Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa
Vol. 7, Nº 1, 2001, pp 57-70

ANÁLISIS DE LA VALORACIÓN DE LAS OPCIONES ASIÁTICAS UTILIZADAS POR LOS FONDOS DE INVERSIÓN GARANTIZADOS DE RENTA VARIABLE

Arregui Ayastuy, G.
Vallejo Alonso, B.
Universidad del País Vasco

RESUMEN

Las estrategias de inversión de muchos fondos de inversión mobiliaria garantizados de renta variable, dirigidas a la consecución de un objetivo concreto de rentabilidad fijado, están basadas en el empleo de opciones asiáticas, lo que les permite asegurar la componente de rentabilidad variable garantizada. Tanto para poder estimar la rentabilidad a garantizar por el fondo, como para conocer su situación patrimonial en un momento cualquiera, es necesario proceder a la valoración de estas opciones. Los métodos de valoración aplicables son diversos, pero todos ellos ofrecen estimaciones aproximadas. En este trabajo se describen varios métodos de valoración de opciones asiáticas y, tomando como referencia las características de los fondos garantizados de renta variable comercializados a finales de 1998, y la situación de los mercados estas fechas, se comparan sus resultados con las estimaciones calculadas mediante el método de Monte Carlo.

PALABRAS CLAVE: Fondos de Inversión Garantizados, Opciones Asiáticas, Valoración de Opciones.

INTRODUCCIÓN

Uno de los fenómenos más relevantes ocurrido en el sistema financiero español en los últimos años ha sido el crecimiento experimentado por los fondos de inversión mobiliaria garantizados de renta variable[1]. A pesar de su corta existencia en el mercado español, los primeros aparecieron en 1995, se han convertido en un producto totalmente consolidado y de gran éxito comercial.

La garantía ofrecida por estos fondos, básicamente, consiste en un porcentaje del valor inicial de la inversión, más un porcentaje de la revalorización de un índice de referencia[2]. En los primeros fondos que se comercializaron, la componente de rentabilidad variable asegurada se calculaba sobre la revalorización del índice entre la fecha de inicio y vencimiento de la garantía. Actualmente, como consecuencia del encarecimiento de las garantías, la práctica totalidad de los fondos la calculan sobre la revalorización media mensual del índice.

La gestión de las carteras de estos fondos, dirigida a la consecución del objetivo concreto de rentabilidad fijado, puede estar basada, bien en estrategias de inversión, que replican dinámicamente tanto la duración de la cartera de renta fija, como el comportamiento de las posiciones en opciones. O bien, en la combinación de la rentabilidad de una cartera de renta fija de duración similar al vencimiento de la garantía, con el establecimiento de un conjunto de operaciones en derivados sobre el índice de referencia. En este último caso la cartera, al inicio de la garantía, estará estructurada de la siguiente forma:

- El porcentaje mayoritario se destinará a la adquisición de títulos de deuda con vencimiento similar al periodo de garantía y al mantenimiento del coeficiente de liquidez mínimo. Su finalidad es cumplir con la componente de rentabilidad fija garantizada.
- El resto de la cartera se destinará al pago de las primas de las posiciones en opciones, que aseguran la componente de rentabilidad variable garantizada.

Es evidente la importancia que tiene la valoración de las posiciones en opciones, tanto para poder estimar la rentabilidad que se puede garantizar, como para poder valorar la situación patrimonial del fondo en un momento cualquiera. En el caso de que la parte variable de la garantía se calcule como un porcentaje de la revalorización media mensual del índice, las opciones utilizadas serán asiáticas. Los métodos aplicables a la valoración de este tipo de opciones son diversos, pero ninguno de ellos ofrece una precisión total y absoluta

El objeto del presente trabajo es realizar una comparación entre algunos de los métodos de valoración de opciones asiáticas, teniendo en cuenta su aplicación en el contexto de los fondos de inversión mobiliaria garantizados de renta variable. Para ello, comenzamos comentando las características básicas de lo que denominamos opciones asiáticas y la problemática de su valoración. Luego, pasamos a describir brevemente los principales aspectos de los métodos utilizados. Después, presentamos los datos resultantes de la aplicación de los métodos tomando como referencia las características de los fondos comercializados en España a finales de 1998 que garantizaban un porcentaje de la revalorización media mensual del Ibex 35. Finalmente, se comentan los resultados obtenidos y las conclusiones alcanzadas.

LAS OPCIONES ASIÁTICAS

Una opción asiática es una modalidad de opción exótica. Aunque, como pone de manifiesto Lamothe (1993, p. 255) no existe unanimidad sobre lo que se entiende como opciones exóticas, siguiendo a Fernández (1996, pp. 497–498), vamos a denominar opciones exóticas a todas las opciones no tradicionales, entendiendo por tradicionales las opciones que tienen un precio de ejercicio fijo y cuyo valor depende del precio del subyacente en la fecha de ejercicio. En las opciones exóticas se distinguen diferentes modalidades[3], entre las cuales están las opciones cuyo valor es dependiente de la evolución histórica de los precios del subyacente. En función de la forma concreta en la que la evolución de los precios del subyacente influye en el valor de la opción, Clewlow y Strickland (1997, pp. 11–15) distinguen las siguientes clases de opciones:

Opciones lookback, aquellas en las que la remuneración al tenedor de la opción se establece en función de la cotización máxima o mínima alcanzada por el subyacente a lo largo de la vida de la opción.

Opciones barrera, aquellas en las que se determina un valor denominado barrera, de forma que la opción comienza a existir o desaparece si el valor del subyacente alcanza dicho nivel; es decir, que el tenedor de la opción percibirá su remuneración en función de que el precio del subyacente alcance o no, en algún momento de la vida de la opción, el nivel predeterminado.

Opciones digitales, aquellas opciones en las que, al igual que en las opciones barrera, el tenedor de la opción será remunerado en función de que el precio del subyacente alcance o no un determinado nivel, pero con la diferencia de que, en este caso, la remuneración es una cantidad fija preestablecida.

