

# Reflexiones sobre modelos matemáticos y decisión jurídica

Por JOSE M. ROMERO MORENO y LUIS J. PEREDA ESPESO

Madrid

*A la memoria de Agustín de Asís*

## I. CONSIDERACIONES PREVIAS

### 1. LAS MATEMATICAS Y LAS CIENCIAS SOCIALES

La matematización de las ciencias sociales es un viejo sueño, casi tan antiguo como la historia real de los dos términos asociados. No es momento de hacer un balance histórico pero desde Pitágoras (1) hasta Samuelson (2), Coleman (3), Goldberg (4), se ha producido un constante movimiento —de mayor o menor intensidad— en favor de expresar matemáticamente las leyes de las Ciencias sociales. Movimiento en el que —bien es cierto— el Derecho no ha estado representado más que de una muy escasa forma. La historia sólo nos ofrece —aparte de alguna pura formulación de propósitos ciertamente utópicos— el ejemplo más lejano de Leibniz (5), quien se plantea de modo secundario su aplicación a la ciencia jurídica, por cuanto la combinatoria es un modelo matemático aplicable a cualquier rama del saber.

La exposición que hace precisamente Leibniz puede plantearnos con toda claridad los dos tipos de sueños o deseos matemáticos de los científicos sociales (6). El autor racionalista distingue entre:

---

(1) Cfr. *Los filósofos presocráticos*, I, 147 y ss., 1978, Gredos, Madrid.

(2) SAMUELSON, *Foundations of Economic Analysis*, Harvard, Ec. Studies, vol. 80, 1956.

(3) COLEMAN, *Introduction to Mathematical Sociology*, 1964, New York, Free Press.

(4) GOLBERG, *Introduction to Difference Equation: With Illustrative Examples from Economics, Psychology and Sociology*, 1958, New York, Wiley.

(5) Cfr., especialmente, *De arte combinatorio*, en la edición de Gerhardt de 1875-90 en el volumen IV, 27-102.

(6) Cfr. la exposición sobre el tema en BOCHENSKI, *Historia de la lógica formal*, 1976, Madrid, Gredos, págs. 189 y ss., COPLESTON, *Historia de la filosofía*, 1975, Barcelona, Ariel, págs. 252 y s. del V tomo.

- a) «alfabeto del pensamiento»: por el que «mediante la combinación de letras de este alfabeto» se asigna a cada idea simple que componen una compleja un signo (*nota*) para obtener luego la solución de estos problemas mediante su combinación.
- b) «*mathesis universalis*»: se trataría de emplear el cálculo para las deducciones no sólo para la pura formulación. De aquellas formulaciones del álgebra del pensamiento y su combinación, deben deducirse posteriormente —por medio de este cálculo— leyes formales generales.

Se ha iniciado así los dos caminos posibles de la expresión matemática de la ciencia social. Veamos cuál es el desarrollo de cada una de estas líneas y su aplicación al Derecho.

## 2. LA LOGICA FORMAL (7)

En las ciencias sociales, en general, y en el Derecho en particular, la comunicación de las ideas juega un papel esencial. La preocupación científica por esta materia de la comunicación jurídica no es nueva (8) y se integra por análisis psicolingüísticos, semióticos, retóricos y también lógicos.

La lógica en este amplio mundo desempeña el papel que ya adivinó Leibniz, y que en palabras de Steinhauer supone «*el uso de un lenguaje peculiar* análogo al de las matemáticas (y de ahí los nombres de «lógica matemática», «lógica simbólica», «logística», «lógica algorítmica» dados a la lógica contemporánea». Las ventajas de esta utilización están en que «... los elementos de este lenguaje se definen de una manera muy precisa e, incluso si las técnicas utilizadas varían (axiomas, reglas, definiciones, matrices), la lengua así creada ofrece la ventaja de ser ideográfica (y, así, independiente de las lenguas naturales) y unívoca (cada signo tiene un único sentido establecido con todo rigor). El lenguaje lógico artificial es, de este modo, un factor de comunicación de un gran valor...».

Este valor de comunicación supone además una posibilidad de operar con los signos y símbolos de un modo análogo al cálculo matemático, y de este modo, llegar a establecer leyes y principios que justifiquen o den razón del proceso discursivo. *La justificación del discurso* constituye la segunda gran misión de la lógica formal.

Hay, pues, una primera —histórica y conceptualmente hablando— aproximación posible de las matemáticas a las ciencias so-

(7) Existe una amplia y conocida bibliografía sobre lógica formal, así como de esta materia dedicada al Derecho. Remitimos a este fin a las obras clásicas de Kalinowski o a la conocida de Steinhauer.

(8) Cfr. P. e., PROBER, W., «Law, Science and Communications: Some New Facets to Empiricism», *Jurimetrics Journal*, 1969 (Dic) 51-57.

ciales, y a la peculiar ciencia del Derecho (9): la lógica matemática. Esta aproximación supone globalmente, según se ha visto:

- 1) la sustitución del discurso lingüístico.
- 2) realizado en paralelo o en analogía como correspondencia rigurosa biunívoca.
- 3) articulando un esqueleto axiomático de apoyo.

La visión matemática se completa —en la lógica— por la posibilidad de utilizar el cálculo para la construcción de una estructura operativa significativa por medio del cálculo. La lógica matemática hace posible expresar ideas, conceptos, leyes; incluso llega a ofrecer soluciones a problemas formales planteados significativamente por medio de un cálculo, al que hemos llamado esqueleto axiomático de apoyo.

La mediación indispensable es la cuantificación de la realidad, que se hace de modo formal, esto es, dando valores a los términos lingüísticos y a sus relaciones, que se toman y aceptan como son. En esa formalidad se justifican por coherencia los enlaces producidos. Si, por ejemplo, formulamos  $S_m = P_m$  referido a «Juan es inquilino», la lógica no hace más que aceptar una formulación que consiste en dos términos: Juan e inquilino, y una relación. Ello a su vez supone que  $S_u = P_e$ , esto es, inquilino es poseedor a título de arrendamiento, y a su vez  $S_u = P_a$  (inquilino paga renta), etc. La estructura lógica llegará a un «cuasi» utópico resultado: a desechar por incoherente  $S_u = P_x$ , esto es, por ejemplo, «inquilino adquiere la propiedad», puesto que la estructura significativa se ha ajustado a una estructura normativa en cuyo juego sistemático no entra la posibilidad de que inquilinato se confunda con compraventa.

Las ventajas de la lógica son indudables, y aunque no se trate ahora de exponerlas con detalle, sí conviene dejar indicadas algunas, dado que se trata en este trabajo de analizar otros posibles caminos de matematización operativa jurídica.

Podemos enumerar como ventajas (10):

1. En primer lugar ofrecer un esquema teórico que sirva para profundizar en nociones fundamentales del Derecho diferentes a las de facultad u obligación.
2. En segundo lugar, y desde el punto de vista de la comunicación:
  - a) No sólo en el campo notablemente creciente de la informática jurídica puesto de relieve hasta la saciedad científica y no científica.

