Más allá del valor en riesgo (VeR): el VeR condicional [1]

José Manuel Feria Domínguez* • María Dolores Oliver Alfonso**
*Universidad Pablo de Olavide • **Universidad de Sevilla

RECIBIDO: 17 de febrero de 2006
ACEPTADO: 17 de noviembre de 2006

Resumen: *En los últimos años, el Valor en Riesgo (VeR) se ha convertido en un patrón comúnmente utilizado en la medición del Riesgo de Mercado por los directivos bancarios. El VeR representa la pérdida máxima en la que podría incurrir una cartera en un plazo determinado con un nivel de confianza estadística dado. En otras palabras, el VeR necesita ser definido previamente en términos de ciertos parámetros (plazo, nivel de confianza, moneda de referencia), así como determinadas hipótesis. Una de ellas es la de estabilidad, la cual supone que la estimación VeR se obtiene para condiciones normales del mercado. Este principio excluye la existencia de escenarios extremos, caracterizados por altos niveles de volatilidad, lo que en palabras de Jorion (1997) se traduce en Riesgo de Evento. Además, Artzner et al. (1997, 1999) señalan que el VeR sólo representa un determinado percentil de la distribución de Pérdidas y Ganancias, ignorando pues, lo que sucede más allá (Riesgo de Cola). Por otro lado, el VeR no es una medida coherente del riesgo puesto que no es subaditiva. Para soslayar estos inconvenientes, se propone le utilización de la Deficiencia Medida o VeR Condicional. Esta nueva medida se define como la pérdida esperada media condicionada a que se supere el umbral que marca el VeR.*
En este trabajo, nos centramos en ambas medidas VeR y CVeR aplicándolas a una cartera de renta variables española.
Palabras clave: *Riesgo de mercado / Metodologías de valor en riesgo / Ejercicio de verificación / VeR condicional.*

Beyond Value at Risk (VaR): The Conditional VaR (CvaR)
Abstract: *In recent years, Value-at-Risk (VaR) has become a standard measure of market risk commonly used by financial managers. VaR indicates the maximum amount of money that may be lost on a portfolio over a given period of time, with a given level of confidence. In other words, Value at Risk needs to be previously defined in terms of certain parameters (time horizon, level of confidence and currency in reference), as well as some theoretical hypotheses. One of them has to do with stability which supposes that VaR estimate is obtained under normal market conditions. This principle implies the exclusion of extreme scenarios characterized by high volatility levels that are defined by Jorion (1997) as Event Risk. Moreover, Artzner et al. (1997, 1999) pointed out that VaR only represents a certain percentile of profit-loss distributions without standing any loss beyond VaR level ("tail risk"). But also VaR is not a coherent measure of risk since it is not sub-additive. To overwhelm those problems, the use of Expected Shortfall or Conditional VaR (CVaR) is proposed. This new measure of risk can be defined as the conditional expectation of loss given that the loss is beyond VaR level.*
In this paper, we focus on both VaR and CVaR concepts by using an empirical example based on a Spanish stock market portfolio
Key Words: *Market risk / Value at risk (VaR) / Expected shortfall (CVaR) / Back-testing.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el *Valor en Riesgo*, en adelante *VeR*, más conocido por su notación anglosajona de "*Value at Risk*", se ha configurado como una medida del riesgo comúnmente aceptada dentro la industria bancaria. Sin embargo, no es un concepto que emane de *la nada*, pues surge de la aplicación de los principios de la *Teoría de Carteras* a la gestión y valoración del riesgo de una posición de mercado.

En realidad, la filosofía *VeR* trata de medir la relación entre rentabilidad y riesgo para obtener la cartera eficiente, retomando, de esta forma, los conceptos introducidos por Markowitz (1959) y Sharpe (1964), eso sí, aplicándolos a un contexto más estandarizado y normalizado.

La definición de *Valor en Riesgo*, a nuestro parecer más completa, la encontramos en Garman y Blanco (1998): "El VeR de una cartera es la máxima pérdida esperada para un horizonte temporal y nivel de confianza determinados, medido en una moneda de referencia específica". Por su parte, Alexander y Leigh (1997) plantean también el concepto *VeR* utilizando la simbología estadística, esto es: "La medida de Valor en Riesgo es una cantidad nominal *C*, tal que:

$$\text{Prob}\,(\Delta P < -C) = \alpha \qquad (1)$$

donde ΔP recoge el cambio en el valor de la cartera, es decir la pérdida potencial, durante un período de mantenimiento determinado h y α es una probabilidad suficientemente pequeña".

De las definiciones anteriores se desprende que el *VeR* es, ante todo, una estimación estadística y, como tal, requiere el establecimiento, *a priori*, de una serie de parámetros:

- Un *intervalo o nivel de confianza* asociado al cálculo.
- Un *plazo, o unidad de tiempo,* al cual va referido la estimación.
- Una *moneda de referencia.*
- *Una hipótesis sobre la distribución de la variable analizada.* En general, el supuesto más utilizado es el de *normalidad*, lo cual permite representar todas las observaciones mediante la conocida campana de *Gauss* y aplicar sus propiedades estadísticas.