Opciones asiáticas, aquellas cuya remuneración depende del promedio de los valores que ha alcanzado el precio del subyacente en determinados momentos a lo largo de la vida de la opción, o de parte de ella. También se conocen como opciones promedio. El promedio utilizado normalmente es la media aritmética, aunque en ocasiones también se utiliza la media geométrica, y la referencia del precio del subyacente se toma, de fuentes de reconocido prestigio acordadas por las partes contratantes, en intervalos de tiempo regulares: días, semanas o meses. El vencimiento de la opción suele coincidir con el momento en el que se toma el último precio incorporado a la media.

Las opciones asiáticas más negociadas son las que al vencimiento ofrecen una remuneración igual a la diferencia, si es positiva, entre el precio medio del activo subyacente durante el periodo predeterminado y el precio de ejercicio. Se les denominan opciones de precio del subyacente promedio (OSP) (average rate options) o asiáticas. En adelante, al utilizar la denominación de opciones asiáticas nos referiremos a este tipo de opciones asiáticas.

Por otro lado, también se negocian, aunque menos, opciones que al vencimiento ofrecen una remuneración igual a la diferencia, si es positiva, entre el precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento de la opción y la media de los precios que el activo subyacente ha alcanzado durante el periodo temporal especificado. A estas se les denomina opciones de precio de ejercicio promedio (OEP) (average strike options) o pseudo-asiáticas.

En los fondos garantizados considerados en este trabajo la garantía se puede materializar a través de una o varias opciones call asiáticas de tipo europeo, en las que no es posible el ejercicio anticipado y el promedio es una media aritmética de la cotización de un índice bursátil. En algunos de los fondos, el precio de ejercicio de la opción se toma como la media aritmética del valor del índice en varias sesiones siguientes al inicio de la garantía. Pero, no por ello se debe entender que se trata de opciones OEP, puesto que al calcular el precio de ejercicio no se tiene en cuenta la evolución del precio del subyacente a lo largo de la vida de la opción. Más bien, se pretende reducir el efecto que podría tener sobre la garantía alguna situación anómala o distorsionante en la cotización del índice en la fecha elegida para tomar la referencia inicial.

VALORACIÓN DE OPCIONES ASIÁTICAS

El valor de una opción call[4] asiática en la fecha de ejercicio es:

$$\text{Máx. } (0, A(T_n) - K), \qquad \text{donde } A(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(T_i),$$

siendo $S(T_i)$ el precio del subyacente[5] en las fechas tomadas como referencia, n el número de referencias tomadas, T_i la fecha en que se toma la referencia i-ésima, T_n la fecha en la que expira la opción y K el precio de ejercicio.

El problema fundamental para calcular el valor de una opción, en un momento t cualquiera a lo largo de su vida, es conocer el comportamiento del precio del subyacente. Podemos suponer, como es usual en la valoración de opciones sobre índices, que el precio del subyacente sigue un proceso de difusión geométrico:

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dz$$

donde S es la cotización del subyacente, dS la variación de S en un intervalo infinitesimal de tiempo dt, μ la esperanza matemática del rendimiento instantáneo del subyacente, σ su desviación típica y dz un proceso de Wiener, es decir, $dz \sim N(0,dt)$.

Considerando los supuestos del modelo de Black-Scholes (1972) para un intervalo de tiempo $[t, T_i]$, con $T_i > t$, se tiene que:

$$\ln S(T_i) \sim N[\ln S(t) + (\mu - \sigma^2/2)(T_i - t), \sigma\sqrt{T_i - t}]$$

Bajo el supuesto anterior, y adoptando la consideración de un mundo neutral al riesgo, siguiendo la metodología de Cox y Ross (1976), el valor de la opción en un instante t se puede expresar como el valor actual del flujo monetario esperado al vencimiento de la opción:

$$C = e^{-r(T_n - t)}\, E(\text{Máx}(0, A(T_n) - K))\,(1)$$

donde r es el tipo de interés sin riesgo anualizado en capitalización continua para un plazo igual al de la vida de la opción, E la esperanza matemática y S(T) sigue un proceso de difusión geométrico con $\mu = r - q$, donde q representa el tipo de rendimiento esperado por dividendos del índice.

Nosotros vamos a suponer que t es el momento inicial y que éste es anterior a la primera observación, $t < T_1$. Sin embargo, se podrían obtener expresiones más generales, tomando un instante t cualquiera, entre el momento inicial en el que la opción comienza su vida y T_n, considerando que cierto número de observaciones $S(T_i)$ son conocidas[6].

Bajo los citados supuestos el precio del subyacente sigue una distribución logarítmico-normal:

$$\ln S_T \sim N(\ln S_t + (r - q - (\sigma^2/2))(T - t), \sigma\sqrt{T - t}) \qquad (2)$$

donde S_t y S_T son el precio de subyacente en el momento t y en un momento posterior T.

Si $f^*(x) = \text{Prob}[A(T_n) = x]$ representa la función de densidad de $A(T_n)$, la esperanza matemática de la igualdad (1) se puede expresar de la siguiente manera:

$$E(\text{Máx}(0, A(T_n) - K)) = \int_K^{\infty} [A(T_n) - K] f^*(x)dx \qquad (3)$$

Sin embargo, la suma de variables que siguen una distribución logarítmico-normal, $A(T_n)$, no sigue ninguna distribución conocida; es decir, $f^*(x)$ no es conocida. Por ello, no existe ninguna fórmula analítica exacta, como la de Black-Scholes, para el cálculo de E(Máx(0, $A(T_n) - K$)) y es necesario recurrir a procedimientos numéricos o a métodos aproximados.