(9) Recordamos a este respecto el carácter normativo de la Ciencia jurídica, así asumido por un lógico como es KALINOWSKI, *Querelle de la science normative* (Une contribution a la theorie de la science), 1969, Paris, Pichon-Durand-Aurias, cuya traducción italiana *Dispute sulle scienza normativa*, 1982, Padova, Cedam es la utilizada por los autores.

(10) STEINHAUER, *La logique au service du droit*, 1979, Fribourg, Ed. Universitaires, págs. 185 y ss.

- b) También referida a la interpretación o a la teoría de las definiciones.
- c) Operativamente, la coherencia sistemática puede verse ampliamente reforzada en la legislación, en evitación de las falsas relaciones, antinomias, etc.

La más optimista visión de la lógica formal aplicada al Derecho no puede, sin embargo, trascender la cuantificación de la formalidad y como mucho, cuantificar los resultados. Lo que en ningún caso estará en disposición de realizar es calcular proyectos, esto es, hacer predicciones, establecer estrategias. Para la proyectiva son necesarias otras aproximaciones matemáticas.

### 3. OTRAS APLICACIONES MATEMATICAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. MATEMATICAS DEL COMPORTAMIENTO

Luce (11) ha puesto de relieve que «... estas aplicaciones... no han tenido tanto éxito como en la física. Las razones son muchas. Entre ellas: el esfuerzo realizado ha sido mucho menor; los conceptos empíricos básicos y las variables no han sido aislados y purificados en el mismo grado; las matemáticas evolucionaron con la física y hasta cierto punto se ajustaron a las necesidades de ésta, por lo que muy bien pueden encajar menos en los problemas de las ciencias sociales si estos problemas son de características básicamente diferentes a los de la física; en un problema típico de las ciencias sociales aparecen involucradas más variables que las acostumbradas a manejar en física; finalmente los científicos sociales no están en general bien preparados en matemáticas...».

A pesar de todo ello, un rápido análisis ofrece algunas posibilidades de las matemáticas cada vez más desarrolladas y capaces de integrar planteamientos más complejos con datos cualitativos e interrelacionados, aptos para responder a retos de las ciencias sociales.

Antes de entrar en las que propiamente podían ser directamente aplicados al Derecho, cabe indicar alguno de estos aspectos matemáticos, cuya aplicación ya ha sido contrastada.

- A) A partir de la generalización y desarrollo del álgebra, y de las teorías de las relaciones y ordenaciones, se han llegado a las llamadas *teoría de los grafos*, esto es, las operaciones matemáticas referentes a las relaciones entre elementos con sus múltiples aplicaciones a los problemas socio-psicológicos y sociológicos, especialmente en temas

---

(11) LUCE, P. Duncan, «Matemáticas», voz en *Enciclopedia de las Ciencias Sociales*, 1975, Madrid, Aguilar.

de representación de métodos matemáticos de representación de los diferentes modos de dependencias entre personas (12).

- B Desarrollo de los sistemas de probabilidades, y de los modelos matemáticos aleatorios y estadísticos.
- C Aplicación de la programación lineal, esto es, el determinar matemáticamente el máximo o el mínimo de una función bajo ciertas condiciones que normalmente se describen por medio de desigualdades (13), cuya aplicación a los problemas económicos de asignaciones están muy cerca de problemas jurídicos.

Las grandes innovaciones en el camino abierto por este tipo de tratamiento matemático se centra en la posibilidad de ampliar el alcance de las operaciones con grandes números. En efecto, los ejemplos recién indicados suponen un paso importante en la vía del cálculo programático, con asunción de las variables modales cualitativas.

La estadística, que era junto a la lógica la otra gran aplicación cuantitativa a las ciencias sociales —y en concreto al Derecho— supone un sistema de análisis que hace insignificante elementos decisivos en lo humano cuales son los conceptos cualitativos de decisión, libertad, interés, contraposición, y sobre todo, proyecto, esto es, por ejemplo, elección de alternativas de conducta ante otro sujeto.

Es en esta materia donde han de plantearse las que pueden ser metodologías cuantificadoras significativas para el mundo del Derecho, si es que queremos añadir un esfuerzo más —y que sea rentable— a los progresos realizados por lógicos y estadísticos, en íntima conexión con los juristas normativistas y sociólogos o psicólogos. Sin perjuicio de continuar aquellos progresivos tratamientos científicos, se abre un nuevo campo: el de la cuantificación de la decisión jurídica.

#### 4. MATEMATICAS Y DECISION JURIDICA

Sin querer hacer reduccionismo científico, hay una cierta coincidencia en afirmar que en el Derecho hay una constante presencia de la decisión de voluntad, esto es, el acto de la voluntad por medio de la cual enlazamos el estado de ambigüedad —producido por una serie de opciones alternativas— con el acto de selección por medio de un conjunto de operaciones cognoscitivas inambiguas e identificables (14) y que tiene una significación normativa,

(12) KEMENY, John G.; SNELL, J. Laurie, *Mathematical Models in the Social Sciences*, 1962, Boston. Giun.

(13) DORFMAN, Robert; SAMUELSON, Paul; SOLOW, Robert, *Lineal Programming and Economical Analysis*, 1958, Mc. Graw-Hill, New York.

(14) WHITE, D. J., *Teoría de la decisión*, 1979, Madrid, Alianza Universidad.

que consiste en provocar una consecuencia prevista en el ordenamiento.

La decisión jurídica tiene muchas manifestaciones genéricas y específicas a las que luego habrá de hacerse mención. Ahora indicaremos cuál ha sido el tratamiento matemático de este tipo de conductas, teniendo en cuenta que las decisiones pueden ser analizadas:

- como fenómenos precisos en su consecuencia: la decisión es una elección entre preferencias, dadas una información, el resultado que puede producirse, la utilidad del resultado, y la probabilidad de que tal resultado llegue a producirse;
- como fenómenos enlazados precisamente a otros análogos, pero procedentes de sujetos distintos, cuyas decisiones, de las características ya señaladas, se concatenan hasta formar sistemas de conducta interrelacionadas y previsibles.

Los puntos de partida de estas dos teorías se sitúan en la matematización de dos conceptos y dos principios:

- utilidad;
- probabilidad;
- todo resultado de una decisión posee un valor para un sujeto;
- hay posibilidad de medir hasta qué punto parece probable a un sujeto un resultado particular, a partir de una decisión particular.

¿Qué relación existe entre ellos, qué matices tienen y cómo se recogen matemáticamente?

