia débil. A tal fin siguiendo a Grzymale-Busse [4] y a Z. Pawlak [8] tenemos:

DEFINICIÓN 3.3. Sean $\mathbf{S}* = \{\mathbf{S}, (\mathbf{L}_q)_{q \in Q}, (F_q: V_q \to \mathbf{L}_q)_{q \in Q}\}$, un sistema de información borroso donde $\mathbf{S} = (X, Q = C \cup D, V = \cup\{V_q / q \in Q\}, \delta)$, a, b $\in$ Q dos atributos,
$A = \delta_a \text{ o } F_a$, y $B = \delta_b \text{ o } F_b$. Entonces si la relación $\boldsymbol{R}^B$ es simétrica, el valor γ, definido por:

$$\gamma = \Sigma\{(|(H^A)^*.G| \ / \ |X|) \ / \ G \in \Gamma\}$$

(donde $\Gamma = X / \boldsymbol{R}^B$, y para todo $U \subset X$, $|U|$ es la potencia del conjunto U) se llama el grado de dependencia γ del atributo b respecto del atributo a en **S** (con respecto a la regla (**R**)).

Dado que, como seguramente advertirá el lector, se presenta una restricción severa al pedir que la relación $\boldsymbol{R}^B$ sea una relación de equivalencia, se han definido otros indicadores para valorar la dependencia de un atributo $b \in Q$ con respecto a un atributo $a \in Q$ en **S** (con respecto a la regla (**R**)), que no exigen condiciones de simetría. Uno de tales indicadores es el llamado grado de dependencia fuerte entre atributos de un sistema **S** (con respecto a la regla (**R**)).

DEFINICIÓN 3.4. Dado un sistema de información borroso:

$$\mathbf{S}* = \{\mathbf{S}, (\mathbf{L}_q)_{q \in Q}, (F_q: V_q \to \mathbf{L}_q)_{q \in Q}\}$$

donde $\mathbf{S} = (X, Q = C \cup D, V = \cup\{V_q / q \in Q\}, \delta)$, y dados dos atributos $a, b \in Q$, anotaremos respectivamente:

$$\Theta = \{x \in X / H^B(\{x\}) \neq X \text{ y } H^B(\{x\}) \in C_\tau A\}$$

$$\Omega = \{x \in X / H^B(\{x\}) \neq X\}$$

donde $A = \delta_a$ o F_a, $B = \delta_b$ o F_b, y donde como es usual, $C_\tau A$ es la familia de todos los subconjuntos cerrados en el espacio topológico (X, τ^A).

DEFINICIÓN 3.5. Dado un sistema de información borroso:

$$\mathbf{S}* = \{\mathbf{S}, (\mathbf{L}_q)_{q \in Q}, (F_q: V_q \to \mathbf{L}_q)_{q \in Q}\}$$

donde $\mathbf{S} = (X, Q = C \cup D, V = \cup\{V_q \ / \ q \in Q\}, \delta)$, llamaremos grado de dependencia fuerte χ de un atributo $b \in Q$ respecto a un atributo $a \in Q$ en el sistema **S** (con respecto a la regla (**R**)), el valor χ definido por las siguientes expresiones:

$$\chi = 1, \text{ si } |\Omega| = 0 \quad \text{y} \quad \chi = (|\Theta| \ / \ |\Omega|), \text{ si } |\Omega| \neq 0$$

En lo que sigue estudiaremos el grado de dependencia fuerte χ y demostraremos una conexión esencial entre γ y χ.

TEOREMA 3.6. Sean $\mathbf{S}* = \{\mathbf{S}, (\mathbf{L}_q)_{q \in Q}, (F_q: V_q \to \mathbf{L}_q)_{q \in Q}\}$, un sistema de información borroso donde $\mathbf{S} = (X, Q = C \cup D, V = \cup\{V_q \ / \ q \in Q\}, \delta)$, $a, b \in Q$ dos atributos,
$A = \delta_a$ o F_a, y $B = \delta_b$ o F_b. Entonces $\boldsymbol{R}^A \subset \boldsymbol{R}^B$ si y solo si $\chi = 1$.