MODELOS PARA LA VALORACIÓN DE OPCIONES ASIÁTICAS

Se han desarrollado diferentes modelos para la valoración de opciones asiáticas. La mayoría de estos modelos toman como referencia distribuciones de probabilidad con un comportamiento lo más similar posible a la distribución de la media aritmética, $A(T_n)$. En este grupo de modelos tenemos la aproximación de Vorst (1992), la aproximación de Levy (1992) y la aproximación de Turnbull y Wakeman (1991), entre otras. Por otro lado, tenemos métodos numéricos, entre los cuales destacan el método de simulación de Monte Carlo y el método binomial extendido, desarrollado por Hull y White (1993), que es de los pocos que permiten valorar opciones asiáticas de tipo americano. El método binomial, a diferencia del método de Monte Carlo, no permite en si mismo cuantificar el error cometido en la estimación del valor de la opción, por lo que entendemos que no es adecuada su utilización como valor de referencia para contrastar otros métodos aproximados de valoración de opciones asiáticas europeas. Por ello, en nuestro trabajo nos centraremos en el método de simulación de Monte Carlo.

Método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo es un modelo de simulación que consiste esencialmente en un muestreo artificial o simulado; es decir, en generar números aleatorios para convertirlos luego en observaciones de la variable aleatoria del modelo.

En nuestro caso, la variable aleatoria, cuya distribución desconocemos, es la media aritmética de los valores alcanzados por el índice ($A(T_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(T_i)$). Por ello, el procedimiento requiere la generación de simulaciones del proceso de cotizaciones del índice: $S(T_1)$, $S(T_2)$, ..., $S(T_n)$. Teniendo en cuenta la expresión (2) podemos utilizar la siguiente igualdad:

$$S(T_i) = S(T_{i-1})e^{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T_i-T_{i-1})+\sigma\varepsilon_i\sqrt{T_i-T_{i-1}}} \qquad (4)$$

donde $\varepsilon_i \sim N(0,1)$, $i = 1, ..., n$ y T_0 es el momento actual, t.

La simulación consiste en generar de forma aleatoria los valores ε_i, para calcular, a partir de los valores obtenidos, la secuencia de valores $S(T_i)$, con lo que tendremos un valor de $A(T_n)$. Repitiendo el proceso un número elevado de veces obtendremos la muestra artificial deseada, a partir de la cual podremos obtener $E(\text{Máx}(0, A(T_n) - K))$ y, finalmente, actualizando podremos calcular una estimación del valor de la opción:

$$C = e^{-r(T_n-t)}\, E(\text{Máx}(0, A(T_n) - K))$$

El inconveniente fundamental del método de Monte Carlo es que el resultado obtenido no es exacto sino una aproximación, por lo que siempre se comete un error al utilizar la estimación. El error cometido se puede disminuir incrementando el número de simulaciones generadas para estimar el valor de la opción, pero esto provoca el aumento del tiempo necesario. Este es, en la práctica, el inconveniente fundamental de la utilización del método de Monte Carlo en el cálculo del valor de las opciones asiáticas, sobre todo para niveles altos de volatilidad: el tiempo necesario para evaluarlas[7].

Este problema, en el caso de las opciones asiáticas, se puede paliar utilizando la técnica de reducción de varianza propuesta por Kemna y Vorst (1990). En su trabajo ponen de manifiesto el alto grado de correlación entre opciones asiáticas aritméticas, las que hemos venido denominando asiáticas, y opciones asiáticas geométricas, iguales a las anteriores en todo salvo que aquí el promedio es una media geométrica. Este hecho se aprovecha para incrementar la precisión de las estimaciones obtenidas y así reducir el intervalo de confianza de la estimación de Monte Carlo a proporciones satisfactorias, utilizando la ventaja que supone el hecho de que el valor de una opción asiática geométrica puede calcularse con total precisión a través de métodos analíticos.

Si llamamos C^G al verdadero valor de la opción call asiática geométrica obtenido analíticamente, C^G_{MC} a la estimación de este valor obtenida con el método de Monte Carlo, C^A_{MC} a la estimación de Monte Carlo de la call asiática aritmética y C^* a la aproximación propuesta por Kemna y Vorst, estos autores demuestran la ventaja, en el número de simulaciones necesarias para alcanzar un determinado nivel de precisión, que supone estimar por el método de Monte Carlo la diferencia $[C^A_{MC} - C^G_{MC}]$ para añadirle el valor exacto C^G. Se trata, por lo tanto, de utilizar la expresión:

$$C^* = C^G + [C^A_{MC} - C^G_{MC}]$$

Nos vemos, por tanto, en la necesidad de evaluar opciones call asiáticas geométricas, tanto por el método de Monte Carlo como a través de métodos analíticos. El desarrollo de métodos analíticos para la valoración de opciones call asiáticas geométricas no sólo es necesario para poder aplicar la simulación de Monte Carlo propuesta por Kemna y Vorst, sino que, también facilita la comprensión del resto de los métodos considerados en este trabajo, puesto que todos ellos se apoyan, de una u otra manera, en dichos métodos.

Valoración de opciones asiáticas geométricas

El valor de una opción call asiática geométrica en la fecha de ejercicio es:

$$\text{Máx.}\ (0, G(T_n) - K)$$

donde $G(T_n) = [S(T_1), S(T_2), S(T_3), ..., S(T_n)]^{1/n}$ y, por lo tanto, $\ln [G(T_n)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln S(T_i)$.

La valoración de opciones asiáticas geométricas es más sencilla que la de opciones asiáticas aritméticas, debido a que, manteniendo los supuestos anteriores, el logaritmo del precio del subyacente sigue una distribución normal y también el logaritmo de la media geométrica, por ser combinación lineal de variables aleatorias distribuidas normalmente. Por lo tanto, $\ln [G(T_n)] \sim N(\mu_G, \sigma_G)$.