#### A) *Utilidad y utilidad esperada*

En 1944, y con ocasión directa de la elaboración de la Teoría de los Juegos, von Neumann y Morgenstern (15) propusieron una idea que hizo mensurable la utilidad. Se parte de la distinción realizada ya en el siglo XVIII por los utilitaristas británicos entre valor objetivo o precio y valor subjetivo o utilidad. De acuerdo con ello, establecen una posible fórmula de la utilidad esperada más que de la simple utilidad. En esta fórmula más perfecta se utiliza como variable no el pago probable (que llaman  $V_{ij}$ ), sino la utilidad del pago ( $u(V_{ij})$ ) que en el caso de una decisión  $i$  proporcionará el resultado  $j$ .

Empíricamente sabemos que  $V_{ij} \geq u(V_{ij})$ , esto es por ejemplo, que los resultados efectivos de las compañías de seguros son más amplios que las cantidades que pagan a los asegurados, puesto que además de ellas satisfacen otros gastos diferentes y adicionales a las indemnizaciones por siniestros.

(15) VON NEUMANN, MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*, 1944, New York, Wiley; cfr. DAVIS, *Teoría de los juegos*, 1979, Madrid, Alianza Universidad.

Las formulaciones matemáticas referidas llegaron a ser comprobadas y desarrolladas por experimentos abstractos (Mostelless y Nogel, 1951; Davidson y Suppes, 1957; Luidmand, 1965; o Treisky, 1964) (16).

### B) Probabilidad y probabilidad estimada

La conversión matizada de la probabilidad en estimación medible de la probabilidad se debe a Savage (17). La probabilidad es una opinión sobre el grado de probabilidad de un suceso.

El teorema de Bayes es el fundamento de la posible cuantificación de esta «espectativa». Se supone, según él, que la suma de probabilidades estimadas suman 1, y pone en relación una hipótesis H, la probabilidad de que en algún modo sea cierto, un dato con probabilidad incondicional P(D) y con probabilidad condicional de producirse si se da la hipótesis H (expresada así P(D/H), a la vista de esto la inicial probabilidad de H: P(H)) debe ponerse en relación con el dato D (P(H/D)). Bayes estableció esta ecuación:

$$P(H/D) = \frac{P(D/H) \cdot P(H)}{P(D)}$$

El desarrollo se obtiene con la consideración de dos hipótesis diferentes y el establecimiento de una ecuación relacionadora.

Este teorema obtuvo también su comprobación empírica (18) y se une a la elaboración sobre la utilidad, con la rentabilidad teórica de una fundamentación en torno a la racionalidad, conservadurismo o audacia de las decisiones humanas inmediatamente aplicables al mundo económico, p. e., de la psicología, hablando genéricamente.

La decisión jurídica supone, necesariamente, sin embargo, una decisión respectiva de otro y otros sujetos como respuesta a la asumida por el propio sujeto. La decisión jurídica supone así, pues:

- comportamiento de dos o varios intervinientes;
- intereses opuestos o paralelos en cada uno de ellos, que tratarán de optimizar sus esfuerzos;
- con la necesaria mediación de un cierto equilibrio;
- para la obtención de un resultado que no depende sólo de la propia decisión, ni de la naturaleza, sino también de la decisión de los otros participantes.

(16) Cfr. sus descripciones en la voz *Decisiones*, de la *Enciclopedia de las Ciencias Sociales* cit.

(17) SAVAGE, Leonard J., *Foundations of Statistics*, 1954, New York, Wiley.

(18) EDWARDS, en multitud de artículos, sólo o con la colaboración de PHILLIPS, en bibliografía recogida en *Enciclopedia de las Ciencias Sociales*, loc. cit.

En toda decisión jurídica es necesaria una *estrategia*, que se define por todas y cada una de las características señaladas. El modelo matemático adecuado es el conocido como *teoría de los juegos* (19).

## II. TEORIA DE JUEGOS

### 5. CUESTIONES BASICAS

La teoría de los juegos trata de la solución de las llamadas situaciones antagónicas, y en la que existen bandos opuestos; y el resultado de cualquier acción de uno de los bandos depende, en parte, de las acciones del otro.

Se pretende mediante una serie de modelos simplificados elaborar cursos de acción racionales, para los bandos opuestos. Dichos modelos reciben el nombre de juegos.

En este trabajo nos referiremos al modelo teórico extrapolable de modo más fácil: juegos de suma cero. Un juego es suma cero, si la suma de las ganancias es cero, es decir, un bando pierde exactamente lo que el otro gana. Todo juego de suma diferente a cero puede simplificarse concibiendo un jugador  $n + 1$ , que en realidad puede ser, p. e., la colectividad, etc....

El juego se realiza mediante jugadas masivas de cada uno de los bandos; las jugadas pueden ser de dos tipos:

- a) Personales: cuando son fruto de una elección consciente por parte de uno de los jugadores.
- b) Aleatorias: la elección es el resultado de algún evento aleatorio (lanzamiento de una moneda, etc.).

Cuando en un juego cada participante al hacer una jugada, conoce los resultados de todas las jugadas hechas previamente, sean éstas personales o aleatorias, se llama juego de información perfecta.

Por estrategia se entiende el conjunto de reglas que dictaminan las elecciones de un determinado jugador, para todas las situaciones que se presenten en el curso de un juego. Un juego puede ser finito o infinito, dependiendo del número de estrategias posibles.

Un juego  $m \times n$  es aquél con dos jugadores A y B, tal que el primero tiene  $m$  estrategias posibles, y el B  $n$ .

En el caso de que el juego no tenga jugadas aleatorias, una vez que cada uno de los jugadores ha elegido una estrategia en concreto (A  $i$  y B  $j$ ), queda determinado un resultado concreto que podemos indicar con la notación  $a_{ij}$ . En el caso de que

---

(19) DAVIS, op. cit. HARSANYI, John, *Decisional Behaviour and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations*, Cambridge, Univ. Press, 1977; PONSSARD, *Logique de la negetiation et Theorie des Jeux*, París, 1977.



existan jugadas aleatorias el resultado es una cantidad aleatoria, y dependerá del desenlace de todas las jugadas aleatorias. En este caso, a priori, se puede tomar como ganancia el valor promedio de las ganancias, para todos los resultados posibles de las jugadas al azar.

Esto implica que podemos definir una matriz de ganancias tal, que a cada par de estrategias de cada uno de los oponentes le corresponde un resultado determinado. Dicha matriz puede designarse con el símbolo //  $a_{ij}$  //.

A \ B	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$
$A_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$
$A_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$
$A_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$

Ahora bien, la cuestión se complica, ya que una vez que se han realizado determinadas jugadas el oponente puede descubrir nuestra estrategia y adoptar otra nueva, de forma que el resultado le sea siempre favorable.

De esta forma puede ser necesario adoptar estrategias mixtas, que son aquéllas en la cual las estrategias puras disponibles se combinan al azar, aunque en una proporción definida.

La teoría de los juegos pretende encontrar una estrategia óptima, es decir, aquélla que garantiza a un jugador la máxima ganancia media posible. Ahora bien, ello supone un comportamiento racional por parte del oponente.