Para clarificar, aún más, el concepto de *VeR*, supongamos que una entidad financiera anuncia que el *VeR* a un día de su cartera es de 1 millón de euros, para un nivel de confianza estadística del 95%. Esto, en otras palabras, significa que:

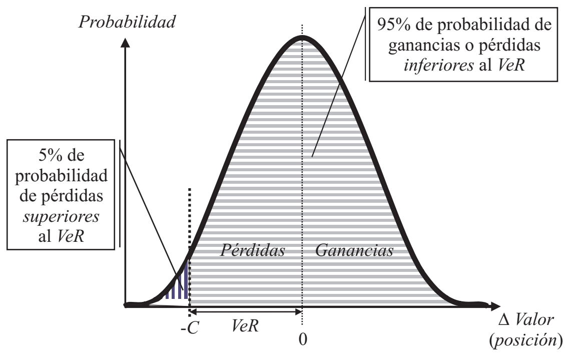
- Existe un 5% de probabilidad de incurrir en una pérdida superior a dicha cuantía; dicho de otro modo, la pérdida en 5 de cada 100 días se estima superior a 1 millón de euros.
- De forma análoga, existe un 95% de probabilidad de que la pérdida sea inferior a 1 millón de euros, o lo que es lo mismo, la pérdida de la cartera se espera sea inferior a esta cuantía 95 de cada 100 días.
- En media, una vez al mes, considerando que un mes comprende 20 días de negociación, el valor de la cartera caerá más de 1 millón de euros.
- Si aplicamos las expresión (1) a nuestro ejemplo:

$$\text{Prob}\,(\Delta P < -1 \cdot 10^{6}\,\text{euros}) = 0{,}05$$

Gráficamente, el concepto estadístico *VeR* se ilustra a continuación en la figura 1.

A modo de resumen, nos gustaría subrayar que el *VeR* es, en última instancia, una cifra, expresada en unidades monetarias, que resume la exposición de una cartera de posiciones al riesgo de mercado. Por ello, proporciona una medida fácilmente comprensible para sus usuarios, esto es, accionistas, operadores y gestores, quienes podrán tomar decisiones en función de su grado de aversión al riesgo; de ahí su versatilidad.

Figura 1.- Ilustración del concepto de *Valor en Riesgo (VeR),* para un 95% de confianza estadística



Aunque nadie duda de su enorme interés de cara a la gestión de riesgos, sin embargo la medición *VeR* presenta una serie de limitaciones, a saber:

- En primer lugar, la distribución normal o log-normal que, generalmente se usa para su estimación, infravalora el riesgo de sucesos extremos, lo que Jorion (1997) denomina *Event Risk.*
- En segundo lugar, el *VeR* ignora, por definición, aquellas pérdidas cuya probabilidad de ocurrencia sea menor que la elegida como nivel de confianza de la estimación.

Además, según Uryasev (2000), el *VeR* reúne ciertas características no deseables, como son:

- Falta de *subaditividad:* Diremos que una medida del riesgo ρ es subaditiva cuando el riesgo agregado de una cartera es menor o igual que la suma de los riesgos de los activos individuales, X e Y, que la componen, o mejor dicho, cuando considera los efectos derivados de la diversificación. Matemáticamente, ello se traduce en:

$$\rho\,(X+Y) \leq \rho\,(X) + \rho\,(Y) \qquad (2)$$

- No *convexidad*[3]*:* La medición *VeR* es difícil de optimizar cuando se calcula a partir de escenarios. Sólo cuando las superficies de riesgo son convexas es posible obtener una solución óptima única que minimice el riesgo.

Conscientes de ello, algunos autores, Artzner *et al.* (1997, 1999), Basi *et al.* (1998), Embrecht *et al.* (1999), Ursasev (2000), Longin (2001) y

Acerbi *et al.* (2001), han propuesto una nueva medida del riesgo que logra salvar tales limitaciones; es el llamado *VeR Condicional* (CVeR), también conocido como *Deficiencia Media* (*Expected Shortfall*), *BVeR* (*Beyond-VaR) o Tail VaR*.

CONCEPTO DE *VeR CONDICIONAL* (CVeR)

La idea que subyace bajo el término *CVeR* es bien sencilla; partimos del propio concepto de *Valor en Riesgo* pero, esta vez, no nos preguntamos sobre la pérdida máxima en la que podríamos incurrir en un horizonte determinado con un nivel de confianza dado sino en la pérdida potencial que, en media, cabría esperar una vez superado el umbral señalado por el VeR.

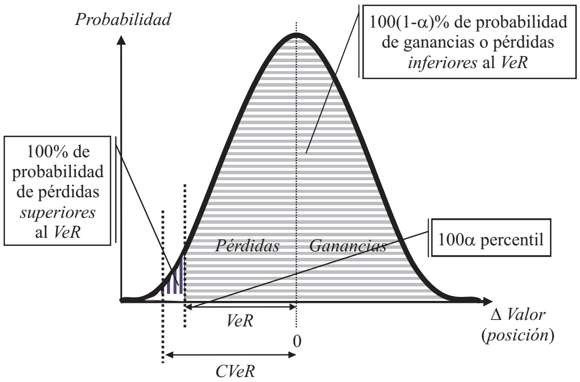
Según Artzner *et al.* (1997, 1999), se trata de "una expectativa de pérdida condicionada a que se supere el nivel indicado por el *VeR*".