Los parámetros μ_G y σ_G, esto es, la media y la desviación típica de la variable $\ln [G(T_n)]$, se calculan utilizando las siguientes expresiones, cuyo derivación se puede consultar en Clewlow y Strickland (1997, pp. 91-93):

$$\mu_G = \ln S(t) + \frac{1}{n}(r - q - \frac{\sigma^2}{2}) \sum_{i=1}^{n}(T_i - t) \qquad (5)$$

$$\sigma_G^2 = \frac{\sigma^2}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(T_i - t) + 2\sum_{i=1}^{n-1}(T_i - t)(n - i)\right] \qquad (6)$$

Consideraciones análogas a las realizadas para la deducción de la expresión (1) nos llevan a una expresión equivalente para el valor de una opción call asiática geométrica, C^G:

$$C^G = e^{-r(T_n - t)}\ E(\text{Máx}(0, G(T_n) - K))$$

Pero aquí la distribución de $G(T_n)$ es conocida, por lo que podemos calcular la esperanza y obtener la siguiente expresión:

$$C^G = e^{\mu_G + \frac{\sigma^2}{2} - r(T_n - t)}\ N(d) - e^{-r(T_n - t)}\ K\ N(d - \sigma_G) \qquad (7)$$

donde N es la función de distribución normal estándar y $d = \dfrac{\mu_G - \ln K + \sigma_G^2}{\sigma_G}$.

La expresión (7) permite aplicar el método de Monte Carlo con la técnica de reducción de varianza de Kemna y Vorst, y, además, las consideraciones realizadas para las opciones asiáticas geométricas nos permiten desarrollar los siguientes métodos aproximados.

Método aproximado de Vorst

Vorst (1992) parte de considerar que la distribución de probabilidades de $G(T_n)$ es similar a la de $A(T_n)$. Puesto que esta última es desconocida, toma como aproximación a $f^*(x)$, la función de densidad de $A(T_n)$, la función de densidad de $G(T_n)$, la cual es conocida. Esto es, si $\ln[G(T_n)] \sim N(\mu_G, \sigma_G)$, vamos a suponer que también $\ln[A(T_n)] \sim N(\mu_G, \sigma_G)$.

Según esto, para calcular el valor de una opción asiática aritmética, C, podríamos utilizar la expresión (7):

$$C = e^{\mu_G + \frac{\sigma^2}{2} - r(T_n - t)} N(d) - e^{-r(T_n - t)} K\, N(d - \sigma_G) \qquad (8)$$

con $d = \dfrac{\mu_G - \ln K + \sigma_G^2}{\sigma_G}$.

Sin embargo, como demuestran Beckenbach y Bellman (1971, p.4), la media geométrica es siempre inferior a la media aritmética, $G(T_n) \leq A(T_n)$, y, en consecuencia, la media geométrica infravalora la media aritmética. Por lo tanto, la utilización de la medida de tendencia central de $\ln[G(T_n)]$, μ_G, provoca la infravaloración de $\ln[A(T_n)]$, lo cual hace que el valor estimado de la call asiática aritmética dada por (8) infravalore su verdadero valor. Para corregir, en parte, este sesgo Vorst propone reemplazar el verdadero precio de ejercicio, K, por otro valor K^*, calculado de la siguiente manera:

$$K^* = K + E[G(T_n)] - E[A(T_n)]$$

donde:

$E[G(T_n)] = e^{\mu_G + \frac{\sigma_G^2}{2}}$, utilizando la expresión del cálculo del momento de orden k de una variable aleatoria que sigue una distribución logarítmico-normal[8], puesto que $\ln[G(T_n)] \sim N(\mu_G, \sigma_G)$.

$E[A(T_n)] = \dfrac{S(t)}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{(r-q)(T_i - t)}$, según se deduce del algoritmo desarrollado por Turnbull y Wakeman (1991) para calcular los momentos de $A(T_n)$.

Como $E[G(T_n)] \leq E[A(T_n)]$, entonces, $K^* \leq K$. De esta forma se consigue tomar en consideración el mayor valor esperado de la media aritmética con respecto a la media geométrica.

Método aproximado de Levy

En el método anterior se ha supuesto que $\ln[A(T_n)]$ sigue una distribución normal, $\ln[A(T_n)] \sim N(\alpha, \nu)$, en la que la media $\alpha = \mu_G$ y la desviación típica $\nu = \sigma_G$; es decir, que la distribución de $\ln[A(T_n)]$ es igual que la de $\ln[G(T_n)]$. Esta aproximación se puede mejorar con el método de Levy (1992), que consiste en mantener el supuesto de la distribución normal $N(\alpha, \nu)$ para $\ln[A(T_n)]$, pero realizar unas estimaciones de α y ν más ajustadas.

Por un lado, sabemos que $E[A(T_n)^k] = e^{k\alpha + \frac{k^2 v^2}{2}}$, puesto que suponemos que $\ln[A(T_n)] \sim N(\alpha, v)$, y por otro, podemos calcular los verdaderos momentos de $A(T_n)$ aplicando el algoritmo desarrollado por Turnbull y Wakeman (1991), según el cual:

$$E[A(T_n)] = \frac{S(t)}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{(r-q)(T_i - t)}$$

$$E[A(T_n)^2] = \frac{S(t)^2}{n^2} \left[\sum_{i=1}^{n} e^{(2(r-q)+\sigma^2)(T_i - t)} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} e^{(r-q+\sigma^2)(T_i - t)} \sum_{j=i+1}^{n} e^{(r-q)(T_j - t)} \right],$$

De modo que podemos plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y despejando obtenemos:

$$\alpha = 2 \ln E[A(T_n)] - \frac{1}{2} \ln E[A(T_n)^2]$$

$$v^2 = \ln E[A(T_n)^2] - 2 \ln E[A(T_n)]$$

Por lo demás, el cálculo del valor de la call asiática aritmética se realiza utilizando una expresión equivalente a (7):

$$C = e^{\alpha + \frac{v^2}{2} - r(T_n - t)} N(d) - e^{-r(T_n - t)} K\, N(d - v) \qquad (9)$$

con $d = \dfrac{\alpha - \ln K + v^2}{v}$.