## 6. LA SELECCION DE ESTRATEGIAS

a) *El principio mini-max*

Si nos fijamos en la matriz definida anteriormente a una estrategia  $A_i$  del jugador A, el jugador B puede haber adoptado cualquiera de las  $n$  que tiene a su disposición.

Es decir, que dada una estrategia  $A_i$ , el número de resultados posibles son  $n$ :  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ .

Denominamos  $\alpha_i$  al menor de estos números, es decir,

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

Pues bien, la estrategia óptima es aquella para la cual  $\alpha_i$  es un máximo. Es decir, aquella estrategia cuyo  $\alpha$  cumple la siguiente condición:  $\alpha = \max_i \alpha_i$ .  $\alpha$  es la ganancia máxima que puede ser garantizada en el caso de seguir una sola estrategia, no importa qué estrategia adopte el oponente; podemos estar seguros de ganar al menos  $\alpha$ .

Ahora bien, como suponemos una actitud racional por parte de nuestro oponente, él está interesado en minimizar nuestras ganancias. Puesto que estamos en un juego de suma cero, es decir, lo que gana uno lo pierde el otro, él estará interesado en que  $a_{ij}$  sea lo más pequeño posible.

Aplicando el principio anteriormente descrito, la estrategia óptima para nuestro oponente es aquella que está ligada al siguiente valor:

$$\beta = \min_j B_j = \min_j \max_i a_{ij}$$

La estrategia óptima para el oponente es, por tanto, aquella que garantiza que la ganancia del jugador A nunca sea superior a  $\beta$ , no importa lo que haga. El principio de adoptar las estrategias más conservadoras se llama «principio minimax».

b) *Puntos silla de montar.*

Existen, sin embargo, juegos para los cuales las estrategias minimax son estables. Se trata de juegos cuyos valores inferior y superior son iguales, es decir:

$$\alpha = \beta$$

Este valor se llama valor de juego, y se designa con la letra  $V$ . A este punto, también se le llama punto silla de montar.

Entonces, dado un juego con estas características, si cualquiera de los jugadores se adhiere a una estrategia óptima, mientras

que el otro no lo hace, entonces el jugador que se sale de una estrategia óptima nunca puede ganar; en el mejor de los casos, su ganancia seguirá la misma, en el peor, su pérdida será mayor.

En estos casos existe un equilibrio, y cada jugador deberá adoptar la estrategia óptima, aun cuando conozca de antemano la elegida por el oponente.

Pues bien, se ha demostrado que todo juego con información perfecta tiene un punto de silla, y por lo tanto una solución. Si el juego de información perfecta sólo contiene jugadas personales, el uso de las estrategias óptimas determina unívocamente la ganancia, que es igual al valor del juego. En este sentido el ajedrez tiene un punto silla de montar, y por lo tanto una solución que determina las estrategias óptimas para ambos bandos, aunque el número de combinaciones es tan grande que hasta este momento no ha podido ser calculado.

c) *Juegos sin punto silla de montar; estrategias mixtas; teorema fundamental*

La mayor parte de los juegos no tienen silla de montar, es decir, los valores inferior y superior son desiguales.

La pregunta que cabe hacerse entonces es si adoptando algún tipo de estrategia mixta tal como las definíamos al principio, es posible obtener una ganancia promedio superior a  $\alpha$ .

Entonces llegamos al siguiente teorema: si se admiten las estrategias mixtas, así como las puras, todo juego finito tiene por lo menos una solución. Es decir, para todo juego finito existe una pareja de estrategias óptimas, tales que la ganancia promedio es igual al valor del juego; y que si cualquiera de los dos jugadores se aparta de su estrategia óptima (mientras que el otro se adhiere a la suya), sólo puede perder. Dicho valor se encuentra comprendido entre los valores inferior y superior del juego:  $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ .

d) *Uso de estrategias mixtas*

Dadas tres estrategias puras A1, A2 y A3 una estrategia mixta consiste en la aplicación de las mismas con las siguientes probabilidades: P1, P2 y P3, siendo  $P1 + P2 + P3 = 1$ . Dicha estrategia podemos escribirla de la siguiente manera:

$$S_A = \begin{cases} A1 & A2 & A3 \\ p1 & p2 & p3 \end{cases}$$

En el caso del oponente:

$$S_B = \begin{cases} B1 & B2 & B3 & B4 \\ q1 & q2 & q3 & q4 \end{cases}$$

Dado un conjunto de estrategias puras, se denominan convenientes a aquéllas que se usan en la estrategia mixta.

Llegamos entonces a otro teorema:

Si uno de los jugadores se adhiere a una estrategia mixta óptima SA (SB), entonces la ganancia se mantendrá igual al valor del juego, V, sin importar lo que haga el otro jugador, siempre que él sólo use estrategias convenientes.

## 7. SOLUCIONES DE JUEGOS DE $2 \times 2$ Y JUEGOS $2 \times N$

### a) Simplificación de matrices

Cuando un juego  $m \times n$  no tiene punto de silla de montar, puede ser difícil encontrar una solución.

Este problema puede ser solucionado, indicando el número de estrategias, concretamente:

- a) Aquéllas que están duplicadas.
- b) Aquéllas que son dominadas.

Por ejemplo, en el caso de la siguiente matriz:

A \ B	B1	B2	B3	B4
A1	1	2	4	3
A2	0	2	3	2
A3	1	2	4	3
A4	4	3	1	0

las estrategias A1 y A3 son idénticas, y además la estrategia B3 es dominada por la B4, con lo cual nos queda lo siguiente:

A \ B	B1	B2	B4
A1	1	2	3
A4	4	3	0

b) Solución de un juego  $2 \times 2$

Si el juego no tiene un punto de silla, es decir,  $\alpha \neq \beta$ , entonces siendo la matriz:

	B		
A		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>
A <sub>1</sub>		A <sub>11</sub>	A <sub>12</sub>
A <sub>2</sub>		A <sub>21</sub>	A <sub>22</sub>

Habrà de encontrarse una estrategia mixta óptima  $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix}$  que cumple las propiedades antes descritas, y por tanto:

$$a_{11} P_1 + a_{21} P_2 = V$$

$$a_{12} P_1 + a_{22} P_2 = V$$

$$P_1 + P_2 = 1, \text{ luego despejando } P_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{12} - a_{21}};$$

$$P_2 = 1 - P_1.$$

Una vez hallados  $P_1$  y  $P_2$  obtendremos  $V$ .