Demostración: En primer lugar demostraremos la necesidad.
A tal efecto recordemos que para todo $G \subset X$:

$$H^B(G) = \{y \in X \ / \text{ existe } x \in G \text{ tal que } (x, y) \in \boldsymbol{R}^B\}$$

y

$$H^A(G) = \{y \in X \ / \text{ existe } x \in G \text{ tal que } (x, y) \in \boldsymbol{R}^A\}$$

y

$$G \in \tau^B, \text{ si y solo si } H^B(G^-) = G^-$$

donde hemos anotado con G^{-} el conjunto complementario del conjunto G. En consecuencia

si $\boldsymbol{R}^{A} \subset \boldsymbol{R}^{B}$ entonces para todo $G \in \tau^{B}$; $H^{A}(G^{-}) \subset H^{B}(G^{-}) = G^{-}$.

luego como por el punto (φ.2) del Teorema 1.6, $G^{-} \subset H^{A}(G^{-})$, y como

$$G \in \tau^{A}, \text{ si y solo si } H^{A}(G^{-}) = G^{-}$$

tenemos que;

si $\boldsymbol{R}^{A} \subset \boldsymbol{R}^{B}$ entonces $\tau^{B} \subset \tau^{A}$ o sea; si $\boldsymbol{R}^{A} \subset \boldsymbol{R}^{B}$ entonces $C_{\tau}B \subset C_{\tau}A$

a fotiori, para todo $x \in X$:

$$\text{si } H^{B}(\{x\}) \in C_{\tau}B \text{ entonces } H^{B}(\{x\}) \in C_{\tau}A$$

por lo tanto $\Theta = \Omega$, lo cual por definición implica que $\chi = 1$, en consecuencia:

$$\text{si } \boldsymbol{R}^{A} \subset \boldsymbol{R}^{B} \text{ entonces } \chi = 1$$

En segundo lugar demostraremos la suficiencia.

Si $\chi = 1$ tenemos dos posibilidades que $|\Theta| = 0$ o que $|\Theta| \neq 0$. En el primer caso como

$$\text{si } |\Theta| = 0 \text{ entonces para todo } x \in X\text{: } H^{B}(\{x\}) = X$$

y como:

$$H^{B}(\{x\}) = X \text{ equivale a } \boldsymbol{R}^{B} = X \times X$$

tenemos que

$$\text{si } |\Theta| = 0 \text{ entonces } \boldsymbol{R}^{A} \subset \boldsymbol{R}^{B}.$$

En el segundo caso, como $\Theta \subset \Omega$, tenemos que:

$$\text{si } |\Theta| \neq 0 \text{ entonces } |\Omega| \neq 0$$

y como

$$\text{si } \chi = 1 \text{ y } |\Omega| \neq 0 \text{ entonces } |\Theta| = |\Omega|$$

dada la finitud de X tenemos que $\Theta = \Omega$. Luego como

$$\text{si } \Theta = \Omega \text{ entonces para todo } x \in X\text{: } H^B(\{x\}) \in C_\tau A$$

y como, nuevamente, debido a la finitud del conjunto X;

$$\text{para todo } U \in \boldsymbol{P}(X)\text{: } H^B(U) = \cup\{H^B(\{x\}) \ / \ x \in U\}$$

tenemos que

$$\text{para todo } U \in \boldsymbol{P}(X)\text{: } H^B(U) \in C_\tau A$$

luego $C_\tau B \subset C_\tau A$ y en consecuencia

$$\text{para todo } x \in X\text{: } H^A(\{x\}) \subset H^B(\{x\})$$

por lo tanto

$$\text{si } (x, y) \in \boldsymbol{R}^A \text{ entonces } (x, y) \in \boldsymbol{R}^B \text{ o sea } \boldsymbol{R}^A \subset \boldsymbol{R}^B.$$

PROPOSICIÓN 3.7. Sean $\mathbf{S}* = \{\mathbf{S}, (\mathbf{L}_q)_{q \in Q}, (F_q\colon V_q \to \mathbf{L}_q)_{q \in Q}\}$, un sistema de información borroso donde $\mathbf{S} = (X, Q = C \cup D, V = \cup\{V_q \ / \ q \in Q\}, \delta)$, $b \in Q$ un atributo y
$B = \delta_b \circ F_b$. Entonces si $\boldsymbol{R}^B$ es una relación de equivalencia tenemos que: $\Omega = \varnothing$ o $\Omega = X$.