A pesar de que los valores de la media y la varianza de $A(T_n)$ se incorporan al modelo con precisión y que este procedimiento proporciona buenas aproximaciones del valor de las opciones asiáticas, esta aproximación no tiene en cuenta momentos de $A(T_n)$ de orden superior. La posible diferencia entre los momentos de orden superior de la distribución logarítmico-normal y la verdadera distribución puede cobrar, en determinadas condiciones, mayor volatilidad y/o mayor plazo hasta el vencimiento, una mayor importancia que haga aconsejable incorporarlos.

Método aproximado de Turnbull y Wakeman

Turnbull y Wakeman (1991) describen un método que permite tener en cuenta momentos de la distribución de probabilidades de $A(T_n)$ de orden superior al segundo, en concreto, la asimetría y la curtosis. Con este fin utilizan una expansión en series de Edgeworth de la función de densidad de la media aritmética, f*(x).

Si llamamos a(x) a la distribución aproximada alternativa se demuestra[9] que f*(x) se puede expresar de la siguiente forma:

$$f^*(x) = a(x) - C_1\, a^{(1)}(x) + \frac{1}{2!}\, C_2\, a^{(2)}(x) - \frac{1}{3!} C_3\, a^{(3)}(x) + \frac{1}{4!} C_4\, a^{(4)}(x) + e(x) \tag{10}$$

donde:

$a^{(i)}(x)$ es la derivada i-ésima de a(x).
C_i son constantes, denominadas acumulantes, que dependen de los momentos hasta de orden i de las distribuciones de f*(x) y a(x).
e(x) es el error cometido en la aproximación.

Turnbull y Wakeman suponen que al tomar a(x) como la función de densidad de la distribución logarítmico-normal con idénticas media y varianza a las de $A(T_n)$, esto es, α y ν obtenidas según el método anterior, y por lo tanto iguales a las de f*(x), e(x) es despreciable. Por otra parte, calculan los momentos de tercer y cuarto orden de $A(T_n)$ por un procedimiento recursivo, con lo que, dado que los momentos de a(x) son conocidos, estiman las constantes C_i, sustituyen sus valores en (10), esta aproximación de f*(x) la sustituyen a su vez en (3) e integrando obtienen que:

$$C = e^{\alpha + \frac{\nu^2}{2} - r(T_n - t)} N(d) - e^{-r(T_n-t)}\, K\, N(d-\nu) - e^{-r(T_n-t)}[\frac{1}{3!} C_3\, a^{(1)}(K) - \frac{1}{4!} C_4\, a^{(2)}(K)] \tag{11}$$

con $d = \dfrac{\alpha - \ln K + \nu^2}{\nu}$.

Los métodos analíticos aproximados descritos se conocen como aproximaciones logarítmico-normales, puesto que todos ellos suponen que la media aritmética de los precios del subyacente sigue una distribución logarítmico-normal, distinguiéndose unos de otros en la cantidad de momentos de dicha distribución que se tienen en cuenta y en la manera de estimarlos. El grado de dificultad en la implementación crece a medida que se tienen en cuenta más momentos y que éstos se intentan estimar con mayor precisión.

Nuestro interés radica en comprobar cuáles de estos métodos son más precisos para evaluar las posiciones en opciones de los fondos de inversión garantizados. Con este fin, evaluamos las opciones con los diferentes métodos aproximados y comparamos los resultados con el valor obtenido a través del método de Monte Carlo, para el cual se puede lograr la precisión que se requiera. Por ello, resulta evidente que la estimación obtenida a través del método de Monte Carlo se puede utilizar como referencia. De hecho, los autores que han desarrollado los modelos analíticos aproximados considerados en este trabajo, utilizan al método de Monte Carlo como modelo de validación.

RESULTADOS

Los fondos tomados como referencia para evaluar sus posiciones en opciones, son fondos de inversión mobiliaria garantizados de renta variable, que aseguran un porcentaje de la revalorización media del Ibex 35, y que se comercializaban en España a finales de 1998. Las posiciones en opciones establecidas por los gestores de estos fondos dependen directamente del vencimiento de las garantías ofrecidas y de las condiciones existentes en los mercados en aquellos momentos.

El porcentaje mayoritario de los fondos cuyo periodo de suscripción finalizaba en los últimos meses de 1998, tenían concentrados los vencimientos de las garantías entre tres y cuatro años, por lo que los plazos hasta el vencimiento considerados en la valoración de las opciones son tres y cuatro años.

Los mercados de deuda del estado en el último trimestre de 1998, siguieron una tendencia decreciente. Los tipos de interés bajaron desde cerca del 3,5% hacia el 3% para un plazo de 3 años, y de alrededor de un 4% hacia el 3,5% para 4 años. Esta situación de los mercados de renta fija nos ha llevado a evaluar las opciones, para el plazo de tres años con los tipos de interés del 3% y del 3,5%, y para el plazo de cuatro años con el 3,5% y el 4%.

En cuanto al precio del subyacente en el momento de la valoración, hay que señalar que todos los fondos utilizan como valor del Ibex 35 su valor medio diario. Este valor, publicado diariamente por la Sociedad de Bolsas S. A., se calcula como la media aritmética simple de todos los valores del índice en la sesión. El "Ibex 35 medio" terminó el año 1998 cerca del 10.000, presentando una tendencia creciente en el último trimestre con oscilaciones, lo cual nos ha llevado a tomar 9500 como valor representativo de su evolución, sobre todo del último mes.

El valor inicial del índice sobre el que se calcula la revalorización, se corresponde con el precio de ejercicio de las opciones consideradas. Dado que este valor suele ser, generalmente, el valor del índice en la fecha de comienzo de la garantía, y puesto que estamos valorando las opciones en esta fecha, el precio de ejercicio coincidirá con el precio inicial del subyacente, es decir 9500[10].