8. RESOLUCION DE JUEGOS  $M \times N$ . SOLUCION POR MEDIO DE PROGRAMACION LINEAL

A tiene sus estrategias  $A_1, A_2 \dots \dots \dots A_m$

B tiene sus estrategias  $B_1, B_2 \dots \dots \dots B_n$

Una vez obtenida la matriz de ganancias  $//a_{ij}//$  tenemos que calcular la solución del juego, es decir, las estrategias mixtas para cada jugador

$$S_A = \left\{ \begin{matrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ P_1 & P_2 & \dots & P_m \end{matrix} \right\}$$

$$S_B = \left\{ \begin{matrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{matrix} \right\}$$

tal que  $P_1 + P_2 + \dots \dots \dots + P_m = 1$

$$q_1 + q_2 + \dots \dots \dots + q_n = 1$$

Nuestra ganancia óptima debe garantizarnos una ganancia que sea por lo menos  $V$  para cualquier acción de nuestro oponente, y que sea igual a  $V$  para su estrategia óptima  $S_B^*$ . De modo semejante, la estrategia óptima  $S_B^*$  del oponente debe garantizarle una ganancia que no sea mayor que  $V$  en cualquier circunstancia, y que sea igual a  $V$  para nuestra estrategia óptima  $S_B^*$ .

Luego para  $S_B$  se cumple que:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} P_1 + a_{21} P_2 + \dots + a_{m1} P_m &\geq V \\ a_{12} P_1 + a_{22} P_2 + \dots + a_{m2} P_m &\geq V \\ \dots &\dots \\ a_{1n} P_1 + a_{2n} P_2 + \dots + a_{mn} P_m &\geq V \end{aligned} \right\}$$

Siendo  $E_1 = \frac{P_1}{V}$ ,  $E_2 = \frac{P_2}{V}$  .....  $E_m = \frac{P_m}{V}$

obtenemos:

$$\Phi \left\{ \begin{aligned} a_{11} E_1 + a_{21} E_2 + \dots + a_{m1} E_m &\geq 1 \\ a_{12} E_1 + a_{22} E_2 + \dots + a_{m2} E_m &\geq 1 \\ \dots &\dots \\ a_{1n} E_1 + a_{2n} E_2 + \dots + a_{mn} E_m &\geq 1 \end{aligned} \right.$$

donde  $E_1$  y  $E_2$  .....  $E_n$  son números no negativos

$$\text{y } E_1 + E_2 + \dots + E_m = \frac{1}{V}$$

la ganancia garantizada ha de ser máxima, luego nuestro problema consiste en hallar los números no negativos  $E_1, E_2$  .....  $E_m$  que satisfacen el conjunto de ecuaciones  $\Phi$ , tales que

$$\Phi = E_1 + E_2 + \dots + E_m \text{ es mínimo.}$$

Este problema se soluciona mediante el sistema de programación lineal que no explicaré aquí, y que hoy día es fácilmente manejable a través de los muchos paquetes de «software» existentes en el mercado.

### 9. METODOS PARA RESOLVER ALGUNOS JUEGOS INFINITOS

Un juego infinito es un juego en el cual por lo menos uno de los jugadores tiene un número infinito de estrategias posibles.

a) *Funciones ganancia*

Siendo las estrategias posibles del jugador A las definidas por los valores de una variable X, y lo mismo para el jugador B con respecto a la variable y, la matriz de ganancias está definida por una función  $f(x, y)$  que recibe el nombre de función ganancia.

El primer paso consiste en hallar el valor inferior del juego mínimo  $f(x, y)$ , y a continuación hallar el valor de x, para el cual éste es un máximo.

$$\alpha = \max_x \min_y f(x, y)$$

Análogamente se encuentra el valor superior del juego

$$\beta = \min_y \max_x f(x, y)$$

Si existe un punto de silla, entonces  $\alpha = \beta = V$ , que consiste en la aplicación de las estrategias puras  $X_0$  e  $Y_0$ .

Cuando no existe punto de silla  $\alpha \neq \beta$ , la solución del juego debe consistir en estrategias mixtas. Una estrategia mixta para un juego infinito es una distribución de probabilidades para las estrategias X e Y, consideradas como variables aleatorias. Esta distribución puede ser continua y definida por las densidades de probabilidad  $f_1(x)$  y  $f_2(y)$ , o puede ser discreta, en cuyo caso las estrategias óptimas consistirán de un número de estrategias puras elegidas, con las probabilidades correspondientes.

b) *Ejemplo*

El bando A le está disparando a un avión de B. El avión puede hacer una maniobra evasiva, describiendo una trayectoria cuya curvatura está dada por algún valor del parámetro y entre  $y = 0$  para un vuelo en línea recta, e  $Y = Y \text{ máx.}$  para el círculo de menor radio posible, a lo largo del cual puede volar. Hacemos  $Y \text{ máx.} = 1$ .

Contamos con un dispositivo de puntería automático que requiere se haga alguna suposición referente a la trayectoria del vuelo del avión, durante el tiempo de recorrido del proyectil. El rango de las hipótesis posibles puede expresarse como todos los valores posibles del parámetro x entre 0 y 1. Nuestro propósito es derribar el avión enemigo. El propósito de nuestro oponente es el de evadir nuestro fuego. Puede demostrarse que para X e Y dados, la probabilidad de dar en el blanco es aproximadamente la función ganancia

$$f(x, y) = e^{-k(x-y)^2}$$

donde e es un número irracional, aproximadamente igual a 2,718.

El juego no tiene punto de silla ( $B = 1$  y  $y = e^{-k/4}$ ).

Para valores muy pequeños de  $K$ , la función  $e^{-k(x-y)^2}$  es aproximadamente igual a  $1 - k(x-y)^2$  para  $0 \leq x \leq 1$  y  $0 \leq y \leq 1$ , de ahí que se comporte como la función  $-(x-y)^2$ . Así, para  $k$  pequeña, nuestra estrategia óptima es, aproximadamente, la estrategia pura  $x = \frac{1}{2}$ , y la estrategia óptima para nuestro oponente es, apro-

ximadamente,  $S_B^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ - & - \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Esto significa que siempre debemos fijar nuestro dispositivo de puntería en  $x = \frac{1}{2}$ , y nuestro oponente debe realizar la máxima maniobra evasiva, la mitad del tiempo, y hacer el vuelo normal en el tiempo restante.

Puede probarse que esta solución es válida, incluso si  $K$  no es muy pequeña, siempre que  $k \leq 2$ , puesto que la ganancia promedio contra la estrategia

$$S_B^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ - & - \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ es } f(x) = \frac{1}{2} (e^{-kx^2} + e^{-k(1-x)^2}),$$

si usamos la estrategia  $x$ , y ésta tiene un máximo único  $f(x) = e^{-k/4}$  en  $x = \frac{1}{2}$  para toda  $k \leq 2$ . Por tanto, usando la estrategia  $S_B^*$ , nuestro oponente puede garantizar una ganancia no mayor que  $\alpha$ , y es evidente que  $\alpha$  (el valor inferior del juego) y el valor del juego  $V$  deben ser iguales  $\alpha = V = e^{-k/4}$ , por lo tanto  $S_B^*$  debe ser una estrategia óptima.