Demostración: Si $\Omega \neq X$ entonces existe $x \in X$ tal que $H^B(\{x\}) = X$. Luego obviamente $\boldsymbol{R}^B = X \times X$, en consecuencia $\Omega = \varnothing$.

TEOREMA 3.8. Sean $\mathbf{S}* = \{\mathbf{S}, (\mathbf{L}_q)_{q \in Q}, (F_q\colon V_q \to \mathbf{L}_q)_{q \in Q}\}$, un sistema de información borroso donde $\mathbf{S} = (X, Q = C \cup D, V = \cup\{V_q \ /$

$q \in Q\}$, $\delta)$, a, $b \in Q$ dos atributos, $A = \delta_a \circ F_a$ y $B = \delta_b \circ F_b$. Entonces si $\boldsymbol{R}^A$ y $\boldsymbol{R}^B$, son relaciones de equivalencia se tiene que $\chi \leq \gamma$.

Demostración: Si $\boldsymbol{R}^B$ es una relación de equivalencia, por la PROPOSICIÓN 2.7, tenemos que $\Omega = \emptyset$ o $\Omega = X$.

Si $\Omega = \emptyset$ entonces $\boldsymbol{R}^B = X \times X$, por lo tanto; $\chi = \gamma = 1$.

Si $\Omega = X$, entonces como obviamente $|\Theta| = |X|$, es suficiente demostrar que:

$$\Theta \subset \cup\{(H^A)^*. G \ / \ G \in \Gamma\},$$

donde $\Gamma = X \ / \ \boldsymbol{R}^B$.

Si $x \in \Theta$ entonces: $x \in H^B(\{x\})$ y $H^B(\{x\}) \neq X$ y $H^B(\{x\}) \in C_\tau A$, como $\boldsymbol{R}^A$ es una relación de equivalencia, para cada $x \in X$, $H^A(\{x\})$ es una clase de equivalencia la cual es un abierto y un cerrado en el espacio topológico $\{X, \tau^A\}$. Por lo tanto

$$\text{como } H^B(\{x\}) \in C_\tau A \text{ entonces } H^B(\{x\}) \in \tau^A$$

en consecuencia:

$$(H^A)^*(H^B(\{x\})) = H^B(\{x\}) \text{ y } x \in H^B(\{x\})$$

luego como $H^B(\{x\}) \in \Gamma$ tenemos que; $x \in \cup\{(H^A)^*. G \ / \ G \in \Gamma\}$, por lo tanto $\chi \leq \gamma$.

A continuación definiremos el grado topológico de dependencia entre atributos de un sistema **S*** (con respecto a la regla (**R**)). Pero antes precisemos:

i) Que dado un conjunto **L**-borroso A $\in$ $\mathbf{L}^X$ y un valor $\alpha \in$ **L**, se llama conjunto de nivel α y se anota A_α, el conjunto definido por: $A_\alpha = \{x \in X \ / \ A(x) \geq \alpha\}$.

ii) Que si τ^A es la topología inducida en X por un conjunto **L**-borroso A $\in$ $\mathbf{L}^X$, anotaremos con τ^{A*} el conjunto definido por: $\tau^{A*} = \tau^A - \{\emptyset, X\}$.

DEFINICIÓN 3.9. Sean $\mathbf{S}* = \{\mathbf{S}, (\mathbf{L}_q)_{q \in Q}, (F_q: V_q \to \mathbf{L}_q)_{q \in Q}\}$, un sistema de información borroso donde $\mathbf{S} = (X, Q = C \cup D, V = \cup\{V_q \ / \ q \in Q\}, \delta)$, a, b $\in$ Q dos atributos, $A = \delta_a \circ F_a$, y $B = \delta_b \circ F_b$. Se llama grado topológico de dependencia del atributo b $\in$ Q respecto del atributo a $\in$ Q en **S** (con respecto a la regla (**R**)), el valor κ definido por:

$$\kappa = 1 \text{ si } |\tau^{B*}| = 0 \quad \text{o} \quad \kappa = (|\tau^{A*} \cap \tau^{B*}| \ / \ |\tau^{B*}|) \text{ si } |\tau^{B*}| \neq 0.$$

PROPOSICIÓN 3.10. Si A es un conjunto **L**-borroso en un conjunto finito X entonces la familia $(A_{A(x)})_{x \in X}$ de partes de X es una base de la topología τ^A.