Si recordamos que, en términos estadísticos, la esperanza matemática de una variable aleatoria X condicionada a un suceso B viene dada por la expresión $E\ [X|B]$, podemos transcribir el *CVeR* como:

$$CVeR_{\alpha}(X) = E\left[-X \middle| \underbrace{-X \geq VeR_{\alpha}(X)}_{\text{suceso}} \right] \quad (3)$$

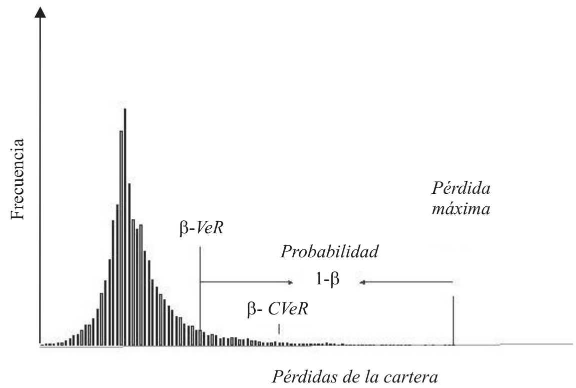
donde X es una variable aleatoria que representa las pérdidas y ganancias de una cartera y $VeR_{\alpha}(X)$ es el *Valor en Riesgo* definido para un nivel de confianza de 100 $(1-\alpha)$%.

Figura 2.- Distribución de Pérdidas y Ganancias, Valor en Riesgo (*VeR) y* Valor en Riesgo Condicional *(CVeR)*



Para abundar aún más en la idea de *CVeR,* incorporamos la opinión de Lamothe y Carrillo (2001) al respecto: "Si el *VeR* es una medida interesante para el gestor, mucho más puede serlo el *VeR Condicional*, es decir, la pérdida media una vez llegados al *VeR*. Por poner un ejemplo, a los efectos de reserva de capital, no nos interesa tanto saber que sólo un 1% de las veces vamos a superar un determinado nivel de pérdidas, sino si una vez superado dicho umbral, la pérdida medida va a ser 1,5 o de 3,2 millones".

Figura 3.- Distribución de Pérdidas, Valor en Riesgo (*VeR*) y Valor en Riesgo Condicional (*CVeR*)



FUENTE: Uryasev (2000).

La figura 3 es análoga a la figura 2, si bien, en este caso, partimos de la distribución de pérdidas de una cartera para ilustrar los conceptos de *VeR* y *CVeR*. Seguimos ahora la notación empleada por Rockafellar y Uryasev (1999), para quien, dado un nivel de probabilidad β, el *VeR* o, mejor dicho, el $\beta-$*VeR*, se define como una cantidad α tal que la pérdida no excederá dicha cantidad, con esa probabilidad β. Por otra parte, el $\beta-$*CVeR* es la expectativa de pérdidas condicionada sobre ese límite α.

Una vez aclaradas las principales diferencias conceptuales entre *CVeR* y *VeR*, resulta fácil deducir que el primero es siempre una magnitud mayor o igual que el segundo. En particular, cuando la distribución de Pérdidas y Ganancias sigue una ley normal el *CVeR* se calcula como sigue:

$$CVeR_\alpha(X) = E\left[-X \middle| -X \geq VeR_\alpha(X)\right] =$$

$$= \frac{E\left[-X \cdot I_{\left\{X \leq -VeR_\alpha(X)\right\}}\right]}{\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha\sigma_X\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-VeR_\alpha(X)} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma_X^2}} \cdot dt =$$

$$= -\frac{1}{\alpha\sigma_X\sqrt{2\pi}} = \left[-\sigma_X^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma_X^2}}\right]_{-\infty}^{-VeR_\alpha(X)} =$$

$$= \frac{\sigma_X}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{VeR_\alpha(X)^2}{2\sigma_X^2}} = \frac{\sigma_X}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q_\alpha^2\sigma_X^2}{2\sigma_X^2}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{q_\alpha^2}{2}}}{\alpha\sqrt{2\pi}} \sigma_X \qquad (4)$$

donde $I_{\{A\}}$ es una función indicador cuyo valor es 1 cuando A se cumple y 0 en caso contrario; q_α es el 100α percentil de la distribución normal estándar.

APLICACIÓN EMPÍRICA

A continuación, pasamos a desarrollar una aplicación práctica con el fin de ilustrar los de los conceptos anteriormente expuestos, no sin antes realizar ciertas precisiones metodológicas:

ELECCIÓN DE LA CARTERA

El trabajo de investigación que planteamos comienza, en primer lugar, con la selección y definición de la cartera de activos financieros sobre la cual medir el riesgo de mercado. Finalmente, hemos optado por una cartera con cinco títulos que cotizan en el mercado continuo español; en particular, se trata de los cinco valores más negociados y con mayor peso en el índice IBEX-35, esto es: TELEFÓNICA (TEF), BBVA (BBVA), BSCH (SAN), ENDESA (ELE) y REPSOL (REP).

Por otra parte, es preciso definir tanto el valor inicial de la posición como los pesos específicos de las distintas acciones en la cartera. En este sentido, hemos partido de una inversión inicial de 100.000,00 euros, prorrateados de igual forma entre los títulos individuales, según se ilustra a continuación:

Tabla 1.- Posición inicial de la cartera (en euros)

Fecha *VeR*						
30/08/2002	TEF	ELE	BBVA	SAN	REP	TOTAL
Nº títulos	2.182	1.653	1.998	2.937	1.504	10.273
Cotización	9,17€	12,10€	10,01€	6,81€	13,30€	
Valor	20.000€	20.000€	20.000€	20.000€	20.000€	100.000€
Peso	20%	20%	20%	20%	20%	100%

Como se desprende de la observación de la tabla 1, el punto de partida para estimar el *VeR* será el 30 de agosto de 2002. Lógicamente, si queremos valorar nuestra cartera ese día bastará con multiplicar los precios de las respectivas acciones por el número de títulos en nuestro haber. Para el caso que nos ocupa, hemos elegido una cartera equiponderada, es decir, todos los activos tienen el mismo peso dentro de la misma; un 20%. De igual forma, podríamos haber construido otra donde tuviésemos el mismo número de títulos por cada acción. En realidad, el diseño de la cartera es arbitrario y las posibles combinaciones infinitas.