### III. LA APLICACION A LA DECISION JURIDICA

#### 10. SOBRE LA APLICACION DE LA TEORIA DE JUEGOS A LA DECISION JURIDICA

Partimos de la base ya establecida de que el mundo del Derecho está lleno de decisiones jurídicas de muchas clases. Así, el mundo de la legislación no es sólo el establecimiento de mecanismos que optan por una pauta posible entre varias de ellas sobre un problema o conjunto de situaciones fácticas planteadas. El tratamiento técnico-jurídico de la legislación desde un punto de vista abstracto se ha detenido en multitud de ocasiones sobre este tipo de problemas. Hay, sin embargo, otro afrontamiento posible y es la posible generalización de orientaciones normativas teniendo en



cuenta que toda situación jurídica supone necesariamente un enfrentamiento entre sujetos con ganancia y pérdidas mayores o menores para cada uno de ellos según sean las estrategias adoptadas. Lo ideal será establecer normativamente las más equilibradas.

Pues bien este ideal cabe perseguirlo no de modo puramente intuitivo a golpes de fortuna y de fracasos a fuerza de usos «contra leyes» o desusos, sino planteándose objetivamente las estrategias óptimas dada una formulación matemática.

No es sólo el mundo de la legislación (el descuidado mundo de la técnica legislativa de contenido, y no sólo de forma) el posible beneficiario de este tipo de cálculos matemáticos. Cada aplicación del Derecho, judicial o extrajudicial, supone una decisión que, o bien debe tener en cuenta que hay enfrente un «enemigo» jurídico de cuya conducta depende nuestra decisión, o bien que debe decidirse ante opciones estratégicas opuestas, de modo que éstas resulten equilibradas.

Queremos limitar estrictamente estas consideraciones a sus aplicaciones prácticas, dejando para otro lugar sus posibles implicaciones teóricas abstractas, como, por ejemplo, las reflexiones que al respecto suscita la revisión de la polémica Rawls-Nozick (20).

Es conveniente determinar qué tipo de decisión es la jurídica, a la vista de las posibles clases con que se enfrente la teoría de los juegos:

- a) Hay planteamientos de estrategias unipersonales: tanto en la previsión normativa como en la aplicación individualizada existiría la tendencia a equiparar este tipo de decisión con la mayoría de las pautas de decisión jurídica. Esto no es así realmente. Más bien se trata de acciones tipificables en el mundo jurídico pero que en muchos casos «aparecía» como unipersonales las decisiones, cuyo correcto análisis las llevaría a ser definidas como bipersonales o pluripersonales en las que uno de los jugadores es la sociedad o la comunidad, en el sentido que hemos visto de juegos de suma  $\leq 0$  y su reducción operativa a juegos de suma = 0.

En este caso nos encontramos con todas las decisiones sobre derechos reales o de constitución de posibles *status* personales de carácter individual; ya sean patrimonial-testamentarios o de carácter gratuito, ya sean de pura cualificación-situacional.

- b) Los más comunes tipos de decisión jurídica serían aquéllos que se denominan juegos finitos, bipersonales, de suma cero de información perfecta. Esto se refiere a todas aquellas decisiones tomadas en situaciones jurídicas en que no

---

(20) Cfr. COLOMER, «Derechos humanos frente a utilitarismo», en Anuario de Derechos Humanos, 1981, págs. 38 y ss. RAWLS, *Teoría de la Justicia*, Méjico F. C. E., págs. 40 y ss. NOZICK, *Anarchy, State and Utopie*, Oxford, 1980, B. Blackwell, págs. 184 y ss. y la reciente versión de LUCAS, *On Justice*, 1980, Oxford, Clarendon Press, cap. 3.

es posible más que un número limitado de cadenas de conductas, precisamente entre dos sujetos o tipos de sujetos, cuyas ganancias se compensan exactamente con las pérdidas, y en los que cada estrategia posible está previamente determinada, y una vez puesta en acción es conocida por los dos participantes.

El mundo de situaciones sinalagmáticas previstas por el Derecho es mucho más amplio que el que viene tipificado por la sección del Código civil o del Código de comercio dedicadas a los contratos de este tipo. La situación es de este tipo en otros muchos contextos: Derecho laboral (incluso en la contratación colectiva), Derecho administrativo (con su oposición típica Administración-administrado), Derecho procesal (actos-demandado) o incluso situaciones no contractuales del Derecho civil (p. e., tutela, matrimonio, servidumbres, etc.).

Volvemos a repetir que estos modelos matemáticos servirían no sólo para el establecimiento de estrategias concretas sino para el posible y científico acotamiento legal de disciplina general sobre tales situaciones que fueran realizadas de forma rigurosa y prevista, y no puramente intuitiva.

- c) Se ha establecido anteriormente la posibilidad de una reducción de los juegos bipersonales de suma no nula a juegos pluripersonales de suma = 0. Sin embargo, existe la posibilidad de analizar determinadas inflexiones no reductivas del tipo bipersonal no nulo como característico de situaciones precisamente bilaterales no sinalagmáticas, que sería la versión jurídica de este tipo de decisiones. Hay multitud de situaciones de este tipo en el Derecho penal, político, fiscal o incluso en el privado y especialmente mercantil (referido, por ejemplo, a explotación de la realidad, o de carácter familiar no patrimonial).
- d) Por último, se encuentran las amplias gamas de juegos de n-personas cuya correspondencia con situaciones jurídicas no es necesario concretar por su misma evidencia.

Todo ello lleva a proponer la necesidad de un esfuerzo muy serio y plural para una profundización en estos tipos de análisis, que no pretenden excluir del campo cualquier otro modelo analítico, pero sí la posibilidad de que su evidente eficacia no se vea disminuida por aquellas razones aducidas por Luce y que hemos transcrito en el párrafo tercero.

Como ejemplo de las posibilidades de este esfuerzo ofrecemos algunas reflexiones sobre las posibles aplicaciones de este método al Derecho y las deducciones que sobre algunas de tales posibilidades cabe hacer incluso sobre la naturaleza de lo jurídico.

## 11. LAS CARACTERISTICAS DE LA DECISION UNIPERSONAL

Tenemos que recordar las precisiones expuestas en torno a las posibles matematizaciones de las decisiones tomadas aisladamente (esto es, sin atención a su bilateralidad), cuando en realidad se asumen frente a otras decisiones. Hay en los ejemplos y tipos de decisión unipersonal alegados habitualmente una peculiar abstracción que prescinde de la correspondencia reflejada en la decisión del sujeto opuesto (21).

Sabemos en todo caso que hay ocasiones de decisiones jurídicas unilaterales en las que los componentes de decisión son:

- los aleatorios y su posible previsibilidad;
- los personales y su razonable lógica.

En esos casos de actuaciones unilaterales (sujetos de relaciones jurídicas gratuitas o de impulso individual; acciones de operadores jurídicos definidos por su singularidad: actos discrecionales o jurisdiccionales) las previsiones de comportamiento «ilógico» son importante para los abogados. Pues bien, existe todo un complejo de normas que determinan la lógica del conjunto de operaciones teóricas que juegan sobre la lógica del comportamiento ajeno.