Demostración: Primeramente demostraremos que para todo $\alpha \in$ **L**; $A_\alpha \in \tau^A$.

En efecto, como para todo $\alpha \in$ **L**; $A_\alpha^- = \{x \in X \ / \ A(x) \text{ no-}\geq \alpha\}$, tenemos que

$$\text{si } x \in A_\alpha^- \text{ y } A(x) \geq A(y) \text{ entonces } A(y) \text{ no-}\geq \alpha$$

pues si suponemos que $A(y) \geq \alpha$, por transitividad, tenemos que $A(x) \geq \alpha$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto;

si $x \in A_\alpha^-$ entonces $x \in H^B(\{x\}) \subset A_\alpha^-$, luego

$A_\alpha^- \subset H^B(\{x\}) \subset A_\alpha^-$ o sea $A_\alpha^- = H^B(\{x\})$, por lo tanto $A_\alpha^- \in C_\tau A$, lo cual equivale a que $A \in \tau^A$.

En segundo lugar;

si $G \in \tau^A$ entonces $G^- = \cup\{H^A(\{x\}) \ / \ x \in G^-\}$ o sea $G = \cap\{(H^A(\{x\}))^- \ / \ x \in G^-\}$,

luego

si $x_0 \in G$ entonces para todo $x \in G^-$, $x_0 \in (H^A(\{x\}))^-$.

lo cual equivale a que para todo $x \in G^-$; $A(x)$ no-$\geq A(x_0)$

por lo tanto si $A(y) \geq A(x_0)$ y suponemos que existe $x \in G^-$ tal que $A(x) \geq A(y)$ entonces, por transitividad, tenemos que $A(x) \geq A(x_0)$ lo cual es una contradicción, en consecuencia:

si $A(y) \geq A(x_0)$ entonces para todo $x \in G^-$; $A(x)$ no-$\geq A(y)$

lo cual equivale a que para todo $x \in G^-$; $y \in (H^A(\{x\}))^-$, vale decir: $y \in G$ o sea $A_{A(x)} \subset G$, luego por lo demostrado en las dos partes, la familia $(A_{A(x)})_{x \in A}$ forma una base de la topología τ^A.

TEOREMA 3.11. Sean $\mathbf{S}* = \{\mathbf{S}, (\mathbf{L}_q)_{q \in Q}, (F_q: V_q \to \mathbf{L}_q)_{q \in Q}\}$, un sistema de información borroso donde $\mathbf{S} = (X, Q = C \cup D, V = \cup\{V_q \ / \ q \in Q\}, \delta)$, a, b $\in Q$ dos atributos, $A = \delta_a$ o F_a, y $B = \delta_b$ o F_b. Entonces $\boldsymbol{R}^A \subset \boldsymbol{R}^B$ si y solo si $\kappa = 1$.

Demostración: Si $\boldsymbol{R}^A \subset \boldsymbol{R}^B$ entonces $\tau^B \subset \tau^A$ y por lo tanto $\kappa = 1$. Recíprocamente, si $\kappa = 1$, en primer lugar:

si $|\tau^{B*}| = 0$ entonces $\boldsymbol{R}^B = X \times X$ por lo tanto $\boldsymbol{R}^A \subset \boldsymbol{R}^B$.

Y en el caso contrario:

$$\text{si}\, |\tau^{B*}| \neq 0 \text{ entonces } |\tau^{A*} \cap \tau^{B*}| = |\tau^{B*}|$$

por lo tanto debido a la finitud de dichos conjuntos tenemos que $\tau^{A*} \cap \tau^{B*} = \tau^{B*}$ lo que implica que $\tau^{B*} \subset \tau^{A*}$ o sea que $\tau^B \subset \tau^A$ por lo tanto $\boldsymbol{R}^A \subset \boldsymbol{R}^B$.

A continuación nos referiremos a la comparación de decisiones correspondientes en primer lugar a un mismo sistema de información, y en segundo lugar a diferentes sistemas de información con algunas condiciones limitantes.