ESTABLECIMIENTO DE PARÁMETROS

Como indicamos con anterioridad, tanto el *VeR* como el *CVeR* son estimaciones de tipo estadístico y, en consecuencia, precisan del establecimiento previo de una serie de parámetros. Por consiguiente, es hora de proceder a su fijación:

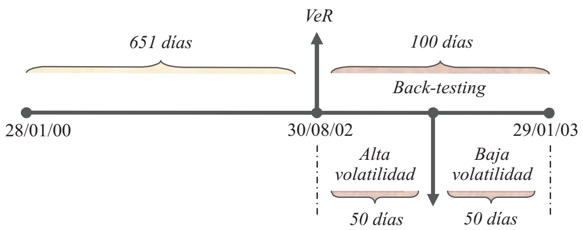
- La *unidad de tiempo* a la cual va referida la estimación será de un día, o lo que es lo mismo, calcularemos *VeR's y CVeR´s diarios*.
- El *intervalo o nivel de confianza* asociado al cálculo se ha establecido en el 95% y en el 99%.
- La *moneda de referencia* será el euro.
- Introduciremos la hipótesis de normalidad, aplicando la *Metodología Paramétrica* en la estimación de ambas magnitudes.

DEFINICIÓN DE LA VENTANA TEMPORAL

La concreción del período de análisis constituye una etapa más en el proceso metodológico. En nuestro trabajo, hemos seleccionado una ventana temporal de observación comprendida entre el 28 de enero del 2000 y el 29 de enero de 2003, es decir, un total de 751 días de negociación. Este horizonte temporal se ha escindido en dos subperíodos:

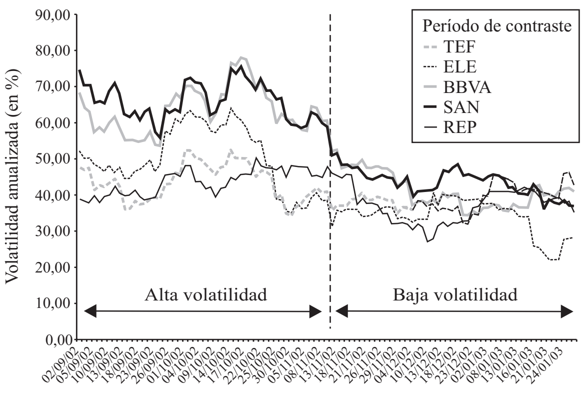
- Uno que abarca desde el 28 de enero de 2000 hasta el 30 de agosto de 2002, el cual se configura como punto de partida del proceso de estimación del *VeR* y comprende 651 días de negociación en el mercado.

Figura 4.- Definición de la ventana temporal



- Otro que transcurre del 2 de septiembre de 2002 hasta el 29 de enero de 2003, esto es, 100 días de negociación, y que hemos definido como *período de contraste (Back-testing)* de la metodología utilizada. Con objeto de extraer mayor información sobre la bondad de la misma, hemos creído conveniente dividir dicho horizonte de verificación en dos nuevos subperíodos de 50 días, cada uno de los cuales obedece a distintos niveles de volatilidad, según se ilustra en el siguiente gráfico, donde aparecen representadas las volatilidades históricas anualizadas[4] para las acciones individuales, utilizando una ventana móvil de 20 días.

Figura 5.- Niveles de volatilidad histórica para las acciones individuales



FUENTE: Elaboración propia.

METODOLOGÍA PARAMÉTRICA

En este apartado vamos a aplicar la denominada *Metodología Paramétrica* a nuestra cartera de renta variable habida cuenta de su simplicidad. Para ello, hemos dividido dicho proceso en una serie de etapas secuenciales:

1) Transformación de las series históricas de precios diarios en rentabilidades logarítmicas.
2) Obtención de los pronósticos de volatilidad para cada título utilizando medias móviles exponencial según la metodología Riskmetrics con un factor de decaimiento λ=0,94.

A continuación, ilustramos en formato de tabla, las distintas desviaciones típicas para cada una de las acciones que componen la cartera:

Tabla 2.- Volatilidades diarias individuales

	TEF	ELE	BBVA	SAN	REP
Volatilidad diaria	2,82%	1,81%	2,35%	2,52%	2,13%

3) *Calcular los VeR's individuales*. Partimos de la expresión genérica del *VeR* paramétrico:

$$VeR(relativo)_t = -W_0 \cdot Z^* \cdot \sigma_{diaria} \cdot \sqrt{t} \quad (5)$$

donde W_0 es el valor inicial de cada posición en acciones, es decir, 20.000 euros; σ_{diaria} es la volatilidad diaria de la acción, recogida en la tabla 6.13; $\sqrt{t}$ es un factor de ajuste que permite transformar la volatilidad diaria a plazos superiores. En nuestro caso, al quedar definido el horizonte de estimación del *VeR* a 1 día, no es necesario tenerlo en cuenta puesto que su valor es igual a la unidad; Z^* depende del nivel de confianza elegido: para un 95% de confianza Z^* toma un valor de -1,6449 y para un 99% es igual a -2.3263.

Tabla 3.- *VeR's* paramétricos individuales para un 95% de confianza

	TEF	ELE	BBVA	SAN	REP
Valor inicial	20.000€	20.000€	20.000€	20.000€	20.000€
Volatilidad diaria	2,82%	1,81%	2,35%	2,52%	2,13%
Z (95%)	1,6449	1,6449	1,6449	1,6449	1,6449
VeR individual	928,37€	595,44€	773,70€	829,96€	701,22€

De la observación de la tabla anterior se desprende que el *VeR*, así obtenido, no es más que un múltiplo de la desviación estándar; de ahí que se lo considere una extensión de la *Teoría de Carteras de Markowitz*.