Teniendo en cuenta los parámetros citados, hemos calculado el valor de las opciones para diferentes escenarios de volatilidad y rendimiento por dividendos del índice, utilizando los métodos expuestos en el apartado anterior. Los resultados se muestran en las siguientes tablas en forma de desviaciones relativas con respecto a la estimación de Monte Carlo ([Monte Carlo – Estimación]/Monte Carlo)[11], para la cual se recoge la estimación obtenida y, entre paréntesis, su desviación estándar.

Como se puede observar en las tablas 1 y 2, para el rendimiento por dividendos del Ibex 35 hemos considerado dos valores: el 1,5% y el 2%. Pensamos que, en función de los datos históricos y previsiones contenidas en la publicación de Sociedad de Bolsas, "Sistema de interconexión bursátil. Informe mensual de índices Ibex" de los últimos meses de 1998, es razonable pensar que el rendimiento por dividendos del Ibex 35 se puede situar en ese intervalo, aunque es muy aventurado vaticinar la evolución de esta variable en un horizonte de tres o cuatro años.

En cuanto a la volatilidad del Ibex 35, hemos calculado las volatilidades históricas a finales de 1998, para periodos de 3 y 4 años, obteniendo valores próximos al 25% y 22,5%, respectivamente[12]. Para ello, hemos utilizado valores de cierre del Ibex 35 en lugar del "Ibex 35 medio", debido a que éste viene calculándose y haciéndose público por la Sociedad de Bolsas desde el 15 de octubre de 1996, por lo que carecemos de datos suficientes para cubrir periodos de tres y cuatro años. Si calculamos la volatilidad histórica a finales de 1998 con los datos disponibles del "Ibex 35 medio" obtenemos una volatilidad cercana al 29,5%. Teniendo en cuenta la dificultad de la estimación de la volatilidad y la importancia que ésta tiene en el valor de las opciones, hemos contemplado un amplio intervalo de volatilidades con el fin de analizar cómo se comportan los métodos de valoración en los distintos escenarios de volatilidad.

Tabla 1

3 AÑOS										
Dividendo 1,5% y Tipo de Interés 3%						**Dividendo 2,0% y Tipo de Interés 3%**				
σ	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W
15,0	646,6 (0,51)	5,09	0,76	-0,38	0,20	605,7 (0,51)	5,01	0,64	-0,41	0,11
20,0	823,0 (0,51)	6,85	1,06	-0,70	0,24	782,4 (0,51)	6,83	1,01	-0,67	0,17
22,5	911,0 (0,51)	7,77	1,25	-0,88	0,26	872,3 (1,21)	7,98	1,42	-0,64	0,38
25,0	1000,0 (0,51)	8,83	1,58	-0,98	0,39	958,8 (1,50)	8,78	1,50	-0,98	0,24
30,0	1175,6 (0,51)	10,83	2,14	-1,40	0,41	1132,1 (1,53)	10,60	1,91	-1,56	0,01
35,0	1348,9 (1,53)	12,83	2,72	-1,98	0,08	1305,5 (1,53)	12,69	2,57	-2,07	-0,36
Dividendo 1,5% y Tipo de Interés 3,5%						**Dividendo 2,0% y Tipo de Interés 3,5%**				
σ	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W
15,0	678,2 (0,51)	5,05	0,75	-0,46	0,17	636,9 (0,51)	5,08	0,76	-0,38	0,20
20,0	852,1 (0,51)	6,88	1,11	-0,72	0,31	811,0 (0,51)	6,89	1,09	-0,67	0,27
22,5	939,5 (0,51)	7,87	1,38	-0,83	0,43	898,8 (1,26)	7,93	1,40	-0,74	0,41
25,0	1027,5 (0,51)	8,94	1,72	-0,91	0,60	982,5 (1,53)	8,54	1,31	-1,24	0,13
30,0	1198,6 (1,53)	10,72	2,06	-1,53	0,50	1155,0 (1,53)	10,53	1,87	-1,66	0,14
35,0	1373,1 (1,53)	13,02	2,90	-1,85	0,55	1329,6 (1,53)	12,90	2,78	-1,92	0,14

Tabla 2

4 AÑOS										
Dividendo 1,5% y Tipo de Interés 3,5%						**Dividendo 2,0% y Tipo de Interés 3,5%**				
σ	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W
15,0	783,9 (0,51)	5,97	0,98	-0,59	0,30	730,4 (0,77)	6,19	1,17	-0,32	0,49
20,0	976,4 (0,51)	8,14	1,45	-0,94	0,54	921,0 (1,30)	8,03	1,33	-0,98	0,35
22,5	1075,2 (1,53)	9,51	1,96	-0,93	0,90	1015,4 (1,53)	8,96	1,43	-1,38	0,25
25,0	1169,0 (1,02)	10,41	2,04	-1,40	0,79	1114,1 (1,53)	10,39	2,00	-1,37	0,57
30,0	1361,6 (1,53)	12,90	2,84	-1,89	0,96	1306,3 (1,53)	12,90	2,83	-1,86	0,56
35,0	1556,1 (1,53)	15,78	4,01	-2,27	0,56	1497,9 (1,53)	15,61	3,86	-2,38	-0,24
Dividendo 1,5% y Tipo de Interés 4,0%						**Dividendo 2,0% y Tipo de Interés 4,0%**				
σ	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W
15,0	825,7 (0,77)	6,08	1,08	-0,53	0,41	766,9 (0,70)	5,78	0,79	-0,77	0,12
20,0	1012,1 (1,36)	8,08	1,41	-1,04	0,56	954,3 (1,29)	7,83	1,16	-1,22	0,25
22,5	1109,2 (1,53)	9,48	1,94	-1,00	1,00	1050,8 (1,53)	9,19	1,66	-1,22	0,60
25,0	1205,2 (1,53)	10,78	2,38	-1,12	1,32	1146,4 (1,53)	10,47	2,09	-1,35	0,84
30,0	1392,4 (1,53)	13,07	3,00	-1,78	1,49	1333,1 (1,53)	12,78	2,73	-2,00	0,84
35,0	1581,7 (1,53)	15,78	4,01	-2,30	1,23	1521,4 (1,53)	15,49	3,75	-2,52	0,31

CONCLUSIONES

En términos generales, de los resultados obtenidos al valorar las posiciones en opciones de los fondos de inversión garantizados de renta variable en las condiciones mencionadas, podemos concluir que la variable que incide significativamente en el grado de precisión de los métodos es la volatilidad, mientras que el resto no parece influir de una manera determinante.