TEOREMA 3.12. Sean $\mathbf{S}* = \{\mathbf{S}, (\mathbf{L}_q)_{q \in Q}, (F_q: V_q \to \mathbf{L}_q)_{q \in Q}\}$ un sistema de información borroso donde $\mathbf{S} = (X, Q = C \cup D, V = \cup\{V_q / q \in Q\}, \delta)$, a, b^1, $b^2 \in Q$ tres atributos,
$A = \delta_a \circ F_a$, $B_1 = \delta_{b1} \circ F_{b1}$, y $B_2 = \delta_{b2} \circ F_{b2}$. Si $B_2 \prec B_1$ y $\boldsymbol{R}^{B_1} \subset \boldsymbol{R}^A$ entonces los grados de dependencia topológica κ_1 y κ_2 de los atributos b^1, $b^2 \in Q$, respecto el atributo $a \in Q$, en $\mathbf{S}$ (con respecto a la regla (**R**)) respectivamente, verifican la siguiente expresión: $\kappa_2 \leq \kappa_1$.

Demostración: Como $B_2 \prec B_1$ si y solo si $\boldsymbol{R}^{B_2} \subset \boldsymbol{R}^{B_1}$, por lo tanto:
si $B_2 \prec B_1$ y $\boldsymbol{R}^{B_1} \subset \boldsymbol{R}^A$ entonces $\boldsymbol{R}^{B_2} \subset \boldsymbol{R}^{B_1} \subset \boldsymbol{R}^A$, o sea

$$\tau^A \subset \tau^{B_1} \subset \tau^{B_2}$$

en consecuencia:

$$(\tau^{A*} \cap \tau^{B_1*}) = (\tau^{A*} \cap \tau^{B_2*}) = \tau^{A*} \text{ y } |\tau^{B_1*}| \leq |\tau^{B_2*}|$$

luego obviamente;

$$|\tau^{A*} \cap \tau^{B1*}| = |\tau^{A*} \cap \tau^{B2*}| = |\tau^{A*}|$$

por lo tanto: el grado de dependencia topológica κ_1 del atributo $b^1 \in Q$ respecto al atributo $a \in Q$ en el sistema borroso **S*** (con respecto a la regla (**R**)) esta dado por:

$$1 \text{ si } |\tau^{B1*}| = 0 \quad \text{y} \quad |\tau^{A*}| \ / \ |\tau^{B1*}| \text{ si } |\tau^{B1*}| \neq 0$$

y respectivamente el grado de dependencia topológica κ_2 del atributo $b \in Q$ respecto al atributo $a \in Q$ en el sistema borroso **S*** (con respecto a la regla (**R**)) esta dado por:

$$1 \text{ si } |\tau^{B2*}| = 0 \quad \text{y} \quad |\tau^{A*}| \ / \ |\tau^{B2*}| \text{ si } |\tau^{B2*}| \neq 0$$

luego obviamente en todos los casos tenemos que: $\kappa_2 \leq \kappa_1$.

En la práctica la situación que se presenta es la constituida por dos sistemas de información iguales en cuanto, al conjunto de objetos X, al conjunto de atributos Q, a la familia de valores $(V_q)_{q \in Q}$, a la familia de reticulados completos $(\mathbf{L}_q)_{q \in Q}$, a la familia de valoraciones borrosas $(F_q\colon V_q \to \mathbf{L}_q)_{q \in Q}$, y que, obviamente, difieren en las funciones de descripción δ^1 y δ^2, y eso solo en las restricciones de dichas funciones a un subdominio de la forma X x {b} donde $b \in Q$. A efecto de dar un criterio de comparación entre los grados de dependencia topológica del atributo b con respecto a un atributo $a \neq b$, en ambos sistemas, (con respecto a la regla (**R**)), presentamos el resultado que sigue, que trata dicha cuestión con referencia a un par de sistemas cuya diferencia es un poco más fuerte que la señalada precedentemente.