Por otro lado, si agregamos todos y cada uno de los *VeR's* individuales, obtendremos, finalmente, el denominado *VeR bruto* de la cartera, o lo que es lo mismo, el *VeR* no correlacionado. Se trata pues, de una magnitud que ignora los beneficios inherentes a la diversificación en términos de reducción del riesgo.

Tabla 4.- *VeR* bruto de la cartera al 95% de confianza

	TEF	ELE	BBVA	SAN	REP
VeR individual	928,37€	595,44€	773,70€	829,96€	701,22€
VeR bruto	3.828,69€				

Si quisiéramos estimar los *VeR's* diarios con un nivel de confianza mayor, por ejemplo, un 99%, sólo tendríamos que sustituir el valor de Z^*, por 2,3263 en lugar de 1,64485. En la tabla 5, mostramos dichos cálculos.

Tabla 5.- *VeR's* diarios para un 99% de confianza

	TEF	ELE	BBVA	SAN	REP
Valor inicial	20.000€	20.000€	20.000€	20.000€	20.000€
Volatilidad diaria	2,82%	1,81%	2,35%	2,52%	2,13%
Z (99%)	2,3263	2,3263	2,3263	2,3263	2,3263
VeR individual	1.313,01€	842,15€	1.094,25€	1.173,82€	991,74€
VeR bruto	5.414,97€				

4) *Incorporación del efecto correlación entre los activos*. En la realidad, el *VeR* de una cartera no coincide con la suma de los *VeR's* individuales habida cuenta de la correlación imperfecta que suele existir entre ellos. Hasta el momento, hemos calculado un *VeR* bruto sin más y es hora de imputar el efecto de la correlación histórica en el proceso de estimación. Para ello, se hace necesario la construcción de la denominada matriz de correlación, que definíamos como:

$$\bar{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12,t} & \cdots & \rho_{1n,t} \\ \rho_{21,t} & 1 & \cdots & \rho_{2n,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1,t} & \rho_{n2,t} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

En el caso concreto de nuestra cartera, la matriz de correlación se ha obtenido a partir de los coeficientes de correlación entre las series de rentabilidades históricas individuales, tomadas de dos en dos. Recordemos que la matriz de correlación, además de cuadrada, es simétrica como ilustra la tabla 6:

Tabla 6.- Matriz de correlación, $\bar{\rho}$

	Matriz de correlación				
	TEF	ELE	BBVA	SAN	REP
TEF	100,00%	35,80%	61,69%	60,39%	34,95%
ELE	35,80%	100,00%	43,36%	49,99%	33,96%
BBVA	61,69%	43,36%	100,00%	79,29%	45,66%
SAN	60,39%	49,99%	79,29%	100,00%	44,38%
REP	34,95%	33,96%	45,66%	44,38%	100,00%

Obtenida la matriz de correlación, el denominado *VeR* diversificado o neto de la cartera se calcula como un producto matricial, es decir:

$$VeR_{cartera,t} = \sqrt{V^T \cdot \bar{\rho} \cdot V} \qquad (6)$$

siendo, $V = \begin{bmatrix} VeR_{1,t} \\ VeR_{2,t} \\ \vdots \\ VeR_{n,t} \end{bmatrix}$ el vector columna, de dimensión ($n\times1$), de los *VeR's* individuales, no diversificados, correspondientes a cada posición inicial mantenida en los distintos títulos de la cartera, es decir, $\bar{\omega} \cdot W_0$. Dicho vector se obtiene a partir del producto de matrices y escalares $V = \bar{\sigma} \cdot Z^* \cdot \bar{\omega} \cdot W_0$; $V^T = \begin{bmatrix} VeR_{1,t} & VeR_{2,t} & \cdots & VeR_{n,t} \end{bmatrix}$ es el vector transpuesto de V. Se trata de un vector fila, de dimensión ($1\times n$), que resulta del producto $V^T = W_0 \cdot \overline{\omega^T} \cdot Z^* \cdot \bar{\sigma}$.

Seguidamente, presentamos, en formato tabla, el vector de *VeR's* individuales y su transpuesto.

Tabla 7.- Vector de *VeR's* no diversificados y su transpuesto

Vector VeR's
928,37€
595,44€
773,70€
829,96€
701,22€

Vector VeR's transpuesto	928,37€	595,44€	773,70€	829,96€	701,22€

En primer lugar, si multiplicamos el vector de *VeR´s* transpuesto, de dimensión (1×5), por la matriz de correlaciones, de dimensión (5×5) obtendremos un nuevo vector producto, de orden (1×5):

$$\text{Vector producto} = V^T \cdot \bar{\rho} \qquad (7)$$

Tabla 8.- Vector producto, de dimensión (1×5)

Vector producto				
2365,10	1916,32	2582,94	2612,94	1949,49

En segundo lugar, procedemos, de nuevo, a multiplicar el vector producto resultante de la fase anterior (1×5) por el vector de *VeR's* (5×1). Como no podía ser de otra manera, el resultado de esta operación es un escalar, de dimensión (1×1), es decir:

$$\text{Escalar} = \underbrace{V^T \cdot \bar{\rho}}_{\text{vector producto}} \cdot V \qquad (8)$$

Tabla 9.- Escalar resultante del producto matricial entre el vector producto y vector de *VeR's*

Escalar	8.870.732

5) *Obtención del VeR correlacionado*. Para computar, finalmente, el *VeR*, sólo tenemos que extraer la raíz cuadrada del número obtenido en el paso anterior, como indica la fórmula 6:

$$VeR_{\text{cartera},t} = \sqrt{V^T \cdot \bar{\rho} \cdot V} = \sqrt{\text{Escalar}} \qquad (9)$$

En la siguiente tabla mostramos, a modo de resumen, las estimaciones *VeR netas o correlacionadas* para nuestra cartera de referencia, calculadas con un 95% y un 99% de confianza estadística, respectivamente. Además, incluimos una magnitud porcentual como es el *VeR relativo* a la posición, definido éste como cociente entre el *VeR* y el valor de la misma, ya que proporciona una idea más intuitiva si cabe del riesgo.