La investigación matemática de las decisiones ha tomado estas orientaciones expresadas en sus conclusiones.

### a) Investigación y formulación de la noción de transitividad

Esta regla se define del modo siguiente: «dado un conjunto de alternativas factibles, el hombre razonable debería elegir la mejor». Ello supone la existencia de una gradación de preferencias en que cada elemento asume un valor y una relación ( $a < b < c$ , por ejemplo), o bien una gradación en la que existe una posible indiferencia ( $a \leq b$ ;  $b \leq a$ ). Ambas tienen una descripción algebraica y se llaman ordenación fuerte y ordenación débil.

Se supone (y se comprueba asimismo) la existencia de intransitividad de preferencias (cfr. experimentos en *Enciclopedia Ciencias Sociales* 3: 410 s.) que han llevado a la definición de la transitividad probabilística (22). Independiente de su demostración matemática (que se orienta hacia la programación lineal), la importancia de esta orientación estriba en que se considera la posibilidad de desviación de la elección lógica, situándose en un área de progresiva consistencia o aproximación al ideal de elección sobre otras bases, entre las que se encuentran las vigentes.

(21) Así en Davis, op. cit., págs. 23 y ss.; o WILLIAMS, *The Compleat Strategist*, New York, 1954, Mac Graw-Hill: o los que expone EDWARDS, op. cit., y especialmente *Enciclopedia de las Ciencias Sociales* 3, 402 y ss.

(22) LUCE-SUPPES, en *Handbook of Mathematical Psychology*, New York, 1965, Wiley.

b) *Inadmisibilidad de acciones dominadas*

Savage ha puesto de relieve, en una compleja deducción de la que se ha dado noticia más arriba, dos elementos fundamentales: que el resultado de una acción depende no sólo de la acción en sí, sino del estado del mundo que no cae bajo la acción del control del responsable de la adopción de condiciones, al que se denomina suceso; y por otro lado, que dadas varias acciones a, b, c y varios sucesos  $s_1$ ,  $s_2$ , etc., se preferirá siempre —cfr. más arriba en la Teoría de los Juegos, juegos de n personas suma cero, información no perfecta— la acción a si ésta iguala o mejora en todo caso y bajo cualquier suceso a la acción b.

c) *La conversión del juego unipersonal en teoría de la utilidad esperada y probabilidad estimada*

Llegados a este punto, los planteamientos se centran en torno a la intervención del suceso en la acción, y se convierte esta teoría o formulación teórico-matemática en un problema puro de decisión al que ya nos hemos referido más arriba (23). La influencia de la decisión lógica si en ella no entra la aleatoriedad natural, o la conversión en un problema de decisión pura, se subraya asimismo por Davis (24).

## 12. LOS JUEGOS FINITOS, BIPERSONALES, DE SUMA CERO DE INFORMACION PERFECTA

Se ha hecho referencia más arriba a los modelos genéricos indicativos jurídicos, a los que se podía aplicar las reglas y conclusiones de este tipo teórico de juegos. Cuando ahora se exponen algunas reflexiones y comentarios sobre la viabilidad aplicativa concreta del tipo, conviene imaginar situaciones jurídicas concretas a las que fueran aplicables.

Así ocurre, por ejemplo: con contratos civiles y mercantiles o situaciones procesales de existencia masiva (arrendamiento urbano, con la contraposición pura de casero —inquilino; o relación bancaria de crédito, en la que se enfrentan prestamista y prestatario; o los supuestos jurídicos procesales, en los que la contraposición de papeles es arquetípica), tanto se miren desde la posición de quien establece estrategias típicas (*legis ferenda*) o quien los utiliza en el conflicto concreto (*legis applicandae*).

(23) Verlo así en el tratamiento económico de MARSCHAK en la *Enciclopedia de las Ciencias Sociales*, cit., págs. 3, 414 y ss.

(24) DAVIS, op. cit., págs. 25-26.

a) *Estas situaciones están estrictamente determinadas*

Una de las conclusiones más importantes de estas situaciones es que no sólo intuitivamente, sino matemáticamente, están perfectamente establecidas desde un principio y en ellas una parte ganará y la otra perderá. No cabe situación de igualdad. Hay, efectivamente, situaciones de posible empate, pero en ese caso ello se deberá:

- bien a la posibilidad de estrategia errónea por el ganador nato;
- bien a la limitación axiomática de estrategias.

Es sólo sobre esta convicción sobre la que cabe hacer presupuestos reales tanto desde el punto de vista de la elección de estrategias, como de la prevención jurídico-legislativa.

b) *Las consecuencias jurídicas*

Son muy claras: la aplicación de la racionalidad a la victoria para los casos de operadores jurídicos no legisladores, tiene que venir compensada por la estricta prohibición de la estrategia óptima como supuesto de equilibrio necesario y posibilidad de ganancia mutua.

### 13. LOS JUEGOS DE INFORMACION IMPERFECTA

Parece a primera vista imposible que se dé este supuesto en el mundo del derecho, puesto que se supone que las conductas posibles están fijadas en la ley y la puesta en práctica de cada una de ellas es conocida por el contrario, dado el principio de inefectividad de lo oculto que es propio del mundo jurídico.

La realidad no es así: la norma jurídica que suele contar con la autonomía de la voluntad, supone la existencia de una multiplicidad de conductas previsibles pero no determinadas. Los sujetos jurídicos han de adoptar sus decisiones paralela y coetáneamente con las de sus oponentes, sin saber cuáles serán las que en definitiva éstos adopten. La norma en ambos casos asume el papel de «regla» en el sentido estricto de esta teoría matemática, esto es, en el sentido de definición del campo dentro del que se inscriben las posibles estrategias, pero no predetermina cuál estrategia es la que en definitiva será adoptada.

En otros casos, las situaciones de hecho se esquematizan de tal forma por la norma jurídica (ya hecha, o simplemente «in fieri») que se supone aplicable a tal cúmulo de estrategias posibles cuya definición es ciertamente limitada, pero imposible de inventariar. En estos casos, el único tratamiento posible es la admisión de un supuesto de estrategias indefinidas.

Partiendo de que es aplicable este supuesto de la información general o no perfecta al mundo jurídico (25), por todo lo analizado podemos ver qué reglas o principios hermenéuticos se deducen de esta posible aplicación:

a) *La concepción del equilibrio*

Una conclusión genérica que, como veremos, se esboza al final de estas líneas, consiste en que es mejor para los intervinientes de un conflicto bipersonal buscar condiciones de equilibrio, las cuales no se consiguen sino en la redistribución y la cooperación (26).

Pues bien, la definición de equilibrio que se maneja y que merece la pena tener en cuenta como posible categorema genérico es la de: «una situación de equilibrio deseable normativa y jurídicamente es aquella que se produce cuando dos sujetos se enfrentan y ninguno de ellos gana cambiando unilateralmente su estrategia».