COROLARIO 3.13. Sean para $k = 1, 2$:

i) $\mathbf{S_k}^* = \{\mathbf{S_k}, (\mathbf{L}^k{}_q)_{q \in Q}, (F^k{}_q: V^k{}_q \to \mathbf{L}^k{}_q)_{q \in Q}\}$, un sistema de información borrosos, donde

$\mathbf{S_k} = (X,\ Q = C \cup D,\ V = \cup\{V_q \ / \ q \in Q\},\ \delta^k)$, admite la existencia de un atributo

$b \in Q$ tal que

$$\delta^1|_{X \times \{Q - \{b\}\}} = \delta^2|_{X \times \{Q - \{b\}\}} \ \text{ y } \ \delta^1|_{X \times \{b\}} = \delta^2|_{X \times \{b\}}$$

o

$$F^1{}_b: V^1{}_b \to \mathbf{L}^1{}_b \neq F^2{}_b: V_b \to \mathbf{L}_b$$

y tal que para todo atributo $q \neq b$: $\mathbf{L}^1{}_q = \mathbf{L}^2{}_q$ y $F^1{}_q = F^2{}_q$,

ii) Un atributo $a \in Q - \{q\}$,

iii) $A = \delta^1{}_a \circ F^1{}_a = \delta^2{}_a \circ F^2{}_a$, $B_1 = \delta^1{}_b \circ F^1{}_b$ y $B_2 = \delta^2{}_b \circ F^2{}_b$.

Entonces si $B_2 \prec B_1$ y $\boldsymbol{R}^{B}1 \subset \boldsymbol{R}^A$ tenemos que los grados de dependencia topológica κ_1 y κ_2 del atributo $b \in Q$ respecto del atributo $a \in Q$ respectivamente en los sistemas $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$ (con respecto a la regla (**R**)), verifican la siguiente expresión: $\kappa_2 \leq \kappa_1$.

Demostración: Si consideramos el sistema de información borroso:

$\mathbf{S'^*} = \{\mathbf{S'}, (\mathbf{L}'_q)_{q \in Q'}, (F'_q: V'_q \to \mathbf{L}'_q)_{q \in Q'}\}$ donde $\mathbf{S'} = (X', Q', V', \delta')$ donde:

i) $X' = X$.

ii) $Q' = \{\{b^1, b^2\} - \{b\}\}$, donde $b \neq b^1 \neq b^2$.

iii) $V' = \cup\{V'_q \ / \ q \in Q'\}$, donde para todo $q \in (Q' - \{b^1, b^2\})$: $V'_q = V^1{}_q$, y para $q = b^1$,

$V'_q = V^1{}_b$ y para $q = b^2$, $V'_q = V^2{}_b$.

iv) Para todo: $(x, q) \in (X' \times (Q' - \{b^1, b^2\}))$: $\delta'(x, q) = \delta^1(x, q) = \delta^2(x, q)$, y para (x, b^1):

$\delta'(x, b^1) = \delta^1(x, b)$ y para (x, b^2): $\delta'(x, b^2) = \delta^2(x, b)$.

v) $\mathbf{L}'_q = \mathbf{L}^1_q$, para todo $q \in (Q' - \{b^1, b^2\})$ y para $q = b^1$, $\mathbf{L}'_q = \mathbf{L}^1_b$ y para $q = b^2$,

$\mathbf{L}'_q = \mathbf{L}^2_b$.

Tendremos que:

$$\delta'_a = \delta^1_a,\ F'_a = F^1_a,\ \delta'_{b^1} = \delta^1_b,\ F'_{b1} = F^1_b,\ \delta'_{b^2} = \delta^2_b,\ F'_{b2} = F^2_b$$

por lo tanto:

$$A = \delta^1_a \circ F^1_a = \delta'_a \circ F'_a,\ B_1 = \delta^1_b \circ F^1_b = \delta'_{b1} \circ F'_{b1} \text{ y } B_2 = \delta^2_b \circ F^2_b = \delta'_{b2} \circ F'_{b2}.$$

Luego como este nuevo sistema de información borroso cumple las condiciones exigidas en la proposición precedente Si $B_2 \prec B_1$ y $\boldsymbol{R}^{B1} \subset \boldsymbol{R}^A$ entonces $\kappa_2 \leq \kappa_1$.