Tabla 10.- Resumen de las estimaciones *VeR* para los niveles de confianza del 95% y 99%

Nivel de confianza	
95%	
VeR	1.978,38€
Ratio VeR/Valor posición	2,98%

Nivel de confianza	
99%	
VeR	4.212,37€
Ratio VeR/Valor posición	4,21%

6) *Cálculo del CveR*. Una vez calculados los *VeR's* correlacionados para sendos niveles de confianza, procedemos a la estimación de los respectivos *CVeR's*. Para ello, debemos tener en cuenta que, bajo la hipótesis de normalidad, como es el caso, ambas medidas del riesgo son equivalentes y, de igual forma, coherentes en términos de subaditividad. En otras palabras, cuando la distribución de *Pérdidas y Ganancias* de la cartera es normal, el *VeR* y el *CVeR* son múltiplos escalares de la desviación estándar. Por consiguiente, basta aplicar la siguiente fórmula:

$$CVeR_\alpha(X) = \frac{e^{-\frac{q_\alpha^2}{2}}}{\alpha\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma_X \qquad (10)$$

De esta forma, el *CVeR* calculado para un 99% de confianza estadística se obtiene como producto de la desviación estándar y 2,67. Del mismo modo, en la estimación del *CVeR* al 95% utilizaríamos un multiplicador igual a 2,06. Bastaría, pues, repetir el mismo proceso empleado en la obtención del *VeR* pero, esta vez, incorporando estas nuevas cifras. En la siguiente tabla resumimos dichos cálculos:

Tabla 11.- Resumen de las estimaciones *CVeR* para los niveles de confianza del 95% y 99%

Nivel de confianza	
95%	
CVeR	3.718,46€
Ratio VeR/Valor posición	3,71%
Ratio VeR/CVeR	80,09%

Nivel de confianza	
99%	
VeR	4.827,05€
Ratio VeR/Valor posición	4,82%
Ratio VeR/CVeR	87,26%

La tabla anterior, además de las estimaciones *CVeR* pertinentes, hemos incorporado dos magnitudes porcentuales como son el *CVeR relativo* a la posición y el *ratio VeR/CVeR*, el cual puede proporcionar una valiosa información adicional a los gestores de riesgos pues relaciona la pérdida máxima *(VeR)* con el exceso medio *(VeR)*.

7) *Ejercicio de verificación (Backtesting)*. Llegados a este punto, realizaremos un análisis retrospectivo a partir del cual comprobar el grado

de precisión de las estimaciones obtenidas. Este tipo de práctica, más conocida por el anglicismo *Backtesting*, se articula computando el número de *excepciones* observadas dentro de una determinada ventana temporal. En otras palabras, se trata de contar el número de días en los que la pérdida real sufrida por nuestra cartera supera la estimación *VeR* y, si es el caso, comprobar el exceso medio pronosticado por el *CVeR*. Como precisamos en su momento, el período de verificación seleccionado comprende 100 días de negociación en el mercado; en particular, comienza el 2/09/2002 y finaliza el 29/01/2003. La elección de esta ventana responde, principalmente, a motivos pedagógicos, ya que nos permite establecer una relación directa con el nivel de confianza definido para la estimación *VeR*, si bien es cierto que el BIS recomienda un período mínimo de 250 días.

En cualquier caso, si hemos calculado el *Valor en Riesgo* con un 95% de confianza estadística, lo lógico es que en esos 100 días, como máximo, aparecieran 5 excepciones.

Por otro lado, para abundar en el análisis, hemos dividido dicha ventana temporal en dos períodos de 50 días, cada uno de las cuales se caracteriza por distintos niveles de volatilidad[5], esto es:

- *Período de ALTA volatilidad*: Del 02/09/2002 al 11/11/2002.
- *Período de BAJA volatilidad:* Del 12/11/2002 al 29/01/2003.

En general, todo proceso de *Backtesting* comienza siempre por calcular las pérdidas o ganancias diarias realmente obtenidas por el mantenimiento de una determinada posición de mercado. Para ello, bastará computar la diferencia entre el valor de la misma hoy y aquél correspondiente al día anterior, como muestra la tabla 12.