El método geométrico infravalora las opciones en todos los escenarios contemplados. Para el horizonte de tres años esta infravaloración, que está próxima al 5% para una volatilidad del 15%, pasa a niveles cercanos al 13% cuando la volatilidad se incrementa al 35%. Ni el tipo de interés sin riesgo, ni el rendimiento por dividendos parecen generar diferencias apreciables, aunque se observa que al considerar un plazo de cuatro años las desviaciones son ligeramente mayores.

El método de Vorst también infravalora las opciones, pero con desviaciones menores. Si tomamos volatilidades entre el 15 y 35%, para un horizonte de tres años, las desviaciones aproximadamente se sitúan entre un 0,7% y un 2,8%, y entre un 1% y un 4% para cuatro años. Si bien se incrementan con la volatilidad, las desviaciones no parecen estar condicionadas por el resto de las variables contempladas.

El método de Levy sobrevalora las opciones en todos los escenarios considerados. Al igual que en el caso anterior, las desviaciones son mayores cuanto mayor es la volatilidad, pero inferiores al 2% para tres años y al 2,5% para cuatro años. Tampoco en éste parece que el resto de variables tengan un efectos significativos en las desviaciones.

Por último, el método de Turnbull y Wakeman es el que proporciona mejores estimaciones, infravalorando sistemáticamente las opciones. Las desviaciones con respecto de Monte Carlo, para el horizonte de tres años, son inferiores al 0,6%, superándose el 0,5% únicamente en dos ocasiones. Para el horizonte de cuatro años, la cota superior es 1,5%, quedando por encima del 1% únicamente tres valores. Aunque se percibe una tendencia al incremento de las desviaciones con la volatilidad, la correlación no es tan grande como en los casos anteriores, debido, posiblemente, a que los valores del método de Turnbull y Wakeman están muy próximos a las estimaciones de Monte Carlo y a que éstos se obtienen con un margen de error que viene medido por la desviación de la estimación. Por otra parte, tampoco aquí se percibe que el resto de variables tengan una influencia clara en las desviaciones.

NOTAS

(1) Tras la publicación de la Circular 3/1997 de la Comisión Nacional del Mercado de Valores, solamente podrán incluir los términos "garantizado" o "asegurado" en su denominación, aquellos fondos en los que se garantice al menos el 100% de la inversión inicial. En este trabajo, al hablar de fondos de inversión garantizados, nos referiremos a todos aquellos fondos con un objetivo concreto de rentabilidad que tengan una garantía otorgada por un tercero, independientemente del porcentaje de la inversión inicial que garanticen.

(2) En el caso de tomar como referencia el mercado español, el índice utilizado es el Ibex 35. Sin embargo, en otros casos, las garantías están vinculadas a cestas de índices, índices paneuropeos, o cestas de valores.

(3) En Nelken (1996, pp. 10-44) podemos encontrar casi todo un capítulo dedicado a distinguir los distintos tipos de opciones exóticas explicando sus características básicas.

(4) Al igual que en las opciones "estándar" un argumento basado en el arbitraje, que se puede consultar en Nelken (1996, pp. 193-194), permite desarrollar la igualdad que expresa la paridad put-call para opciones asiáticas. Así, podremos valorar, en la mayoría de los casos, las opciones put asiáticas utilizando los modelos desarrollados para las call.

(5) El activo subyacente considerado en el trabajo es un índice bursátil. El desarrollo posterior y las fórmulas de valoración que se van a presentar son fácilmente extrapolables a otros subyacentes como acciones, divisas y mercancías.

(6) En Clewlow y Strickland (1997, p. 75) se pueden consultar este tipo de expresiones.

(7) En relación a la utilización del método de Monte Carlo como modelo de validación en la valoración de opciones, se pueden consultar Boyle (1977) y Rubinstein (1981).

(8) Si $\ln x \sim N(\mu,\sigma)$, entonces $E(x^k) = e^{k\mu + \frac{k^2\sigma^2}{2}}$,como demuestran Fernández-Abascal et al. (1994, p. 446).

(9) Ver Jarrow y Rudd (1982).

(10) Nuestro análisis queda limitado de esta manera a las opciones en el dinero. Este análisis se puede completar con el estudio del comportamiento de los métodos de valoración considerados cuando, con el paso del tiempo, las opciones se sitúan dentro o fuera del dinero.

(11) En el anexo se recogen otras dos tablas con los valores estimados de las opciones.

(12) La anualización de las volatilidades se ha realizado en todos los casos siguiendo la propuesta de Fernández e Yzaguirre (1995, pp. 69-72).

BIBLIOGRAFÍA

Beckenbach, E.F. y R. Bellman (1971): Inequalities, Springer, Berlín.

Black, F. y M. Scholes (1972): The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81, May-June, pp. 637-654.

Boyle, P. P. (1977): Options: a Monte Carlo approach , Journal of Financial Economics, 4, May, pp. 323–338.

Clewlow, L. y C. Strickland (ed.) (1997): Exotic options. The state of the art, International, Thomsom Business Press, London.

Cox, J. C. y S. A. Ross (1976): The valuation of options for alternative stochastic processes, Journal of Financial Economics, 3, September, pp. 145–166.