Las consideraciones precedentes nos demuestran la posibilidad de combinar la relación de fineza y el grado topológico de dependencia para comparar diferentes decisiones. Casos especialmente interesantes son aquellos en que $\kappa_2 \leq \kappa_1 = 1$, ya que se puede comparar B_1 y B_2 mediante la relación "$\prec$". También cuando $\boldsymbol{R}^A$ es la relación de identidad, en tal caso para todo $B \in \mathbf{L}_b^X$, $\kappa = 1$; o cuando $\boldsymbol{R}^A = X \times X$, entonces para todo
$B \in \mathbf{L}_b^X$, tal que $\boldsymbol{R}^B \neq X \times X$, resulta $\kappa = 0$.

4. EJEMPLO

Supongamos que los estudiantes que integran un curso, que anotaremos con

$$X = \{x_1 ,x_2 ,x_3 ,x_4 ,x_5 ,x_6 ,x_7 ,x_8 ,x_9\},$$

han sido calificados por dos profesores. que anotaremos con P^1 y con P^2 respectivamente, en base a un test académico y una calificación del item otras actividades, que incluye deportes, sociales, etc... Por último supongamos que los datos señalados son los que figuran en la siguiente tabla 1:

			Profesor 1	Profesor 2
Estudiantes	Resul. test	Otras act.	Calificación	Calificación
	t	a	b^1	b^2
x_1	35	1	0	0
x_2	60	0	1	1
x_3	80	3	4	3
x_4	90	5	5	5
x_5	66	2	3	2
x_6	49	1	2	1
x_7	45	2	2	1
x_8	65	4	3	4
x_9	70	1	2	2

TABLA 1

Obviamente la TABLA 1 nos permite definir dos sistemas de información:

$$\mathbf{S_1} = (X, Q_1, V^1, \delta_1) \quad y \quad \mathbf{S_2} = (X, Q_2, V^2, \delta_2)$$

donde la 4-upla que define $\mathbf{S_k}$, para k = 1, 2, esta dada por:

i) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$.

ii) $Q_k = C \cup D_k$, donde $C = \{t, a\}$ y $D_k = \{b^k\}$.

iii) $V = V_t \cup V_a \cup V_bk$, donde: $V_t = [0, 100]$ y $V_a = V_bk = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

iv) δ_k: $X \times Q_k \to V$, obviamente es la aplicación que al valor $(x, q) \in X \times Q$, le asigna el valor correspondiente a la fila x, columna q.

En base a los sistemas de información $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$ podemos definir dos sistemas de informa.ción borrosos $\mathbf{S_1}$* y $\mathbf{S_2}$* definiendo las estructuras borrosas correspondientes.

Sean entonces: para k = 1, 2,

i) $\mathbf{L}_t = [0, 1]$ y $\mathbf{L}_a = \mathbf{L}_bk = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$

la familia de reticulados completos correspondientes al conjunto de atributos Q_k.

ii) F_t: $V_t \to \mathbf{L}_t$, el conjunto $\mathbf{L}_t$-borroso definido por $F_t(s) = 0$ si $0 \leq s \leq 50$,

$F_t(s) = ((z - 50)/ 25)$ si $50 < s \leq 75$ y $F_t(s) = ((100 - s)/ 25)$ si $75 < s \leq 100$.

F_a: $V_a \to \mathbf{L}_a$, el conjunto $\mathbf{L}_a$-borroso definido por la TABLA 2.

F_bk: $V_bk \to \mathbf{L}_bk$, el conjunto $\mathbf{L}_bk$-borroso definido por la TABLA 2.

la familia de conjuntos $\mathbf{L}_q$-borrosos correspondiente al conjunto de atributos Q_k.

	0	1	2	3	4	5
F_a, F_b1, F_b2						

TABLA 2

Estudiantes	T	A	$T \cap A$	D^1	D^2
x_1	0	0.1	0	0	0
x_2	0.40	0	0	0.1	0.1
x_3	0.80	1	0.8	0.7	1
x_4	0.40	0.4	0.4	0.4	0.4
x_5	0.64	0.5	0.5	1	0.5
x_6	0	0.1	0	0.5	0.1
x_7	0	0.1	0	0.5	0.1
x_8	0.6	0.7	0.6	1	0.7
x_9	0.80	0.1	0.1	0.5	0.5

TABLA 3

Sean entonces para k = 1, 2,:

$T_k: X \to \mathbf{L}_t$, el conjunto $\mathbf{L}_t$-borroso definido por: $T_k = F_t \circ (\delta_k)_t$.