Tabla 12.- Pérdidas y Ganancias reales

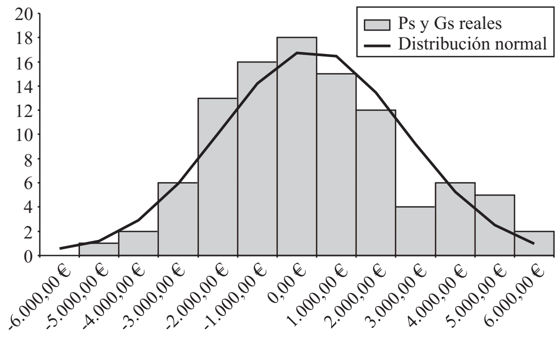
Fecha	Valor cartera	Ps y Gs
30/08/2002	100.000,00€	-
02/09/2002	97.983,82€	-2.016,18€
03/09/2002	94.109,64€	-3.874,18€
04/09/2002	94.351,48€	241,84€
05/09/2002	93.188,32€	-1.163,16€
06/09/2002	97.052,06€	3.863,73€
09/09/2002	94.638,73€	-2.413,33€

A partir de dichos datos, es posible caracterizar la correspondiente distribución de Pérdidas y Ganancias reales, que resumimos en la siguiente tabla e ilustramos en forma de histograma.

Tabla 13.- Análisis descriptivo de la distribución de Ps y Gs reales

Ganancia máxima	5.883,50€
Pérdida máxima	-5.216,45€
Promedio	-96,69€
Desviación estándar	2.330,17€
Asimetría	0,37716073
Curtosis	-0,18014379

Figura 6.- Histrograma de Ps y Gs reales versus distribución normal



FUENTE: Elaboración propia.

En segundo lugar, debemos proceder a la estimación del *VeR* a un día vista, de manera que podamos comparar si la pérdida que éste pronostica se cumple al día siguiente o no, en cuyo caso estaríamos ante una *excepción.*

Aunque, desde un punto de vista conceptual, este tipo de técnica no reviste ninguna complejidad, en la práctica, dicho ejercicio deviene, en cierta medida, tedioso pues se trata de repetir el proceso de cálculo de *VeR's y CVeR's* tantas veces como días comprende la ventana de observación.

Concretamente, en nuestro estudio hemos calculado 100 *VeR's* diarios para dos niveles de confianza estadística diferentes: un 95% y un 99%. Asimismo, hemos procedido, de igual forma, con los *CVeR's*.

A continuación, presentamos, en formato tabular, el número de excepciones detectadas en el período de 100 días para la *Metodología Paramétrica* empleada*,* diferenciando entre mediciones realizadas al 95% y 99% de confianza estadística.

Tabla 14.- Excepciones al 95% de confianza

Fecha	Ps y Gs	VeR PM 95%	CveR 95%	Excepciones 95%	Amplitud	Exceso
03/09/2002	-3.874,18€	-2.920,25€	-3.645,88€	Excepción	-953,93€	-725,64€
12/09/2002	-5.216,45€	-3.072,78€	-3.836,32€	Excepción	-2.143,66€	-763,54€
18/09/2002	-3.707,85€	-2.812,94€	-3.511,91€	Excepción	-894,92€	-698,97€
23/09/2002	-3.303,51€	-2.593,67€	-3.238,16€	Excepción	-709,84€	-644,49€
24/09/2002	-3.072,04€	-2.498,69€	-3.119,58€	Excepción	-573,35€	-620,89€
30/09/2002	-4.355,90€	-2.590,48€	-3.234,18€	Excepción	-1.765,42€	-643,70€
23/10/2002	-2.912,14€	-2.906,92€	-3.629,24€	Excepción	-5,22€	-722,32€
07/11/2002	-4.144,46€	-3.144,66€	-3.926,06€	Excepción	-999,80€	-781,40€
27/01/2003	-3.973,42€	-3.162,31€	-3.948,10€	Excepción	-811,11€	-785,79€
				PROMEDIO	-984,14€	-709,64€

Tabla 15- Excepciones al 99 de confianza

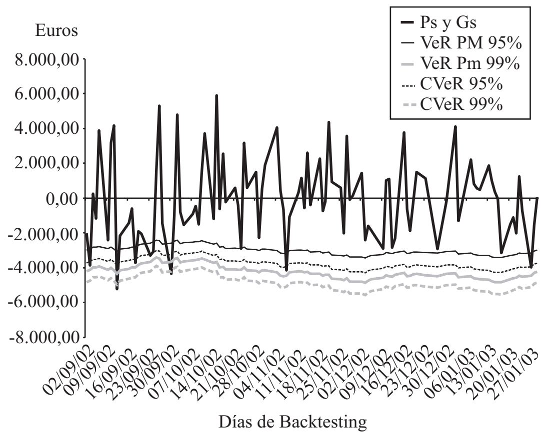
Fecha	Ps y Gs	VeR PM 99%	CveR 99	Excepciones 99%	Amplitud	Exceso
12/09/2002	-5.216,45€	-4.345,89€	-4.980,06€	Excepción	-870,55€	-634,16€
30/09/2002	-4.355,90€	-3.663,77€	-4.198,39€	Excepción	-692,14€	-534,63€
				PROMEDIO	-781,34€	-584,40€

Además, hemos computado la amplitud de tales excepciones *en términos absolutos*, o lo que es lo mismo, la diferencia, nominada en euros, por encima del nivel que representa el *VeR*, así como el exceso pronosticado, esto es, la distancia entre *VeR* y *CVeR*. En general, de las tablas anteriores podemos destacar dos hechos claramente observables:

- En primer lugar, y como no podía ser de otra manera, el número de excepciones se reduce a medida que aumenta el nivel de confianza utilizado en la estimación, o dicho de otro modo, las mediciones al 99% son más conservadoras que las realizadas al 95%.
- En segundo lugar, el número de excepciones resulta significativamente superior en períodos de alta volatilidad, representado, en nuestro análisis, por la primera subventana de 50 días, comprendida entre el 02/09/2002 y el 11/11/2002.