Esta concepción de equilibrio no es sólo utilizable en los juegos bipersonales de suma cero (que son los más característicos), sino también en aquéllos en que la suma de los pagos positivos y negativos es superior o inferior a cero. En estos casos, un punto de equilibrio puede atraer a «ambos» jugadores por igual más que cualquier otro. Esta situación supone la mayor estabilidad. Esa estabilidad supone a su vez que será la pauta generalmente asumida en el conjunto de las decisiones con un determinado e igual supuesto de hecho.

b) *La suposición de los grandes números*

Los fenómenos de decisión jurídica (ya sea, volvemos a repetir, en su fase planeación legislativa, ya en la decisión concreta) suponen que las conductas de los oponentes van a ser razonables. Pues bien, la racionalidad supuesta *no suele* coincidir con la racionalidad real. Es un teorema de esta teoría que no sólo planteando racionalmente la decisión razonable, sino incluso empleando un artificio de azar, con la aplicación de las fórmulas oportunas estamos *asegurando* una decisión más correcta.

---

(25) En estas reflexiones «iniciales» o «iniciáticas» no cabe un desarrollo por menozado de esta técnica que sí será objeto de análisis posteriores.

(26) Conclusión tórica que —sin perjuicio de trabajos teóricos de carácter menos informativo y más operativo—, ya puede deducirse y sumarse a las posiciones que en la polémica Rawls-Nozick defiende el primer autor, cfr. ops. cit., y la de Lucas, asimismo citada.

c) *La teoría del minimax: el máximo posible para las teorías contrapuestas*

La expresión no matemática, sino discursiva del teorema de von Neumann sobre el minimax dice que:

- hay una estrategia para cualquier jugador —supongamos A— que protegerá su ganancia  $V$ ; contra ella nada puede hacer el jugador B, dado que la ganancia  $V$  es la cantidad que el jugador A espera obtener si ambos actúan razonablemente;
- asimismo hay una estrategia que asegura al jugador B impedir que el A consiga cantidad superior a  $V$ ;
- dado que hay suma cero, se supone que la estrategia minimax es la más adecuada en los casos de oposición frontal de intereses.

Lo que esto quiere decir es que la estrategia minimax es la de la exclusiva seguridad, con el presupuesto de más pura creación adicional de riqueza por ninguna de las actividades de los jugadores. Cualquier otro supuesto hace entrar en una nueva y necesaria punta normativa.

d) *La teoría de la cooperación*

En efecto, cualquier supuesto en el que las condiciones iniciales varían tienden a convertirse en juegos de suma diferente a cero, y aquí las opciones a conseguir deben superar la pura oposición y centrarse en la cooperación.

Hay un famoso experimento llevado a cabo por Rapoport y Orwant (27), según el cual los jugadores abandonan —en juegos de suma cero— sus estrategias óptimas para buscar aquéllas de equilibrio más mediocre. La no cooperación lleva a no cometer estupideces, pero no a buscar resultados progresivos.

#### 14. EL JUEGO BIPERSONAL DE SUMA NO NULA

El caso muy habitual de situaciones competitivas con un elemento de interés común, aunque sólo sea el mantenimiento de una regla de juego concreta, se debe tratar con el modelo teórico que ofrece esta tipificación.

¿Cuáles serían sus más importantes constantes normativas teóricas?

---

(27) RAPOPORT y ORWANT, «Experimental Games a Review», en *Behavioral Science* VII (62).

a) *La distinción necesaria de las reglas aplicables a los juegos de suma cero*

Está admitido que las condiciones de comunicación, la obtención de información, el efecto de restringir alternativas, la aparición de amenazas, etc., tienen en un caso y otros efectos divergentes.

b) *El reflejo de la distinción está en la actitud cooperativa*

Todos los análisis indicados llevan a la conclusión de la necesidad de la decisión cooperativa que tiene su reflejo en el llamado esquema de arbitraje de la decisión de Nash (28), según el cual se puede afirmar que:

- el resultado arbitrado debe ser independiente de la función de utilidad, dado que existen tantas funciones de utilidad como resultados a decidir.
- el resultado arbitrado debe ser tal que no exista otro en el cual ambos jugadores consigan más simultáneamente (óptimo de Pareto).

c) *La cooperación reflejada en pagos sólo es posible por la redistribución convenida*

No existe más razón para el establecimiento de las estrategias competitivas en el campo de las teorías con riqueza adicional que las pueda haber en las estrategias de riesgo (anti-minimax) en los juegos de suma cero. En las observaciones de Rapoport citadas, aplicadas a los juegos-cero, se establece que son las condiciones ideológicas las que buscan un conjunto de excusas para establecer estrategias maximalistas, abundando las razones de la falta de información, etc....

En el tipo genérico que ahora analizamos, el conjunto de experiencias de que los jugadores, por lo común, sólo saben jugar competitivamente y que es necesario aprender para jugar mejor cual es la de jugar cooperativamente, esto es, *redistribuir*. La reluctancia a este tipo de conducta lleva a la negación y obcecación en la competitividad (29).

La utilidad metódica de estas conclusiones, a lo que se ve, son tan importantes como su rentabilidad teórica, referida, por ejemplo, a la ya varias veces citada polémica Rawls-Nozick.

(28) NASH, «The Bargaining Problem», *Econometrica* XVIII (1950); «Two-Person, Cooperative Games», eodem loco XXI (53).

(29) Cfr. experimentos de LUCE-RAIFFA, *Games and Decisions*, New York, 1952, Wiley; RAPOPORT, *Fights, Games and Debates*, University Michigan Press, 1960; SCODEL, *MINDS, of Conflict Resolution*, III (1959), etc.



## 15. LOS JUEGOS DE N-PERSONAS

Es muy difícil hacer una recensión, aunque fuera simplista, de las posibles pautas analíticas que ofrece la aplicación de un modelo de estas características. Hay una razón fundamental, y es que no es una, sino tres las posibles interpretaciones variantes de esta situación (30).

En todo caso, las situaciones jurídicas a las que son aplicables, y a ello se inclinan estas líneas, las teorías más completas de los juegos abren posibilidades teóricas y prácticas no sólo en los campos de la técnica de la legislación o de la decisión concreta e individualizada, sino como se ha visto en el análisis más teórico de las mismas justificaciones de los contenidos más racionales, útiles, operativos y justos que deben dar acogida las normas jurídicas. Sirvan estas páginas de testimonio, por imperfecto que sea, en todo caso confiado en estas posibilidades del compromiso de un futuro trabajo en este área tan rica en perspectivas.

---

(30) AUMANN-MASCHLER, «The Bargaining Set for Cooperative Games», en *Annals of Mathematics Study* 52, Princeton, 1964; la conocida y citada obra de MORGENSTER, VON NEUMANN, SHAPLEY, «A Value for n-Person Games», en *Contribution to the Theory of Games*, Princeton, 1953.