$A_k: X \to \mathbf{L}_a$, el conjunto $\mathbf{L}_a$-borroso definido por: $A_k = F_a \circ (\delta_k)_a$.

$D^k: X \to \mathbf{L}_dk$, el conjunto $\mathbf{L}_dk$-borroso definido por: $D^k = F_dk \circ (\delta_k)_dk$.

Observemos que $T_1 = T_2$, y que $A_1 = A_2$, razón por la cual, para mayor simplicidad los anotaremos con T y A respectivamente.
Los valores que toman los conjuntos borrosos T, A, D^1 y D^2 en X están dados en la TABLA 3.
En consecuencia tenemos las siguientes topologías inducidas por los conjuntos borrosos T, A, D^1 y D^2:

$\tau^{T\cap A} = \{X, \{x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}, \{x_3, x_4, x_5, x_8\}, \{x_3, x_5, x_8\}, \{x_3, x_8\}, \{x_3\}, \varnothing\}$

$\tau^{D}1 = \{X, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}, \{x_3, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}, \{x_3, x_5, x_8,\}, \{x_5, x_8, \varnothing\}$

$\tau^{D}2 = \{X, \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}, \{x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}, \{x_3, x_8, x_9\}, \{x_3, x_8\}, \{x_3\}, \varnothing\}$.

por lo tanto

$(\tau^{T\cap A})^* = \{\{x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}, \{x_3, x_4, x_5, x_8\}, \{x_3, x_5, x_8\}, \{x_3, x_8\}, \{x_3\}\}$

$(\tau^{D}1)^* = \{\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}, \{x_3, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}, \{x_3, x_5, x_8,\}, \{x_5, x_8\}\}$

$(\tau^{D}2)^* = \{\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}, \{x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}, \{x_3, x_8, x_9\}, \{x_3, x_8\}, \{x_3\}\}$.

luego:

$(\tau^{T\cap A})^* \cap (\tau^{D}1)^* = \{\{ x_3, x_5, x_8 \}\}$

$(\tau^{T\cap A})^* \cap (\tau^{D}2)^* = \{\{x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}, \{x_3, x_8\}, \{x_3\}\}$

en consecuencia:

$$|(\tau^{T\cap A})^* \cap (\tau^{D}1)^*| = 1 \quad y \quad |(\tau^{T\cap A})^* \cap (\tau^{D}1)^*| = 3$$

por lo tanto

$$\kappa_1 = |(\tau^{T\cap A})^* \cap (\tau^{D}1)^*| \ / \ |(\tau^{D}1)^*| = 1 \ / \ 5$$
$$\kappa_2 = |(\tau^{T\cap A})^* \cap (\tau^{D}2)^*| \ / \ |(\tau^{D}2)^*| = 3 \ / \ 5$$

y finalmente $\kappa_1 \leq \kappa_2$.

Esto nos indica que la calificación del Profesor 2, depende más de las condiciones dadas que la calificación del Profesor 1 (con respecto a la regla (**R**)), o también que son más compatibles (con respecto a la regla (**R**)).

Claramente este ejemplo nos muestra, prácticamente, la utilidad de criterios basados en consideraciones topológicas para decidir prioridades en un conjunto de dictámenes generados por distintos expertos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BIRKHOFF, G. Lattice Theory. American Mathematical Soc., New York (1948).

[2] DUBOIS, D. y PRADE, H. An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1991.

[3] GOGUEN, J. A. L-fuzzy sets. J. Math. Appls., 18, 145-174, 1967.

[4] GRZYMALA-BUSSE, J. W. Knowledge acquisition under uncertainty - a rough set approach. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 1, 3-16, 1988.

[5] KELLEY, J. L. Topología General, Eudeba, Buenos Aires, 1963.

[6] KORTELAINEN, J. On the evaluation of compatibility with gradual rules in information systems: a topological approach. Control and Cybernetics, Vol 28, N°1, 121-131,1999.

[7] KOSKO, B. (1990) Fuzziness vs. probabillity. International Journal of General Systems, 17, 211-240.

[8] PAWLAK, Z. On learning - a rough set approach. Lecture Notes in Computer Science, 208, Springer-Verlag, 197-221, 1986.

[9] ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. Information and Control 8, 1965.