Para visualizar mejor estas ideas, hemos construido el siguiente gráfico donde aparecen reflejadas las series históricas de *VeR´s* y *CVeR´s* para ambos niveles de confianza, así como las Pérdidas y Ganancias, diariamente computadas, de nuestra cartera. De su observación, se desprende la existencia de excepciones cada vez que se superan las bandas correspondientes a tales estimaciones; en concreto, las más estrechas, corresponden a mediciones, tanto de *VeR* como de *CVeR*, para un 95% de confianza estadística, mientras que las más anchas se asocian a un nivel del 99%.

Figura 6.- Análisis de *Backtesting*



De la observación de las tablas anteriores, se desprende que metodología el número de *excepciones* computadas en el período de *Backtesting* supera el 5%, correspondiente al nivel de confianza establecido, a priori, en el cálculo del *VeR*. Y es que, la mayoría de dichas excepciones tienen lugar en la primera subventana temporal, comprendida entre el 02/09/2002 y el 11/11/2002, la cual se caracteriza por su alta volatilidad. Con esto se confirman dos hechos relevantes:

- La medición *VeR* funciona relativamente bien en períodos normales, es decir, de estabilidad en los mercados. Prueba de ello es que el número de excepciones detectadas en la segunda subventana disminuye considerablemente.

- La necesidad de realizar análisis complementarios del tipo *Stress-testing*, en la que se incorporen escenarios históricos de tensión a las estimaciones *VeR*.

CONCLUSIONES

- El *CVeR* constituye una magnitud de enorme interés de cara a la gestión del riesgo ya que complementa la información reportada por el propio *VeR*, convirtiéndose en un instrumento indispensable para aquellas posiciones que, en particular, presenten distribuciones asimétricas y con colas gruesas (*fat tails*) como, por ejemplo, las carteras de opciones. Sin embargo, a la hora de establecer el capital regulatorio, pudiera convertirse en una medida demasiado conservadora del riesgo.
- El ratio *VeR/CVeR* es, sin duda, una variable estratégica desde el punto de vista del control del riesgo para operadores, supervisores, gestores, accionistas, etc. En efecto, se trata de una relación entre ambas pérdidas; por un lado la que cabría esperar en condiciones normales del mercado y la que esperaríamos obtener en situaciones extremas.
- Bajo el supuesto de normalidad el *CVeR*, al igual que el *VeR* tradicional, es un múltiplo escalar de la desviación estándar y, en consecuencia, ambas cifras son equivalentes. Aún más, para niveles altos del *VeR* , el *VeR Condicional* se aproxima a dicha cifra, es decir:

$$CVeR = E\,[X\,/\,X > VeR] \approx VeR$$

- En casos de no normalidad, debemos hacer especial hincapié en la necesidad de realizar una correcta estimación de la cola de la distribución; recordemos que el *CVeR* contempla la pérdida más allá del *VeR* como una esperanza condicional. En este sentido, la aplicación de la *Teoría del Valor Extremo* juega un papel fundamental. Para colas gruesas (*fat tails*) y *VeR´s* calculados para niveles de confianza altos, por ejemplo del 99%, la función de distribución del exceso, una vez superado el *VeR*, se aproxima bien por una distribución de *Pareto generalizada*.

NOTAS

1. Trabajo presentado y defendido en la *I[a] Reunión de Investigación en Seguros y Gestión de Riesgos (RIESGO2005)*, que tuvo lugar los días 6 y 7 de octubre de 2005 en Barcelona.
2. Para una mejor definición del concepto de convexidad, remitimos al lector a Rockafellar (1970).
3. La volatilidad diaria es multiplicada por la raíz cuadrada de 250.
4. Remitimos al lector a la figura 5.

BIBLIOGRAFÍA

ACERBI, C.; NORDIO, C.; SIRTORI, C. (2001): *Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management*. (Mimeo). Milán: Axabank.

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER J.; HEATH, D. (1997): “Thinking Coherently”, *Risk*, vol. 10, núm. 11, (noviembre), pp. 68-71.

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER J.; HEATH, D. (1999): “Coherent Measures of Risk”, *Mathematical Finance*, vol. 9, núm. 3, (julio), pp.203-228.

BASI, F.; EMBRECHTS, P.; KAFETZAKI, M. (1998): “Risk Management and Quantile Estimation”, en: *A Practical Guide to Heavy Tails*, pp. 111-130. Boston: Birkhaeuser.

CARRILLO, S.; LAMOTHE, P. (2001): Nuevos retos en la medición del riesgo de mercado”, *Perspectivas del Sistema Financiero*, núm. 72.

EMBRECHTS, P.; RESNICK, S.; SAMORODNITSKY, G. (1998): “Living on the Edge”, *Risk Magazine*, (January), pp. 96-100.

EMBRECHTS, P.; RESNICK, S.; SAMORODNITSKY, G. (1999): “Extreme Value Theory as a Risk Management Tool”, *North American Actuarial Journal*, núm. 3, pp. 30-41.

LONGIN, F. (2001): “Beyond the VaR”, *Journal of Derivatives*, núm. 8, pp. 36-48.

MORGAN, J.P. (1995): *Riskmetrics Technical Document*. 3ª ed. New York.

ROCKAFELLAR, R.T. (1970): “Convex Analysis”, *Princeton Mathematics*, vol. 28. Princeton University Press.

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S. (1999): *Optimization of Conditional Value at Risk*. (Disponible en http://www.ise.ufl.edu/uryasev/cvar.pdf).

URYASEV, S. (2000): “Conditional Value at Risk: Optimization Algorithms and Applications”, *Financial Engineering News*, Issue 14, (febrero), pp. 1-6.