Fernández, P. (1996): Opciones, futuros e instrumentos derivados, Deusto, Bilbao.

Fernández, P. y Yzaguirre J. (1995): Ibex 35. Análisis e investigaciones, Eiunsa, Barcelona.

Fernández-Abascal, H., M. Guijarro, J.L. Rojo y J.A. Sanz (1994): Cálculo de probabilidades y estadística, Ariel, Barcelona.

Hull, J. y A. White (1993): Efficient procedures for valuing european and american path–dependent options, Journal of Derivatives, Fall, pp.21–31.

Jarrow, R. y A. Rudd (1982): Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes, Journal of Financial Economics, 10, 347-369.

Kemna, A. G. Z. y A. C. F. Vorst (1990): A pricing method for options based on average asset values, Journal of Banking and Finance, 14, pp. 113–129.

Lamothe, P. (1993): Opciones financieras. Un enfoque fundamental, McGraw–Hill, Madrid.

Levy, E. (1992): The valuation of average rate currency options, Journal of International Money and Finance, 11, pp. 474–491.

Nelken, I. (ed.) (1996): The handbook of exotic options. Instruments, analysis and applications, Irwin, Chicago.

Rubinstein, R. Y. (1981): Simulation and the Monte Carlo method, John Wiley & Sons, New York.

Turnbull, S. M. y L. M. Wakeman (1991): Quick algorithm for pricing european average rate options, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 26, pp. 377–389.

Vorst, T. (1992): Prices and hedge ratios of average exchange rate options, International Review of Financial Analysis, 1, pp. 179–193.

ANEXO

3 AÑOS										
	Dividendo 1,5% y Tipo de Interés 3%					Dividendo 2,0% y Tipo de Interés 3%				
σ	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W
15,0	646,6 (0,51)	615,3	641,7	649,1	645,3	605,7 (0,51)	576,8	601,8	608,2	605,1
20,0	823,0 (0,51)	770,2	814,3	828,8	821,0	782,4 (0,51)	732,4	774,7	787,7	781,2
22,5	911,0 (0,51)	845,4	899,8	919,2	908,7	872,3 (1,21)	807,8	860,1	877,9	868,9
25,0	1000,0 (0,51)	918,9	984,4	1009,9	996,1	958,8 (1,50)	881,5	944,6	968,4	956,6
30,0	1175,6 (0,51)	1060,8	1151,0	1192,3	1170,8	1132,1 (1,53)	1023,6	1110,9	1150,1	1132,0
35,0	1348,9 (1,53)	1195,5	1313,2	1376,1	1347,9	1305,5 (1,53)	1158,5	1272,8	1333,1	1310,2
	Dividendo 1,5% y Tipo de Interés 3,5%					Dividendo 2,0% y Tipo de Interés 3,5%				
σ	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W
15,0	678,2 (0,51)	645,6	673,2	681,4	677,1	636,9 (0,51)	606,1	632,2	639,4	635,7
20,0	852,1 (0,51)	797,2	842,7	858,2	849,5	811,0 (0,51)	758,7	802,2	816,4	808,8
22,5	939,5 (0,51)	871,0	926,8	947,4	935,5	898,8 (1,26)	832,8	886,4	905,5	895,1
25,0	1027,5 (0,51)	943,2	1010,2	1036,9	1021,4	982,5 (1,53)	905,2	969,8	994,8	981,3
30,0	1198,6 (1,53)	1082,6	1174,4	1217,2	1192,6	1155,0 (1,53)	1045,0	1133,8	1174,5	1153,4
35,0	1373,1 (1,53)	1215,0	1334,4	1398,9	1365,6	1329,6 (1,53)	1177,7	1293,6	1355,6	1327,8

4 AÑOS										
	Dividendo 1,5% y Tipo de Interés 3,5%					Dividendo 2,0% y Tipo de Interés 3,5%				
σ	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W
15,0	783,9 (0,51)	739,7	776,3	788,5	781,5	730,4 (0,77)	687,8	721,9	732,7	726,8
20,0	976,4 (0,51)	902,9	962,5	985,7	971,2	921,0 (1,30)	852,5	908,9	930,1	917,8
22,5	1075,2 (1,53)	981,9	1054,5	1085,3	1065,6	1015,4 (1,53)	931,9	1001,1	1029,6	1012,9
25,0	1169,0 (1,02)	1058,7	1145,6	1185,6	1159,8	1114,1 (1,53)	1009,2	1092,2	1129,6	1107,8
30,0	1361,6 (1,53)	1206,0	1324,0	1387,8	1348,7	1306,3 (1,53)	1157,1	1270,4	1331,0	1299,0
35,0	1556,1 (1,53)	1344,0	1496,1	1592,2	1547,4	1497,9 (1,53)	1295,6	1442,3	1534,4	1501,6
	Dividendo 1,5% y Tipo de Interés 4,0%					Dividendo 2,0% y Tipo de Interés 4,0%				
σ	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W	Monte Carlo	Geom.	Vorst	Levy	T&W
15,0	825,7 (0,77)	778,4	816,9	830,2	822,3	766,9 (0,70)	725,1	760,9	772,9	766,0
20,0	1012,1 (1,36)	936,4	998,1	1022,7	1006,4	954,3 (1,29)	885,1	943,4	966,1	951,9
22,5	1109,2 (1,53)	1013,1	1088,0	1120,4	1098,2	1050,8 (1,53)	962,4	1033,7	1063,8	1044,5
25,0	1205,2 (1,53)	1088,0	1177,2	1218,9	1189,5	1146,4 (1,53)	1037,8	1122,9	1162,1	1136,8
30,0	1392,4 (1,53)	1231,5	1351,9	1417,7	1371,9	1333,1 (1,53)	1182,1	1297,7	1360,3	1321,9
35,0	1581,7 (1,53)	1366,1	1520,8	1619,0	1562,4	1521,4 (1,53)	1317,4	1466,5	1560,7	1516,7